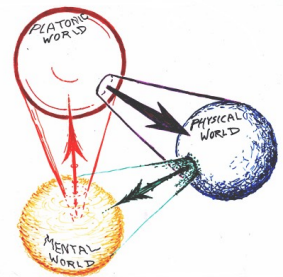




复分析讲义

作者：Hongxin Yang 南风

时间：March 26, 2025



目录

第 1 章	相关定理环境等的标识	1
第 2 章	复分析基础知识	2
2.1	复数的基础公式与判别	2
第 3 章	全纯函数	4
3.1	全纯函数基础概念	4
3.2	柯西黎曼方程	5
3.3	全纯函数与调和函数	10
3.4	基本初等全纯函数	12
第 4 章	全纯函数的积分表示	14
4.1	复积分的基本概念与基本公式	14
4.2	柯西积分定理与全纯函数的原函数	16
4.3	柯西积分公式	21
4.4	柯西积分公式的推论结果	25
第 5 章	全纯函数的泰勒展开	27
5.1	复级数基本性质	27
5.2	幂级数	31
5.3	全纯函数的 Taylor 展开	35
5.3.1	全纯函数的 Taylor 展开表达	35
5.3.2	全纯函数的零点孤立性与唯一性定理	37
5.4	辐角原理与 Rouché 定理及其应用	40
5.4.1	幅角原理与 Rouché 定理	40
5.4.2	分歧覆盖, 开映射, 与单叶全纯函数性质, Hurwitz	41
5.5	最大模定理与 Schwarz 定理	44
第 6 章	全纯函数的 Laurent 展开及其应用	47
6.1	全纯函数的 Laurent 展开	47
6.2	解析函数孤立奇点	49
6.3	皮卡定理与整函数与亚纯函数	52
第 7 章	留数理论	54
7.1	留数基本性质	54
7.2	无穷远点的留数	55
7.3	留数计算积分应用	56
7.3.1	$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	56
7.3.2	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	56
7.3.3	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx$	57
7.3.4	路径上存在奇点	58
7.4	鲁歇定理	59

第 8 章 共形映射	62
8.1 解析变换特性	62


复分析讲义

第 1 章 相关定理环境等的标识

Proof 使用方法:begin+ proof+ end

Remark 使用方法:begin+ remark+ end


Example 1.1 使用方法; begin+ example + end

 **Exercise 1.1** 使用方法:begin+ exercise +end

Property 使用方法:begin+ property + end

Problem 1.1 使用方法:begin + problem +end

Conclusion 使用方法:begin+ conclusion +end

 **Note** 使用方法; begin + note + end

Definition 1.1

使用方法:begin+ definition+ end

Proposition 1.1

使用方法:begin+ proposition+ end

Lemma 1.1

使用方法:begin+ lemma+ end

Corollary 1.1

使用方法:begin + corollary + end

Axiom 1.1

使用方法:begin+ axiom + end

公设 1.1

使用方法:begin + postulate + end

第2章 复分析基础知识

2.1 复数的基础公式与判别

Proposition 2.1

- $\frac{1}{\sqrt{2}} (|\operatorname{Re}z + \operatorname{Im}z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}z| + |\operatorname{Im}z|$
- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2$
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2$
- $z_1 \perp z_2 \iff \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \iff \frac{z_1}{z_2} \text{ 纯虚数} \iff z_1 \bar{z}_2 \text{ 为纯虚数} \iff \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$
- $z_1 \parallel z_2 \iff \operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) = 0$
- $z_1 \sim z_2 \text{ 四} \text{ 点共圆} \iff \operatorname{Im}\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = 0$
- $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \implies \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$

Proposition 2.2

设 L 是方程： $az\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + d = 0$ 其中 $a, d \in \mathbb{R}$ 且 $\beta \in \mathbb{C}$

1. $a = 0$ 且 $\beta \neq 0$ 时， L 为一条直线

2. $a \neq 0$ 且 $|\beta|^2 - ad > 0$ ，则 L 是一条圆周，并求出圆心和半径

Proof 1. 直线一般方程为： $Ax + By + C = 0 (A, B, C \in \mathbb{R})$ 带入 $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ 与 $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
 $\iff (A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} = -2C \iff \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + d = 0 (\beta \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{R})$

2. 圆的一般方程 $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 (A, B, C, D \in \mathbb{R}) (B^2 + C^2 - 4AD > 0)$

化为 $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}$ 圆心为 $\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}\right)$ 半径长 $\sqrt{\frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}}$

带入 $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ 与 $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

$$\iff A|z|^2 + \frac{B - Ci}{2}z + \frac{B + Ci}{2}\bar{z} + D = 0 \text{ 故 } \begin{cases} a = A \\ \beta = \frac{B + Ci}{2} \\ d = D \end{cases}$$

因此圆心为 $\left(-\frac{\beta + \bar{\beta}}{2a}, -\frac{\beta - \bar{\beta}}{2ai}\right)$ 半径长为： $\frac{\sqrt{|\beta|^2 - ad}}{|a|} \quad |\beta|^2 - ad > 0$

Proposition 2.3

1. $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}, z_0 = x_0 + iy_0$ ，则 $z_n \rightarrow z_0 \iff x_n \rightarrow x_0$ 且 $y_n \rightarrow y_0$

2. $f(z)$ 在 z_0 连续 $\iff u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续

Definition 2.1 (Jordan 曲线与连续曲线)

所谓连续曲线，是指定义在闭区间 $[a, b]$ 上的一个复值连续函数 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ，写为 $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$

这里， $x(t), y(t)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数。如果用 γ^* 记 γ 的像点所成的集合： $\gamma^* = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ 那么 γ^* 是 \mathbb{C} 上的紧集
曲线 γ 的方向就是参数 t 增加的方向，在这个意义下， $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 分别称为 γ 的起点和终点

如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$ ，即起点和终点重合，就称 γ 为闭曲线。如果曲线 γ 仅当 $t_1 = t_2$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ，就称 γ 为简单曲线或 *Jordan* 曲线

如果只有当 $t_1 = a, t_2 = b$ 时才有 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ，就称 γ 为简单闭曲线或 *Jordan* 闭曲线，或简称围道

Definition 2.2 (光滑曲线与曲线长度)

如果 $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ 存在，且 $\gamma'(t) \neq 0$ ，那么 γ 在每一点都有切线， $\gamma'(t)$ 就是曲线 γ 在 $\gamma(t)$ 处的切向量，它与正实轴的夹角为 $\text{Arg} \gamma'(t)$

如果 $\gamma'(t)$ 是连续函数，那么 γ 的切线随 t 而连续变动，这时称 γ 为光滑曲线

在这种情况下， γ 的长度为
$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

第3章 全纯函数

3.1 全纯函数基础概念

Definition 3.1

设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数, $z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.1)$$

存在, 就说 f 在 z_0 处复可微或可微, 这个极限称为 f 在 z_0 处的导数或微商, 记作 $f'(z_0)$. 如果 f 在 D 中每点都可微, 就称 f 是域 D 中的全纯函数或解析函数. 如果 f 在 z_0 的一个邻域中全纯, 就称 f 在 z_0 处全纯.

设 f 在 z_0 处可微. 若记 $\Delta z = z - z_0$, 则 (3.1) 式可以写成

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0),$$

或者

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|). \quad (3.2)$$

由此即得 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) = f(z_0)$, 这说明 f 在 z_0 处连续. 我们已经证明了

Proposition 3.1

若 f 在 z_0 处可微, 则必在 z_0 处连续.

但反过来不成立, 即若 f 在 z_0 处连续, 则 f 未必在 z_0 处可微.

Example 3.1 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在 \mathbb{C} 中处处不可微.

Proof 对于任意 $z \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{z + \Delta z - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\Delta z}{\Delta z}.$$

如果让 Δz 取实数, 则 $\frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$; 如果让 Δz 取纯虚数, 则 $\frac{\Delta z}{\Delta z} = -1$. 因此, 当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时上述极限不存在, 因而在 \mathbb{C} 中处处不可导.

但容易看出这个函数在 \mathbb{C} 中却是处处连续的, 这是一个处处连续、处处不可微的例子. 其实, 在复变函数中这种例子很多, 例如 $f(z) = \Re z, f(z) = |z|$ 都是. 但在实变函数中, 要举一个这样的例子却是相当困难的. 这说明在复变函数中可微的要求比实变函数中要强得多, 因而得到的结论也强得多, 这在以后的学习中将逐步揭示出来.

Proposition 3.2

设 f 和 g 分别是域 D 和域 G 上的全纯函数, 如果 $f(D) \subset G$, 那么 $g \circ f$ 也是 D 上的全纯函数, 而且 $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.

3.2 柯西黎曼方程

Theorem 3.1 (复函数在一点处可微充要条件)

设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内确定, 那么 $f(z)$ 在点 $z = x + iy \in D$ 可微

\iff 在点 $z = x + iy$, $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 可微, 并且 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

此时在 $f(z)$ 点 $z = x + iy \in D$ 可微的条件下有 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$

Proof 必要性. 设 $f(z)$ 在点 $z = x + iy (\in D)$ 有导数 $\alpha = a + ib$, 这里 a 及 b 是实数

根据导数的定义

当 $z + \Delta z \in D$ 时 ($\Delta z \neq 0$) $f(z + \Delta z) - f(z) = \alpha \Delta z + o(|\Delta z|) = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|)$ ($|\Delta z| \rightarrow 0$) (*)

其中 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, Δx 及 Δy 是实增量, $o(|\Delta z|)$ 的意义与在数学分析中相同

比较 (*) 两边的实部及虚部, 就得到

$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = a\Delta x - b\Delta y + o(|\Delta z|)$ ($|\Delta z| \rightarrow 0$) (**)

$v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) = b\Delta x + a\Delta y + o(|\Delta z|)$ ($|\Delta z| \rightarrow 0$) (***)

这就是说, 在点 $z = x + iy$, $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 可微, 并且 $\frac{\partial u}{\partial x} = a$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -b$, $\frac{\partial v}{\partial x} = b$, $\frac{\partial v}{\partial y} = a$ (#) 由此可推出

充分性. 由于 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在点 $z = x + iy$ 可微, 并且柯西黎曼条件成立

我们有 (**) 与 (***), 其中 $z + \Delta z \in D$ ($\Delta z \neq 0$), a 及 b 由 (#) 给出

用 i 乘 (***) 两边, 把所得结果与 (**) 相加, 就得到 (*). 这样就证明了 $f(z)$ 在点 $z = x + iy$ 有导数 $\alpha = a + ib$

Theorem 3.2 (复函数在区域上全纯的充要条件)

设函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内确定

$f(z)$ 在区域 D 内解析 $\iff u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 在 D 内可微, 而且在 D 内成立 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$


此时在 $f(z)$ 在 D 上全纯的条件下有 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}$

Corollary 3.1 (复函数全纯的充分条件)

由 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的全纯充要条件与实函数可微可以由偏导数连续所导出故:


$f(z)$ 在一点 $z = x + iy$ 可微 $\iff u_x, u_y, v_x, v_y$ 连续且在该点满足柯西黎曼条件

$f(z)$ 在区域上 $z = x + iy$ 全纯 $\iff u_x, u_y, v_x, v_y$ 在区域上连续且在区域上满足柯西黎曼条件

 **Note** 注意复函数在一点处可微与解析的区别

Definition 3.2 (函数实可微定义)

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是定义在域 D 上的函数, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. 我们说 f 在 z_0 处实可微, 是指 u 和 v 作为 x, y 的二元函数在 (x_0, y_0) 处可微.

 **Note** 今设 f 在 z_0 处实可微, 按定义, 有

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|) (*)$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|) (**)$$

这里, $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

于是

$$\begin{aligned}
f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) \\
&\quad + i(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|) \\
&\quad + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|)\right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \Delta x \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \Delta y + o(|\Delta z|) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y + o(|\Delta z|)
\end{aligned}$$

把 $\Delta x = \frac{1}{2}(\Delta z + \overline{\Delta z})$, $\Delta y = \frac{1}{2i}(\Delta z - \overline{\Delta z})$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}
f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) (\Delta z + \overline{\Delta z}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) (\Delta z - \overline{\Delta z}) + o(|\Delta z|) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \Delta z \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)
\end{aligned}$$

则上式可写为 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$ (***)

则可知 (*) 与 (***) 等价

Definition 3.3 ($\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 算子与 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ 联系)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Proof 此时将 $f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, -i\frac{z - \bar{z}}{2}\right)$ 写为 z 与 \bar{z} 形式

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Proposition 3.3 (实可微的充要条件)

设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的函数, $z_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处实可微的

$\iff f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|)$ 成立, 其中, $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 是定义的算子.

Theorem 3.3 (z 与 \bar{z} 刻画复函数解析)

设 f 是定义在域 D 上的函数, $z_0 \in D$, 那么 f 在 z_0 处可微 $\iff f$ 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

与此同时在可微的情况下, $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

Proof 如果 f 在 z_0 处可微, 得 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|)$ 与实可微的充要条件式比较就知道 f 在 z_0 处是实可微的而且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

反之, 若 f 在 z_0 处实可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ 则由实可微的充要条件式得 $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|)$

由此即知 f 在 z_0 处可微, 而且 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

Theorem 3.4 (用 r 与 θ 刻画复函数解析)

若将 z 表示为 $re^{i\theta}$ 形式则 $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. 此时对于 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ 点

$f(z)$ 在 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ 点可微 $\iff u(r, \theta)$ 与 $v(r, \theta)$ 在 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ 点可微且满足 $u_r = \frac{1}{r}v_\theta$ $u_\theta = -rv_r$

故此时 $f'(z) = u_x + iv_x = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{r}{z}(u_r + iv_r) = \frac{-i}{z}(u_\theta + iv_\theta)$

Proof $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ 且 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

$$\text{故} \begin{cases} u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \\ u_\theta = -r \sin \theta u_x + u_y r \cos \theta \end{cases} \implies \begin{cases} u_x = u_r \cos \theta - \frac{u_\theta}{r} \sin \theta \\ u_y = u_r \sin \theta + \frac{u_\theta}{r} \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_r \cos \theta - \frac{v_\theta}{r} \sin \theta \\ v_y = v_r \sin \theta + \frac{v_\theta}{r} \cos \theta \end{cases}$$

故C.R.方程为: $u_r \cos \theta - \frac{u_\theta}{r} \sin \theta = v_r \sin \theta + \frac{v_\theta}{r} \cos \theta$ 且 $u_r \sin \theta + \frac{u_\theta}{r} \cos \theta = v_r \cos \theta - \frac{v_\theta}{r} \sin \theta$

$$\implies u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad u_\theta = -rv_r$$

Definition 3.4 (∂z , $\partial \bar{z}$ 算子与 ∂r , $\partial \theta$ 联系)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{cases}$$

Proof $f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial_r r \cos \theta - \partial_\theta \sin \theta}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial_\theta \cos \theta + \partial_r r \sin \theta}{r} \end{cases}$$

且有 $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ 且 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$$\implies \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{cases}$$

Proposition 3.4

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f \in H(D)$, 若以下条件成立: 证明 f 是一常数

1. 如果对每一个 $z \in D$, 都有 $f'(z) = 0$,
2. $\text{Re}f(z)$ 是常数
3. $\text{Im}f(z)$ 是常数
4. $|f(z)|$ 是常数
5. $\arg f(z)$ 是常数
6. $\text{Re}f(z) = (\text{Im}f(z))^2, z \in D$, 那么 f 是一常数.

Proof 1. 此时 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \implies f$ 是一常数

2. 利用 $f = c + iv(x, y) + C.R.$ 方程

3. 同理2.

4. $|f(z)|^2 \equiv c = u^2 + v^2 +$ 求偏导 + C.R.方程

5. 利用 r, θ 刻画复函数可微条件即可

6. $u = v^2 + C.R.$ 方程

Proposition 3.5 (模函数的拉普拉斯算子作用)

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f \in H(D)$, f 在 D 中不取零值

证明: 对任意 $p > 0$, 有 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^p = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2$

Proof 设 $f = u(x, y) + iv(x, y)$ 则有

$$1. |f(z)|^2 = u^2 + v^2$$

2. u, v 调和

$$3. f'(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (u_x + iv_x - iu_y + iv_y)$$

$$4. |f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} |f(z)|^p = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2 + v^2)^{p/2} = \frac{p^2 - 2p}{4} (u^2 + v^2)^{p/2-2} (2uu_x + 2vv_x)^2 + p (u^2 + v^2)^{p/2-1} \cdot (u_x^2 + v_x^2 + uu_{xx} + vv_{xx})$$

类似的也有 $\frac{\partial^2}{\partial y^2} |f(z)|^p$ 做和

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |f(z)|^p = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2$$

Proposition 3.6

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f = u + iv \in C^1(D)$

证明: $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \Rightarrow$ 特别地, 当 $f \in H(D)$ 时, 有 $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = |f'|^2$

Proof $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} (u_x + iv_x - iu_y + v_y)$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} (u_x + iv_x + iu_y - v_y)$ 得到:

$$4 \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 = u_x^2 + v_y^2 + 2u_x v_y + v_x^2 + u_y^2 - 2v_x u_y \quad 4 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 = u_x^2 + v_y^2 - 2u_x v_y + v_x^2 + u_y^2 + 2v_x u_y$$

$$\Rightarrow 4 \left(\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \right) = 4u_x v_y - 4v_x u_y \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2$$

而当 $f \in H(D)$ 时由 C.R. 条件知道 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 故可得.

Proposition 3.7

设单叶解析函数 $f(z)$ 将复平面上可求面积的区域 D 映射为复平面上区域 G , 并设区域 G 的面积为 A

$$\text{则 } A = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$$

Proposition 3.8

若 $f(z)$ 在 z_0 点处实可微, 并且 $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = k \geq 0$ 存在, 则 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 必有一个在 z_0 处可微

Proof 设 $f = u(x, y) + i\vartheta(x, y)$ 则 u, v 在 (x_0, y_0) 处可微

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left| \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(\vartheta(x,y) - \vartheta(x_0,y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)} \right|$$

$$\iff \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{[u(x,y) - u(x_0,y_0)]^2 + [\vartheta(x,y) - \vartheta(x_0,y_0)]^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta u)^2 + (\Delta \vartheta)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = k \geq 0$$

故根据实二元函数可微有:

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \quad \Delta \vartheta = \vartheta_x \Delta x + \vartheta_y \Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = k \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u_x^2 \Delta x^2 + u_y^2 \Delta y^2 + v_x^2 \Delta x^2 + v_y^2 \Delta y^2 + 2u_x u_y \Delta x \Delta y + 2v_x v_y \Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = k$$

上面式子的重极限关于方向无关，设此时沿着 (r, θ) 方向考察上述式子

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \left(u_x^2 + v_x^2 \right) \cos^2 \theta + \left(u_y^2 + v_y^2 \right) \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta (u_x u_y + v_x v_y) = k$$

$$\implies u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 = k \text{ 且 } u_x u_y + v_x v_y = 0$$

此时 f 在 z_0 处的雅可比矩阵 $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$

故可以进行适当的缩放将 k 消去得到 $\begin{pmatrix} \frac{u_x}{\sqrt{k}} & \frac{u_y}{\sqrt{k}} \\ \frac{v_x}{\sqrt{k}} & \frac{v_y}{\sqrt{k}} \end{pmatrix}$ 为正交矩阵

故根据二阶正交矩阵分类或 $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases}$

$$f(z) \text{ 或 } \overline{f(z)} \text{ 可微} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases}$$

故证毕

Proposition 3.9

设复函数 $f(z), g(z)$. 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 z_0 处解析, 且 $f(z_0) = g(z_0) = 0$ 且 $g'(z_0) \neq 0$
则洛必达法则成立

3.3 全纯函数与调和函数

Note 设 D 是 \mathbb{C} 中的域, 我们用 $C(D)$ 记 D 上连续函数的全体, 用 $H(D)$ 记 D 上全纯函数的全体

1. $H(D) \subset C(D)$

$$\text{设 } f = u + iv, \text{ 记 } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

我们用 $C^1(D)$ 记 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上连续的 f 全体.

由多元微积分的知识知道, 对于任意 $f \in C^1(D)$, f 在 D 上实可微, 故 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 都连续, f 在 D 上连续

2. $C^1(D) \subset C(D)$

用 $C^k(D)$ 记在 D 上有 k 阶连续偏导数的函数的全体, $C^\infty(D)$ 记在 D 上有任意阶连续偏导数的函数的全体

3. $H(D) \subset C^\infty(D) \subset C^k(D) \subset C^1(D) \subset C(D)$, k 是大于 1 的自然数.

Definition 3.5 (调和函数)

设 u 是 D 上的实值函数, 如果 $u \in C^2(D)$, 且对任意 $z \in D$, 有 $\Delta u(z) = \frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2} = 0$ 就称 u 是 D 中的调和函数

Proposition 3.10

设 $u \in C^2(D)$, 那么 $\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$

Proof 有 $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta u \end{aligned}$$

Theorem 3.5

设 $f = u + iv \in H(D)$, 那么 u 和 v 都是 D 上的调和函数

Proof 因为 $f \in H(D)$, 由 Cauchy-Riemann 方程

$$\text{有 } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 \text{ 所以 } \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

于是, 由 $u = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ 即得 $\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ 同理可证 $\Delta v = 0$

Definition 3.6 (共轭调和函数)

设 u 和 v 是一对调和函数, 如果它们还满足 Cauchy-Riemann 方程
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$
 就称 v 为 u 的共轭调和函数

Note 现在问, 给定域 D 中的调和函数 u , 是否存在 u 的共轭调和函数 v , 使得 $u+iv$ 成为 D 中的全纯函数? 对于单连通域, 答案是肯定的

Theorem 3.6

设 u 是单连通域 D 上的调和函数, 则必存在 u 的共轭调和函数 v , 使得 $u+iv$ 为 D 上的全纯函数

Proof 因为 u 满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

若令 $P = -\frac{\partial u}{\partial y}$ $Q = \frac{\partial u}{\partial x}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

所以 $Pdx + Qdy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ 是一个全微分

因而积分 $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ 与路径无关

令 $v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$

那么 $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$ 所以, v 就是要求的 u 的共轭调和函数.

Proposition 3.11

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f \in C^2(D)$. 证明: 对每个 $z \in D$, 有 $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}(z)$

Proposition 3.12

1. 设 D, G 为域, 设 $\varphi: D \rightarrow G$ 是全纯函数. 证明: 若 f 是 $G \rightarrow \mathbb{R}$ 的调和函数, 则 $f \circ \varphi$ 为 D 上的调和函数

2. 设 D, G 为域, 设 $\varphi: D \rightarrow G$ 是全纯函数. 且 $\varphi(D) \subset G$. 证明: 若 $f \in C^2(G)$, 则 $\Delta(f \circ \varphi) = \Delta f |\varphi'|^2$

Proof 1. 设 $\varphi = u(x, y) + iv(x, y)$

故 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 为调和函数且 $u_x = v_y$ 与 $u_y = -v_x$

则 $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x} = f_1 u_x + f_2 v_x \implies \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x^2} = f_{11} u_{xx} + u_x(f_{11} u_x + f_{12} v_x) + f_{22} v_{xx} + v_x(f_{21} u_x + f_{22} v_x)$

$\implies \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x^2} = f_{11} u_{xx} + f_{22} v_{xx} + f_{11} u_x^2 + f_{22} v_x^2 + (f_{21} + f_{21}) u_x v_x$ 同理

$\implies \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x^2} = f_{11} u_{yy} + f_{22} v_{yy} + f_{11} u_y^2 + f_{22} v_y^2 + (f_{21} + f_{21}) u_y v_y$

故 $\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial y^2} = f_{11} |\varphi'(z)|^2 + f_{22} |\varphi'(z)|^2 = 0$

2. 同理 $\frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial y^2} = f_{11} |\varphi'(z)|^2 + f_{22} |\varphi'(z)|^2$ 只是最后没有用到 f 调和

3.4 基本初等全纯函数

Definition 3.7

设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个复函数, 且 $\forall z_1 \neq z_2$, 成立 $f(z_1) \neq f(z_2)$ 则称 f 在 D 中单叶, D 称为单叶形域

Definition 3.8 (指数函数)

定义 $e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

1. e^z 在 \mathbb{C} 上全纯, 且 $(e^z)' = e^z$
2. $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0 \iff |e^z| = e^x > 0$
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
4. e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数

Definition 3.9

$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\operatorname{arg} z + 2k\pi)$ 其中 $\operatorname{arg} z$ 为辐角函数主值 $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$

Theorem 3.7

如果 D 是不包含原点和无穷远点的单连通域, 则必在 D 上存在无穷多个单值全纯函数 $\varphi_k, k = 0, \pm 1, \dots$ 使得在 D 上成立 $e^{\varphi_k(z)} = z, k = 0, \pm 1, \dots$; 而且对每一个 k , 有 $\varphi_k'(z) = \frac{1}{z}$ 其中的每一个 φ_k 都称为 $\log z$ 在 D 上的单值全纯分支

Proof 对给定的 z , 选定它的辐角 $\theta = \theta_0 + 2k_0\pi$, 这里 θ_0 是 z 的辐角的主值, 即 $\theta_0 = \operatorname{arg} z, k_0$ 是任意一个给定的整数

在 D 上定义 $\varphi_{k_0}(z) = \log |z| + i(\theta_0 + 2k_0\pi) = \log r + i\theta$ 这时, $u = \log r, v = \theta$

容易验证这时有 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$

因此知道, φ_{k_0} 是 D 上的全纯函数而且 $\varphi_{k_0}'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z}$.

此外, $e^{\varphi_k(z)} = e^{\log |z| + i(\theta_0 + 2k_0\pi)} = |z|e^{i\theta_0} = z$ 对每一点 $z \in D$ 成立.

Proposition 3.13

将 D 记为 \mathbb{C} 除去负实轴, 则在 D 上可以分出无穷多个单值的全纯分支

1. $\ln z = \ln |z| + i \operatorname{arg} z$ ($\operatorname{arg} z$ 为主值, 此称为 $\operatorname{Ln} z$ 的主支)
2. $\ln z$ 该主支将 D 单叶映射为带状域 $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$
3. 一般的分支 $w = \ln |z| + i(\operatorname{arg} z + 2k\pi)$ 将 D 单叶映射为 $(2k-1)\pi < \operatorname{Im} w \leq (2k+1)\pi$
4. $\ln z$ 该主支将角状域 $-\pi < \alpha < \operatorname{arg} z < \beta \leq \pi$ 映射为 $\alpha < \operatorname{Im} w < \beta$

Definition 3.10

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

Proposition 3.14

1. 导数公式 (与实函数类似) 成立, 且为整函数
2. 以 2π 为周期
3. 函数奇偶性成立
4. 平方和为 1
5. $\sin z$ 仅仅在 $z = k\pi$ 处为零 $\cos z$ 仅仅在 $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为零

6. $\sin z$ 与 $\cos z$ 为无界函数

Theorem 3.8

对于多值函数 $w = \sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1} \cdots (z-a_m)^{\beta_m}}$

1. 若 β_j 不是 n 的倍数 $\iff a_j$ 是支点

2. 若 $\sum_{i=1}^m \beta_i$ 不是 n 的倍数 $\iff \infty$ 是支点

3. 如果域 D 只包含这样的简单闭曲线, 它的内部或者不含有任何支点

或者包含一组支点 a_{j_1}, \dots, a_{j_r} , 但与它们相应的和 $\beta_{j_1} + \dots + \beta_{j_r}$ 是 n 的倍数

那么 $w = \sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1} \cdots (z-a_m)^{\beta_m}}$ 在 D 中能分出单值的全纯分支.

Definition 3.11

$$\text{Arc tan } z = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\text{Arc sin } z = \frac{1}{i} \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right)$$

$$\text{Arc cos } z = \frac{1}{i} \text{Ln} \left(z + i\sqrt{1-z^2} \right)$$

Proposition 3.15

1. 确定支点

2. 模长单独算 r

3. 计算辐角 $f(z) = \sqrt[n]{(z-a_1)^{\beta_1} \cdots (z-a_m)^{\beta_m}} = e^{i\theta}$ 其中 $\theta = \frac{\beta_1 \arg(z-a_1) + \cdots + \beta_m \arg(z-a_m) + 2k\pi}{n}$ $k = (0, 1, 2, \dots, n)$

$$e^{i\Delta_c f(z)} \cdot e^{i\theta(\text{初})} = \exp \left\{ i \cdot \left[\frac{\beta_1 \Delta_c \arg(z-a_1) + \cdots + \beta_m \Delta_c \arg(z-a_m)}{n} \right] \right\} \cdot \exp \{ i\theta(\text{初}) \}$$

Proposition 3.16

1. $\forall z \in \mathbb{C}, \forall m \in \mathbb{Z}$ 成立 $(e^z)^m = e^{mz}$

2. $(z_1 \cdot z_2)^\alpha = z_1^\alpha \cdot z_2^\alpha$ (其中 $z_1, z_2, \alpha \in \mathbb{C}$) 注意幂函数定义 $z^\alpha := e^{\alpha \text{Ln} z}$

3. $z^\alpha \cdot z^\beta = z^{\alpha+\beta}$ ($z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

4. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

5. $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$

6. $\overline{\text{Ln} z} = \text{Ln} \bar{z}, \forall z \neq 0$

7. $\overline{\ln z} = \ln \bar{z}, \forall z \notin (-\infty, 0]$

8. 若 $\frac{p}{q}$ ($q > 0$) 为有理数则 $z^{p/q} = (\sqrt[q]{z})^p$

9. $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ 与 $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

10. $\text{Ln} z^n \neq n \text{Ln} z$ ($z, n \in \mathbb{C}$), 若想要对任意的 z 成立要求 $n \in \mathbb{Z}$

11. $\text{Ln} \sqrt[q]{z} \neq \frac{1}{q} \text{Ln} z$

12. $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$ (但是当 $\beta \in \mathbb{Z}$ 成立)

13. 一般 $(\bar{z})^\alpha \neq \overline{z^\alpha}$

第4章 全纯函数的积分表示

4.1 复积分的基本概念与基本公式

Definition 4.1

Definition: 逐段光滑的简单闭曲线简称周线.周线自然也是可求长的(根据数分)

设有向曲线 $C: z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$; 以 $a = z(\alpha)$ 为起点, $b = z(\beta)$ 为终点, $f(z)$ 沿 C 有定义.

顺着 C 从 a 到 b 的方向在 C 上取分点: $a = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b$ 把曲线 C 分成若干个弧段在从 z_{k-1} 到 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$)

的每一弧段上任取一点 ζ_k . 作成和数 $S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$, 当分点无限增多, 而这些弧段长度的最大值趋于零时如果和数 S_n 的极限存在且等于 J 则称 $f(z)$ 沿 C (从 a 到 b) 可积, 而称 J 为 $f(z)$ 沿 C (从 a 到 b) 的积分, 并以记号 $\int_C f(z) dz$ 表示: $J = \int_C f(z) dz$.

Theorem 4.1 (复积分的一般表示)

若函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 沿曲线 C 连续, 则 $f(z)$ 沿 C (光滑没有特别说明都光滑) 可积, 且

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy.$$

该公式可以通过如下形式计算: $f(z) dz = (u + iv)(dx + idy)$ 得到

Proof proof: 设 $z_k = x_k + iy_k, x_k - x_{k-1} = \Delta x_k, y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (u_k + iv_k) (\Delta x_k + i \Delta y_k)$$

我们有 上式右端的两个和数是对应的两个曲线积分的积分和数.

$$= \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k),$$

在定理的条件下, 必有 $u(x, y)$ 及 $v(x, y)$ 沿 C 连续, 于是这两个曲线积分都是存在的. 因此, 积分 $\int_C f(z) dz$ 存在, 公式成立. 公式(3.1)可以在形式上看成函数 $f(z) = u + iv$ 与微分 $dz = dx + idy$ 相乘后所得到的. 这样看, 便于记忆.

Theorem 4.2 (复积分路径参数方程形式)

Theorem: 在上述定理的条件下, 设有光滑曲线

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad \int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)] z'(t) dt$$

Proof 光滑曲线这就表示 $z'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续且有不为零的导数 $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. 又设 $f(z)$ 沿 C 连续. 令

$$f[z(t)] = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]$$

$$= u(t) + iv(t),$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx = \int_\alpha^\beta [u(t)x'(t) - v(t)y'(t)] dt + i \int_\alpha^\beta [u(t)y'(t) + v(t)x'(t)] dt,$$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)] z'(t) dt,$$

Theorem 4.3

设 $C: z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 为区域 D 内的光滑曲线, $f(z)$ 于区域 D 内单叶解析且 $f'(z) \neq 0, w = f(z)$ 将 C 映成曲线 Γ

求证 Γ 亦为光滑曲线

Proof 光滑曲线 C 的特点是: C 是若尔当曲线且 $z'(t) \neq 0$ 在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上连续

现要证 $\Gamma: w = f[z(t)]$ 亦具有类似的性质

本题需要用到定理若 $f(z)$ 在 D 内单叶解析, 则 $f'(z) \neq 0 (z \in D)$

利用光滑曲线的定义. 由题意知, $C: z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 为 D 内的光滑曲线. 由光滑曲线的定义得

(1) C 为若尔当曲线, 即 $t_1 \neq t_2$ 时, $z(t_1) \neq z(t_2)$

(2) $z'(t) \neq 0$, 且连续于 $[\alpha, \beta]$

要证 Γ 为光滑曲线, 只需验证以上两条即可.

而在 $w = f(z)$ 的变换下, C 的象曲线下的参数方程为 $\Gamma: w = w(t) = f[z(t)], \alpha \leq t \leq \beta$

(1) 因为当 $t_1 \neq t_2$ 时, $z_1(t_1) \neq z_2(t_2)$, 又因为 $f(z)$ 为单叶函数, 所以当 $z_1 \neq z_2$ 时, $f(z_1) \neq f(z_2)$

因此, 当 $t_1 \neq t_2$ 时, 有 $w(t_1) \neq w(t_2)$

(2) 因为 $z'(t) \neq 0$ 且在 $[\alpha, \beta]$ 内连续, 又因为 $f'(z) \neq 0$, 所以由解析函数的无穷可微性知 $f''(z)$ 在 D 内亦存在所以 $f'(z)$ 在 D 内连续. 由复合函数求导法则得 $w'(t) = f'(z)z'(t) \neq 0$, 且在 $[\alpha, \beta]$ 内连续.

Theorem 4.4

$C: z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 是区域 D 内的光滑曲线, $f(z)$ 在 D 内单叶解析, $w = f(z)$ 将 C 映照为 Γ
证明积分换元公式 $\int_{\Gamma} \Phi(w)dw = \int_C \Phi[f(z)]f'(z)dz$ 其中 $\Phi(w)$ 沿 Γ 连续.

Proof 先说明公式的合理性. 由上题知 C 与 Γ 均为光滑曲线

由于 $\Phi(w)$ 沿 Γ 连续以及 $f(z), f''(z)$ 在包含 C 的区域 D 内解析, 因此 $\Phi[f(z)]f'(z)$ 也连续, 故公式中的两端积分存在

知

$$\begin{aligned} \int_C \Phi[f(z)]f'(z)dz &= \int_{\alpha}^{\beta} \Phi[f(z(t))]f'[z(t)]z'(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \Phi[w(t)]w'(t)dt \\ &= \int_{\Gamma} \Phi(w)dw \end{aligned}$$

4.2 柯西积分定理与全纯函数的原函数

Theorem 4.5 (柯西积分定理)

Cauchy Integral Theorem: 设函数 $f(z)$ 在 z 平面上的单连通区域 D 内解析, C 为 D 内任一条周线, 则 $\int_C f(z) dz = 0$.
to prove it we should prove some Lemmas in advanced as follows

Lemma 4.1

Lemma 1°: 对于一条曲线 L 在 D 中, 对于 $\int_C f(z) dz = 0$ 我们可以通过折线 (端点在曲线上) 来逼近它, 插入 $A = z_0, z_1 \cdots z_n = B \forall \varepsilon > 0; \exists T, \exists \delta > 0; st. \max_{1 \leq k \leq n} \Delta s_k < \delta$ (Δs_k 为对应的一小段弧长)

$$\text{有 } \left| \int_{\widetilde{AB}} f(z) dz - \int_{AB} f(z) dz \right| < \varepsilon$$

Proof proof: 设一条曲线 L 为 \widetilde{AB} 在 D 中, 在上面插入分点, 我们估计 $\left| \int_{\widetilde{AB}} f(z) dz - \int_{AB} f(z) dz \right|$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\widetilde{AB}} f(z) dz - \int_{AB} f(z) dz \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} f(z) dz - \sum_{i=1}^n \int_{z_{k-1}z_k} f(z) dz \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} f(z) dz - \int_{z_{k-1}z_k} f(z) dz \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\left| \int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} f(z) dz - \int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} f(z_{k-1}) dz \right| + \left| \int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} f(z_{k-1}) dz - \int_{z_{k-1}z_k} f(z) dz \right| \right] \quad \text{不妨考虑 } D \text{ 为有界域} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} |f(z) - f(z_{k-1})| |dz| + \int_{z_{k-1}z_k} |f(z_{k-1}) - f(z)| |dz| \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} |f(z) - f(z_{k-1})| ds + \int_{z_{k-1}z_k} |f(z_{k-1}) - f(z)| ds \right] \quad \text{下面就来进一步估计} \end{aligned}$$

令 $E = \cup_{z \in L} O\left(z, \frac{\rho}{2}\right)$; 令 L 长度为 l 则 $L \subseteq E \subseteq \bar{E} \subseteq D$; 且 \bar{E} 为有界闭集, $f(z)$ 在 D 内解析 $\Rightarrow f(z)$ 在 \bar{E} 内解析连续从而一致连续, 那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (< \frac{\rho}{2})$; *st.* $\forall z', z'' \in \bar{E}$ 有 $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$;

此时 $\int_{\widetilde{z_{k-1}z_k}} |f(z) - f(z_{k-1})| ds + \int_{z_{k-1}z_k} |f(z_{k-1}) - f(z)| ds < \varepsilon \Delta s_k + \varepsilon \Delta s_k = 2\varepsilon \Delta s_k$ 那么 $\left| \int_{\widetilde{AB}} f(z) dz - \int_{AB} f(z) dz \right| < 2\varepsilon l$ 证毕

Lemma 4.2

Lemma 2°: 对于 D 内一条简单闭折线 P ; $\int_P f(z) dz$ 可以通过分割 P 为三角形来计算

Proof 用对角线把以 P 为周界的多边形分成有限多个三角形因为这时沿每一条对角线, 积分从彼此正好相反的方向取了两次, 刚好互相抵消

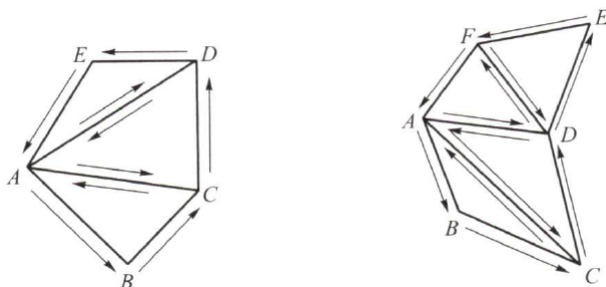


图 4.1

Lemma 4.3

Lemma 3°: 在定理条件下证明一个三角形的 $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$

Proof proof: assume $\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = M$; 如图分割。有 $\left| \int_{\Delta_1} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_2} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_3} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Delta_4} f(z) dz \right| = M$

$\Rightarrow \exists \Delta_i$ st. $\left| \int_{\Delta_i} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}$ 不妨设为 Δ_1 ; 再对 Δ_1 进行一样的操作得到 $\Delta_1(1) \geq \frac{M}{4^2} \Rightarrow$ 那么将会得到 $\left| \int_{\Delta(n)} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}$

另一方面, 令 U 为 Δ 的长度, 那么 $\Delta(i)$ 的长度为 $\frac{U}{2^i}$; $\Delta(n) \subseteq \Delta(n-1) \subseteq \dots \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta_1 \Rightarrow \exists \text{unique } z_0 \in D$; st. $\bigcap_{i=1}^n \Delta(i) = z_0$

又 $f(z)$ 在 D 内解析; 那么 $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$; st. $z \in U^\circ(z_0, \delta)$, $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0|$

$$\left| \int_{\Delta(n)} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta(n)} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] dz \right| \leq \int_{\Delta(n)} \varepsilon |z - z_0| ds \leq \underbrace{\frac{\varepsilon U}{2^n} \cdot \frac{U}{2^n}}_{d(z \rightarrow z_0) < \delta, ds < \dots} = \frac{\varepsilon U^2}{4^n}$$

由 $\int_{C \text{ 封闭}} 1 dz = 0$ 和 $\int_{C \text{ 封闭}} z dz = 0$

$$0 \leq \frac{M}{4^n} \leq \frac{\varepsilon U^2}{4^n} \Rightarrow 0 \leq M \leq \varepsilon U^2 \Rightarrow M = 0 \quad \text{Q.E.D. } \square$$

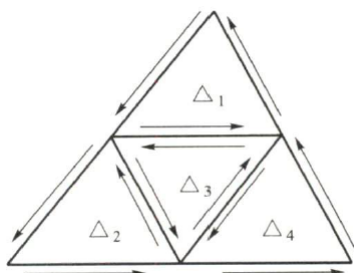


图 4.2

Conclusion Inference1°: 设 $f(z) \in H(D)$; C 为 D 内任一闭曲线 (不必是简单地) $\Rightarrow \int_C f(z) dz = 0$

proof: 利用复积分性质把复杂的分割为几段简单闭曲线即可

Inference2°: 设函数 $f(z)$ 在 z 平面上的单连通区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 在 D 内积分与路径无关

Theorem 4.6 (柯西积分定理推广)

1. 设 f 在 D 上全纯, C 为 D 内部一条周线则 $\implies \int_C f(z) dz = 0$
2. 设 C 为一条周线, D 为 C 的内部, $f(z)$ 在 $\bar{D} = D + C$ 上解析 $\implies \int_C f(z) dz = 0$
3. 设 C 为一条周线, D 为 C 的内部, $f(z)$ 在 D 内解析, C 上连续 ($f(z) \in H(D) \cap C(\bar{D})$) $\implies \int_C f(z) dz = 0$
4. ∂D 由许多复围线组成, (若干条闭曲线且互不相交互不嵌套如图) \implies 则 $\int_{\partial D^+} f(z) dz = 0$
 $(\partial D^+ = C_0^+ + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-) \implies \int_{C_0^+} f(z) dz = \int_{C_1^+} f(z) dz + \int_{C_2^+} f(z) dz + \cdots + \int_{C_n^+} f(z) dz$

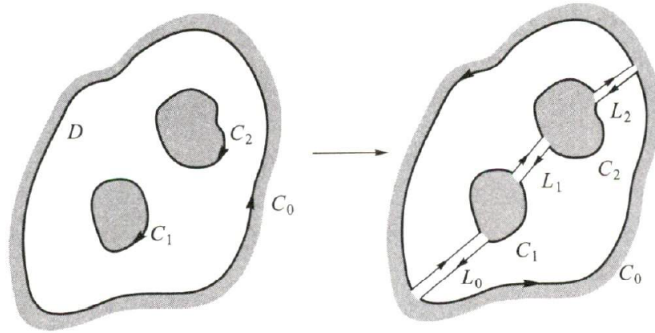


图 4.3

Proposition 4.1

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & (n=1), \\ 0 & (n \neq 1, \text{为整数}), \end{cases} \quad (C \text{ 为以 } a \text{ 为圆心 } \rho \text{ 为半径的圆周})$$

Proof $n=1$ 设 C 的参数方程为 $z-a = \rho e^{i\theta}$; $\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i$
 $n \neq 1 \implies \int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta} d\theta = 0$

Corollary 4.1

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} \quad (n \text{ 为整数}) = \begin{cases} 0 & \text{if } a \text{ 在 } C \text{ 内部之外} \\ 0 & \text{if } a \text{ 在 } C \text{ 内部之内但 } n \neq 1, n \text{ 为整数} \\ 2\pi i & \text{if } a \text{ 在 } C \text{ 内部之内且 } n = 1 \end{cases}$$

Proof 由柯西积分定理知道若 a 在外部。那么在 C 包裹的区域内解析则 $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$
 若 a 在内部, 以充分小的半径以 a 为圆心画圆那么由推广知道两个积分值相同那么就回到上题

Definition 4.2 (复函数的原函数定义)

设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是定义在域 D 上的一个函数, 如果存在 $F \in H(D)$, 使得 $F'(z) = f(z)$ 在 D 上成立, 就称 F 是 f 的一个原函数

Note 如果 $f \in H(D)$, 是否一定存在原函数呢? 答案是否定的

Example 4.1

若 D 是除去原点的单位圆盘, $f(z) = \frac{1}{z}$, f 当然是 D 上的全纯函数

如果它在 D 上存在原函数 F , 则有 $F'(z) = \frac{1}{z}$ 在 D 上成立, 但这是不可能的

因为若上式成立, 在 D 中取光滑闭曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow D$, 则有 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 于是

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

但知道 $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$. 这一矛盾说明 $\frac{1}{z}$ 在 D 上不存在原函数

Lemma 4.4

设 f 在域 D 中连续, 且对 D 中任意可求长闭曲线 γ , 均有 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$

则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 是 D 中的全纯函数, 且在 D 中有 $F'(z) = f(z)$, 这里, z_0 是 D 中一固定点.

Proof 由于 f 沿任意可求长闭曲线的积分为零, f 的积分与路径无关, 因而 F 是一单值函数

任取 $a \in D$, 我们证明 $F'(a) = f(a)$

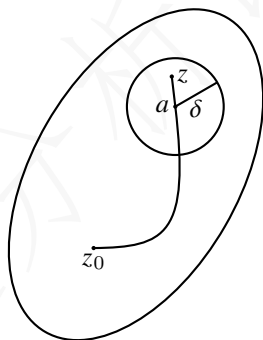
因为 f 在 a 点连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|z - a| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$

今取 $z \in B(a, \delta)$ 显然 $F(z) - F(a) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^a f(\zeta) d\zeta = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$.

这里, 积分在线段 $[a, z]$ 上进行, 于是

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| &= \frac{1}{|z - a|} |F(z) - F(a) - f(a)(z - a)| \\ &= \frac{1}{|z - a|} \left| \int_a^z f(\zeta) d\zeta - \int_a^z f(a) d\zeta \right| \\ &= \frac{1}{|z - a|} \left| \int_a^z (f(\zeta) - f(a)) d\zeta \right| \end{aligned}$$

由长大不等式, 即知上式右端小于 ε , 这就证明了 $F'(a) = f(a)$



Theorem 4.7 (原函数存在定理)

设 D 是 \mathbb{C} 中的单连通域, $f \in H(D)$, 那么 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ 是 f 在 D 中的一个原函数.

Corollary 4.2

设 D 是 \mathbb{C} 中的单连通域, $f \in H(D)$, Φ 是 f 的任一原函数, 那么 $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0)$

Proof 由定理知, 由变上限积分确定的函数 F 是 f 的一个原函数, 因而 $(\Phi(z) - F(z))' = f(z) - f(z) = 0$

故知道 $\Phi(z) - F(z)$ 是一个常数, 因而 $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(z_0) = \Phi(z) - \Phi(z_0)$

Proposition 4.2

设 f 在 z_0 处连续, 证明

$$(1) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = f(z_0)$$

$$(2) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0)$$

Proof 1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $0 < r < \delta$ 时成立 $|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)| < \varepsilon$ 由连续定义可得此时:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)| d\theta < \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta = \varepsilon$$

故1.证毕

2. 考察该式子 $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - f(z_0)$ 此时对于该积分利用参数 $z = z_0 + re^{i\theta}$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta - f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - f(z_0) \text{ 这就转化为1.}$$

复分析讲义

4.3 柯西积分公式

Theorem 4.8 (有界区域型柯西积分公式)

设区域 D 的 ∂D 为周线或复周线 C ; $f(z)$ 在 D 内解析, 在 C 上连续

\Rightarrow 当 $z_0 \in D$; $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$ (显然当 $z_0 \notin D$ 为0)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \dots$$

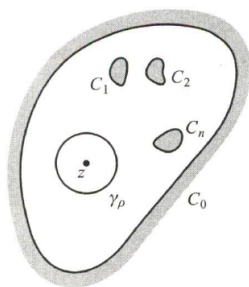


图 4.4

Proof 对于任意固定的 $z \in D$, $F(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ 作为 ξ 的函数在 D 内除了 z 之外均解析

以 z 为圆心充分小半径 ρ 做圆, 使得其含于 D 内, 且也不跟其余 C_1, C_2 等相交。由柯西积分定理我们知道

$$\int_{C_0^+} = \int_{\rho^+} + \int_{C_1^+} + \dots + \int_{C_n^+} \Rightarrow \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (\text{将复杂路线转化为了简单路线})$$

所以 \Leftrightarrow 证 $\int_{\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z)$ 下面进行估计

$$\left| \int_{\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int_{\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_{\rho^+} \frac{1}{\xi - z} d\xi \right| = \left| \int_{\rho^+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| = \left| \int_{\rho^+} \frac{f(\xi) - f(z)}{\rho} d\xi \right|$$

由连续知道 $\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \text{st. } |\xi - z| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ 因而 $LHS < \varepsilon \cdot \frac{1}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$

Theorem 4.9 (全纯函数无穷可微定理)

设 D 为可求长简单闭曲线围成的区域, $f(z) \in H(D) \cap C(\bar{D})$ (该公式可以利用求导直接在积分号下求导记住)

$$\Rightarrow f(z) \text{ 在 } D \text{ 内有任意阶导数 } f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Proof 先证明当 $n = 1$ 时成立

设 $z + h$ ($h \neq 0$) 是 D 内另一点. 只须证明, 当 h 趋近于0时, 下式也趋近于0:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

而利用柯西积分公式我们可以将 $f(z+h)$ 与 $f(z)$ 的函数值利用积分表示

则

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{h \cdot 2\pi i} \left[\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - h \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right] = \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}$$

现在估计上式右边的积分

设以 z 为圆心, 以 $2d$ 为半径的圆盘完全在 D 内, 并且在这圆盘内取 $z+h$, 使得 $0 < |h| < d$

那么当 $\zeta \in C$ 时, $|\zeta - z| > d, |\zeta - z - h| > d$ 设 $|f(z)|$ 在 C 上的一个上界是 M , 并且设 C 的长度是 L . 于是我们有

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{|h|}{2\pi} \cdot \frac{ML}{d^2} \text{ 因此当 } h \rightarrow 0 \text{ 时, 右边的积分 } \rightarrow 0.$$

于是我们完成了 $n = 1$ 的证明

现用数学归纳法完成定理的证明. 假定当 $n = k$ 时成立. 取 z 及 $z+h$ 同上. 那么

$$\frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \left[\frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z - h)^{k+1}} - \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} \right] - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+2}} \\
&= \frac{k!}{2\pi i h} \int_C f(\zeta) \frac{(k+1)(\zeta - z)^k h + h^2 O(1)}{(\zeta - z - h)^{k+1} (\zeta - z)^{k+1}} d\zeta - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+2}} \\
&= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)^{k+1} (\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^{k+2}} \right] d\zeta + \frac{k!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{h O(1)}{(\zeta - z - h)^{k+1} (\zeta - z)^{k+1}} d\zeta
\end{aligned}$$

现在同样设以 z 为圆心, 以 $2d$ 为半径的圆盘完全在 D 内, 并且在这圆盘内取 $z+h$, 使得 $0 < |h| < d$

那么当 $\zeta \in C$ 时, $|\zeta - z| > d, |\zeta - z - h| > d$ 设 $|f(z)|$ 在 C 上的一个上界是 M , 并且设 C 的长度是 L

$$\text{此时 } \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \frac{h O(1)}{(\zeta - z - h)^{k+1} (\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_C M \frac{h O(1)}{d^{2k+2}} d\zeta = \frac{k! M L}{2\pi d^{2k+2}} h \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

$$\left| \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)^{k+1} (\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^{k+2}} \right] d\zeta \right| = \frac{(k+1)!}{2\pi} \int_C M \frac{h O(1)}{d^{2k+3}} d\zeta \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

进而证毕

Corollary 4.3 (柯西型积分的应用计算)

设 D 为可求长简单闭曲线围成的区域, $f(z) \in H(D) \cap C(\bar{D})$ 那么 $\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \times 2\pi i \quad (n \geq 0)$

Corollary 4.4

设 $0 < r < R$ 且 f 在 $B(0, R)$ 中全纯, 证明

$$1. f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta$$

$$2. f(0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z| < r} f(z) dx dy$$

Proof 1. 考察 $2\pi i f(0) = \underbrace{\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz}_{\text{柯西积分公式}} = \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} re^{i\theta} i d\theta$ 证毕

2. 考察 $\iint_{|z| < r} f(z) dx dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) \rho d\theta d\rho = 2\pi f(0) \int_0^r \rho d\rho = \pi r^2 f(0)$ 证毕

Theorem 4.10 (无界区域型柯西积分公式)

设 C 为一简单闭曲线, D 为 C 之外部区域, $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $D \cup C$ 上连续, 又 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A (A \neq \infty)$,

则 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} -A, & z \in C \text{ 的内部,} \\ f(z) - A, & \text{其他.} \end{cases}$ 这里 C^- 的方向为顺时针方向, 对区域 D 来说是正方向.

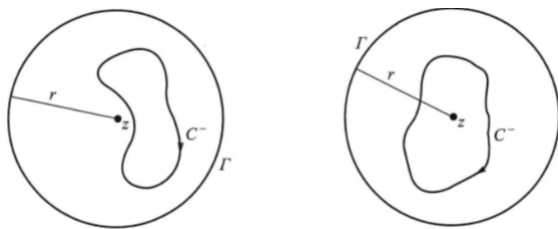


图 4.5

Proof 不论 z 处于如何位置我们总可以以 z 为圆心, 足够大的 $\rho (\rho \rightarrow +\infty)$ 为半径做圆将 C 包围在里面我们将此圆记为 Γ_ρ

那么由柯西积分公式我们会有 $\begin{cases} 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi & z \in C \text{ 曲线内部} \\ f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi & z \in C \text{ 曲线外部} \end{cases}$

我们根据上式就可以得到 $\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi & z \in C \text{ 曲线内部} \\ f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi & z \in C \text{ 曲线外部} \end{cases}$

那么我们接下来只需证明 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = A$ $z \in C$ 曲线内部。我们做估计

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - A \right| = \underbrace{\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - 2\pi i A \right|}_{\text{应用 } 2\pi i = \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{1}{\xi - z} d\xi} = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(\xi) - A}{\xi - z} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{|f(\xi) - A|}{|\xi - z|} |d\xi| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon$$

应用题目条件 $\xi \rightarrow \infty, f(\xi) \rightarrow A$

至此证毕

Proposition 4.3

设 $f(x)$ 在有界闭区域 \bar{D} 上解析, γ 是 \bar{D} 的边界, z 与 z_0 是 D 内两点, 求证

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{z - z_0}{(\xi - z)(\xi - z_0)^2} f(\xi) d\xi.$$

Proof 将右边式子进行有理化拆分即可

Proposition 4.4

设

- (1) 区域 D 是有界区域, 其边界是周线或复周线 C
- (2) 函数 $f_1(z)$ 及 $f_2(z)$ 在 D 内解析, 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上连续
- (3) 沿 $C, f_1(z) = f_2(z)$

试证: 在整个闭域 \bar{D} 上, $f_1(z) \equiv f_2(z)$

Proof 在 D 内, 由条件 (1), (2) 知函数满足柯西积分公式的条件, 故在 D 内 $f_1(z) = f_2(z)$

在 C 上, 由条件 (3) 知 $f_1(z) = f_2(z)$. 故在 $\bar{D} = D + C$ 上有 $f_1(z) \equiv f_2(z)$

Definition 4.3 (柯西型积分)

解析函数的无穷可微性

Definition: 设 C 为任意一条简单逐段光滑曲线 (不必闭合), $f(\xi)$ 是在 C 上有定义的可积函数则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (z \notin C) \text{ 称为柯西型积分}$$

$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ 可以用来计算一些周线积分 (但此时 a 是唯一的奇点)

to prove it we should prove some lemmas as follow $F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi; (z \notin L, n = 1, 2, \dots)$

Lemma 4.5

Lemma^{1°}: $F_n(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{C\}$ 上连续

Proof *Proof*: $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{L\}; \forall \varepsilon > 0$; 那么只需要 $z \rightarrow a$ 时, $|F_n(z) - F_n(a)| < \varepsilon$;

下面估计 $F_n(z) - F_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n} - \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^n} d\xi \right]$

$$\frac{1}{(\xi - z)^n} - \frac{1}{(\xi - a)^n} = \frac{z - a}{(\xi - z)(\xi - a)} \left[\frac{1}{(\xi - z)^{n-1}} + \frac{1}{(\xi - z)^{n-2}(\xi - a)} + \dots + \frac{1}{(\xi - z)(\xi - a)^{n-2}} + \frac{1}{(\xi - a)^{n-1}} \right]$$

$\forall \varepsilon > 0$; 取 $\delta > 0$; 取 a 为圆心, $st.U(a, 2\delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{L\}$ (δ 充分小); 那么当 $z \in U^\circ(a, \delta)$; 有 $|\xi - z| \geq \delta; |\xi - a| \geq 2\delta > \delta$;

令 $\max_{\xi \in L} |f(\xi)| = M$ $|F_n(z) - F_n(a)| \leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{|z-a|}{2\delta^2} \cdot \frac{n}{\delta^{n-1}} \cdot l_{\text{曲线长}}$ 从而 $z \rightarrow a$; $|F_n(z) - F_n(a)| < \varepsilon$;

Lemma 4.6

Lemma 2°: 下证 $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$; ($z \notin L, \forall a \in \mathbb{C} \setminus \{C\}$)

Proof Proof: $\frac{F_n(z) - F_n(a)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-a)} \left[\frac{1}{(\xi-z)^{n-1}} + \frac{1}{(\xi-z)^{n-2}(\xi-a)} + \cdots + \frac{1}{(\xi-z)(\xi-a)^{n-2}} + \frac{1}{(\xi-a)^{n-1}} \right] d\xi$ (*)

此时考虑每一项 (比方说第二项) $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-a)} \frac{1}{(\xi-z)^{n-2}(\xi-a)} d\xi \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}}{(\xi-z)^{n-1}} d\xi$

利用上题我们知道 $\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}$ 在 $z \rightarrow a$ 仍连续

那么上式在 $z \rightarrow a$ 时极限就为 $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$; 则 (*) 当 $z \rightarrow a$ 时 $= \frac{n}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$ 即那么 $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$

复分析讲义

4.4 柯西积分公式的推论结果

Theorem 4.11 (解析函数平均值定理)

设 D 区域为圆 $|\xi - z_0| < R$ 的内部

$$\text{若 } f(z) \in H(D) \cap C(\bar{D}) \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi$$

Proof *Proof*: assume $C: |\xi - z_0| < R; \implies \xi - z_0 = Re^{i\varphi} (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \implies d\xi = iRe^{i\varphi} d\varphi$ From Cauchy Integral Formula

$$\implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi}) iRe^{i\varphi} d\varphi}{Re^{i\varphi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi$$

Proposition 4.5 (复零点定理)

设函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq R$ 上解析, $\exists a > 0; \text{st. } |z| = R \text{ 时 } |f(z)| > a; |f(0)| < a \implies f(z)$ 在 $z < R$ 内必定有一个零点

Proof *Proof*: Apogage; 若 $f(z)$ 在其上无零点, 且当 $|z| = R$ 时, $f(z)$ 也不为零; 那么 $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在闭圆 $|z| \leq R$ 上解析
 由解析函数平均值定理 $F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(Re^{i\varphi}) d\varphi$ 而且 $|F(0)| = \frac{1}{|f(0)|} > \frac{1}{a}$ 而且 $|F(Re^{i\varphi})| = \frac{1}{|f(Re^{i\varphi})|} < \frac{1}{a}$

$$\implies \frac{1}{a} \leq |F(0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(Re^{i\varphi}) d\varphi \right| \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{a} \implies \text{矛盾}$$

Theorem 4.12 (柯西不等式 (全纯函数的导数值估计))

设 f 在 $B(a, R)$ 中全纯, 且对任意 $z \in B(a, R)$, 有 $|f(z)| \leq M$, 那么 $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}, n = 1, 2, \dots$

Proof 取 $0 < r < R$, 则 f 在闭圆盘 $\overline{B(a, r)}$ 中全纯, 由得 $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, n = 1, 2, \dots$
 于是得 $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}$ 让 $r \rightarrow R$, 即得所要证的不等式

Theorem 4.13 (Liouville 定理)

有界整函数必为常数.

Proof 设 f 为一有界整函数, 其模的上界设为 M , 即对任意 $z \in \mathbb{C}$, 有 $|f(z)| \leq M$
 任取 $a \in \mathbb{C}$, 以 a 为中心, R 为半径作圆, 因为 f 为整函数, 故由Cauchy不等式可得 $|f'(a)| \leq \frac{M}{R}$
 这个不等式对任意 $R > 0$ 都成立, 让 $R \rightarrow \infty$, 即得 $f'(a) = 0$. 因为 a 是任意的, 所以在全平面上有 $f'(z) \equiv 0$, 因而 f 是常数.

Corollary 4.5

设 $f(z)$ 为非常数的整函数, 又设 R, M 为任意正数. 试证: 满足 $|z| > R$ 且 $|f(z)| > M$ 的 z 必存在.

Corollary 4.6 (刘维尔定理推论)

设 $f(z)$ 是一个整函数, 且假定存在着一个非负整数 n , 以及两个正数 R 与 M , 使当 $|z| \geq R$ 时, $|f(z)| \leq M|z|^n$.
 试证 $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数. 提示估计 $f(z)$ 积分形式的泰勒系数.

Proof 证明: (1) $n > 0$ 时, $f(z)$ 为一个整函数, 故可设 $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_kz^k + \dots (|z| < +\infty)$. 由题设,
 任取 $R_1 \geq R$, 作圆周 $C_{R_1}: |z| = R_1$, 于是 $|a_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right| \leq MR_1^{n-k}$
 当 $k > n$ 时, 令 $R_1 \rightarrow +\infty$, 就有 $a_k = 0 (k = n+1, n+2, \dots)$.
 (2) $n = 0$ 时, 由题意知当 $|z| \leq R$ 时, $f(z)$ 在其上连续, 必有 $|f(z)| \leq M_1$, 从而在 C 上 $|f(z)| \leq \max\{M_1, M\}$,
 由刘维尔定理知 $f(z)$ 为常数.
 综上所述, $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数.

Theorem 4.14 (代数基本定理)

代数基本定理

在 z 平面上 n 次多项式 $p(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_n (a_0 \neq 0)$ 有 n 个零点**Proof Proof**: 反证法. 设 $p(z)$ 在 z 平面上无零点. 由于 $p(z)$ 在 z 平面上是解析的, $\frac{1}{p(z)}$ 在 z 平面上也一定解析下面证明 $\frac{1}{p(z)}$ 有界. 由于 $z \rightarrow \infty$; $p(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n (a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}) = \infty, \Rightarrow \frac{1}{p(z)} = 0$ 故存在充分大的正数 R , 使当 $|z| > R$; $\left| \frac{1}{p(z)} \right| < 1$. 又 $\frac{1}{p(z)}$ 在闭圆 $|z| \leq R$ 上连续. 故 $\frac{1}{p(z)} \leq M$ 从而 $\frac{1}{p(z)}$ 总是在 z 平面上解析有界. 由刘维尔定理知道其必为常数. 矛盾**Theorem 4.15 (Morera 定理)**

Morera定理

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续, 且对 D 内任一周线 C 有 $\int_C f(z) dz = 0 \Rightarrow f(z)$ 在 D 内解析**Proof Proof**: 根据前文定理不妨设 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi (z_0 \in D)$ 在 D 内解析且 $F'(z) = f(z) (z \in D)$ 。但解析函数 $F(z)$ 的解析函数还是解析的 $\Rightarrow f(z)$ 在 D 内解析更具体的 $\forall a \in D, \frac{F(z) - F(a)}{z - a} = \frac{1}{z - a} \left[\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^a f(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{z - a} \int_a^z f(\xi) d\xi$ $\frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) = \frac{1}{z - a} \int_a^z f(\xi) - f(a) d\xi. \forall \varepsilon > 0, f(z)$ 在 a 连续. $\exists \delta > 0, |\xi - a| < \delta; |f(\xi) - f(a)| < \varepsilon$ $\left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| = \left| \frac{1}{z - a} \int_a^z f(\xi) - f(a) d\xi \right| < \varepsilon$ 所以解析且导数为 $f(a)$ **Proposition 4.6**在区域 G 内, 不可能存在同时满足下列条件的函数 $f(z)$: (1) $f(z)$ 在 G 内连续; (2)除了 G 内某一线段 l 上的点处不解析外, $f(z)$ 在 G 内解析**Proof** 利用Morera定理, 取任一可求长闭曲线若闭曲线不包含 l 且与 l 不交, 则由柯西积分定理知道, 线积分为0若闭曲线包含 l 或与 l 相交, 利用 l 进行分割, 并利用柯西积分定理, 内部全纯, 边界连续的版本, 即可知道线积分为零. 因此利用Morera定理知道 f 在 D 上全纯

第5章 全纯函数的泰勒展开

5.1 复级数基本性质

Definition 5.1 (复数项级数的敛散)

对于复数项的无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots$, 令 $s_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ (部分和).

若复数列 $s_n (n = 1, 2, \cdots)$ 以有限复数 s 为极限, 即若 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 则称复数项无穷级数收敛于 s , 且称 s 为级数的和, 写成 $s = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. 若复数列 $s_n (n = 1, 2, \cdots)$ 无有限极限, 则称级数发散.

Theorem 5.1 (复数项级数的柯西收敛准则)

复级数 $\sum \alpha_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n > N$ 且 p 为任何正整数时, $|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon$.

特别, 取 $p = 1$, 则必有 $|\alpha_{n+1}| < \varepsilon$, 即收敛级数的通项必趋于零: $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ (必要条件)

显然, 收敛级数的各项必是有界的. 若级数中略去有限个项, 则所得级数与原级数同为收敛或同为发散.

Definition 5.2 (复数项级数的条件与绝对收敛)

定义若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 称为绝对收敛; 非绝对收敛的收敛级数, 称为条件收敛.

Theorem 5.2

复级数 $\sum \alpha_n$ 收敛的一个充分条件: 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛.

Proof 证由于 $|\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}| \leq |\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+2}| + \cdots + |\alpha_{n+p}|$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ 收敛, 则由定理, 必有 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛

Definition 5.3 (复函数项级数的逐点收敛)

设复函数项级数 $f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$ 的各项均在点集 E 上有定义, 且在 E 上存在一个函数 $f(z)$,

对于 E 上的每一点 z , 级数均收敛于 $f(z)$, 则称 $f(z)$ 为级数的和函数, 记为 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

$\forall \varepsilon > 0$, 以及给定的 $z \in E, \exists N = N(\varepsilon, z), \forall n > N$ 时, 有 $|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon$ 式中 $s_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$.

上述的正整数 $N = N(\varepsilon, z)$

Definition 5.4 (复函数项级数的一致收敛)

对于级数, 如果在点集 E 上有一个函数 $f(z)$, 使对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时, 对一切的 $z \in E$, 均有 $|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon$, 则称级数 (4.2) 在 E 上一致收敛于 $f(z)$.

注根据定义证明级数 (4.2) 在点集 E 上一致收敛于 $f(z)$ 的关键, 是找不依赖于 z 的正整数 N ,

使当 $n > N$ 时, $|f(z) - s_n(z)| < \varepsilon$ 成立

Theorem 5.3 (复函数项级数一致收敛的柯西收敛准则)

(柯西一致收敛准则) 级数在点集 E 上一致收敛于某函数的 \Leftrightarrow

任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $z \in E$, 均有 $|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, \cdots)$.

Theorem 5.4 (复函数项级数的魏尔斯特拉斯判别法)

优级数准则: 如果有正数列 $M_n (n = 1, 2, \dots)$, 使对一切 $z \in E$, 有 $|f_n(z)| \leq M_n (n = 1, 2, \dots)$, 而且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则复函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在点集 E 上绝对收敛且一致收敛:

Definition 5.5

设函数 $f_n(z) (n = 1, 2, \dots)$ 定义于区域 D 内, 若级数 $\sum f_n(z)$ 在 D 内任一紧集上一致收敛, 则称此级数在 D 内内闭一致收敛.

Corollary 5.1

紧集可以换为以 D 中任一点为圆心且含于 D 中的圆盘上收敛即可

Theorem 5.5

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 E 上一致收敛到 $f(z)$, 若每个 $f_n \in C(E) \implies f \in C(E)$

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 且每个 $f_n \in C(E) \implies \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$ (逐项积分)

Definition 5.6

如果 D 的子集 G 满足

- (1) $\bar{G} \subset D$
- (2) \bar{G} 是紧的, 就说 G 相对于 D 是紧的, 记为 $G \subset\subset D$

Lemma 5.1

设 E 是紧集, F 是闭集, 且 $E \cap F = \emptyset$, 则 $d(E, F) > 0$

Proof 任取 $a \in E$, 则 $a \notin F$, 所以 $d(a, F) > 0$

今以 a 为中心, $\frac{1}{2}d(a, F)$ 为半径作一圆盘, 当 a 跑遍集 E 时, 这些圆盘所组成的开集族就是 E 的一个开覆盖

因为 E 是紧的, 故从这个开覆盖中能选出有限个开集 G_1, \dots, G_n 来覆盖 E , 其中 $G_j = B\left(a_j, \frac{1}{2}d(a_j, F)\right), j = 1, \dots, n$

记 $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}d(a_1, F), \dots, \frac{1}{2}d(a_n, F)\right\}$

今任取 $z_1 \in E$, 则必有某个 G_j , 使得 $z_1 \in G_j$, 因而 $|z_1 - a_j| < \frac{1}{2}d(a_j, F)$

任取 $z_2 \in F$, 当然 $|z_2 - a_j| \geq d(a_j, F)$, 于是

$|z_1 - z_2| \geq |z_2 - a_j| - |z_1 - a_j| \geq d(a_j, F) - \frac{1}{2}d(a_j, F) = \frac{1}{2}d(a_j, F) \geq \delta$

所以 $d(E, F) = \inf\{|z_1 - z_2| : z_1 \in E, z_2 \in F\} \geq \delta > 0$

Lemma 5.2

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, K 是 D 中的紧子集, 且包含在相对于 D 是紧的开集 G 中, 即 $K \subset G \subset\subset D$

那么对任意 $f \in H(D)$, 均有 $\sup\{|f^{(k)}(z)|, z \in K\} \leq C \sup\{|f(z)| : z \in G\}$

这里, k 是任意自然数, C 是与 k, K, G 有关的常数

Proof 由 $\rho = d(K, \partial G) > 0$ 所以, 以 K 中任意点 a 为中心, ρ 为半径的圆盘都包含在 G 中

对圆盘 $B(a, \rho)$ 用 Cauchy 不等式, 得 $|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in B(a, \rho)\} \leq \frac{k!}{\rho^k} \sup\{|f(z)| : z \in G\}$

对 K 中的 a 取上确界, 即得不等式

Theorem 5.6 (Weierstrass 定理)

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, 如果

(1) $f_n \in H(D), n = 1, 2, \dots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$

那么 (1) $f \in H(D)$; (2) 对任意自然数 $k, \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$

Proof 任取 $z_0 \in D$, 只要证明 f 在 z_0 的一个邻域中全纯就行了

选取 $r > 0$, 使得 $\overline{B(z_0, r)} \subset D$, 由前文定理易知 f 在 $B(z_0, r)$ 中连续

在 $B(z_0, r)$ 中任取一可求长闭曲线 γ , 由前文定理与柯西积分定理, 得
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0$$

由Morera定理, 即知 f 在 $B(z_0, r)$ 中全纯, 所以 f 在 D 中全纯

为了证明第二个结论, 任取 D 中的紧子集 K , 记 $\rho = d(K, \partial D) > 0$

令 $G = \bigcup \left\{ B\left(z, \frac{\rho}{2}\right), z \in K \right\}$ 则 $K \subset G \subset\subset D$. 由于 \bar{G} 是紧集, 所以利用条件2有
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$
在 \bar{G} 上一致收敛到 $f(z)$

因而 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 不等式 $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 对 \bar{G} 上所有的 z 成立, 这里, $S_n(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z)$

于是由引理对任意的自然数 k , 有
$$\sup \left\{ \left| S_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) \right| : z \in K \right\} \leq C \sup \left\{ |S_n(z) - f(z)| : z \in G \right\} \leq C\varepsilon$$

这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 K 上一致收敛到 $f^{(k)}(z)$

由于 K 是 D 的任意紧子集, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$

Proof 为了证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$

由覆盖定理, 只须证明在 D 中以任一点为心且含在 D 内的一个圆盘内, 这级数一致收敛

设 $z_0 \in D$. 作闭圆盘 $\bar{B} = \{z : |z - z_0| \leq 2r\} \subset D (r > 0)$. 令 $B' = \{z : |z - z_0| < r\}$

于是 $\forall z \in B'$, 对任意正整数 n 及 k , 有

$$f_{n+1}^{(k)}(z) + f_{n+2}^{(k)}(z) + \dots + f_{n+p}^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial \bar{B}} \frac{f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \dots + f_{n+p}(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

由于 $\sum f_n(z)$ 在 \bar{B} 上一致收敛, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N$ 及 $p = 1, 2, \dots$, 上列积分中被积函数的分子的模小于 ε

由此得 $\forall z \in B', \forall n > N, p = 1, 2, \dots$ 时

$$\left| f_{n+1}^{(k)}(z) + f_{n+2}^{(k)}(z) + \dots + f_{n+p}^{(k)}(z) \right| < \frac{k!}{2\pi r^{k+1}} \varepsilon \text{ 证毕}$$

Corollary 5.2

若 $f_n(z) (n = 1, 2, \dots)$ 在区域 D 内都全纯, 且 $\{f_n(z)\}$ 在 D 上内闭一致收敛到 $\varphi(z)$ 则

1. $\varphi(z)$ 在 D 中全纯 2. $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ 成立 $\varphi^{(k)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z)$ 且是内闭一致收敛的

Proof 令 $g_1 = f_1$ $g_n = f_n - f_{n-1} (n \geq 2)$ 利用级数版本即可

Proposition 5.1

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ 收敛 (运用柯西收敛准则与基础知识的放缩)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 一致收敛 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ 一致收敛 (运用柯西收敛准则与基础知识的放缩)
3. 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k \right\}$ 有界, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛
4. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 是复数项级数, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$ 则若 $q < 1$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛 若 $q > 1$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散
5. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 是复数项级数其中 $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = q$ 则若 $q < 1$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛 若 $q > 1$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 未定
 (未定可举例为 $z_{2n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}$, $z_{2n} = \frac{1}{z^n}$ 举例实级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 2^n)$)
6. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 是复数项级数其中 $z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left| \frac{z_n}{z_{n+1}} \right| - 1 \right) > 1$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛

Proposition 5.2

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 其中 a_n 为实数列, b_n 为复数列
1. a_n 单调且趋于零 2. b_n 的部分和有界 \implies 收敛
 1. a_n 单调有界 2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 \implies 收敛
- 称之为复数域上的狄利克雷判别法与 *abel* 判别法同样可以推广到函数项级数

5.2 幂级数

Definition 5.7

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

如果存在常数 R , 使得当 $|z| < R$ 时, 级数收敛; 当 $|z| > R$ 时, 级数发散, 就称 R 为级数的收敛半径, $\{z : |z| < R\}$ 称为级数的收敛圆.

Theorem 5.7

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 存在收敛半径 $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Proof 我们要证明下列三件事

(1) 当 $R = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在 $z = 0$ 处收敛

(2) 当 $R = \infty$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 \mathbb{C} 中处处收敛

(3) 当 $0 < R < \infty$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中收敛, 在 $\{z : |z| > R\}$ 中发散

先证 (1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = 0$ 处收敛是显然的

现固定 $z \neq 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 故必有子列 n_k , 使得 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z|}$, 于是 $|a_{n_k} z^{n_k}| > 1$. 所以, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散

再证 (2) 任取 $z \neq 0$, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2|z|}$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z|}$

于是 $|a_n z^n| < \frac{1}{2^n}$. 所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛.

最后证 (3) 取定 $z \neq 0, z \in B(0, R)$. 选取 ρ , 使得 $|z| < \rho < R$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}$, 因而存在 N , 当 $n > N$ 时, $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$, 即 $|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$

再设 $|z| > R$, 选取 r , 使得 $|z| > r > R$ 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > \frac{1}{r}$, 故有 $\{n_k\}$, 使得 $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{r}$

即 $|a_{n_k} z^{n_k}| > \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n_k} > 1$. 故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 发散.

Theorem 5.8 (Abel 第一定理)

如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = z_0 \neq 0$ 处收敛, 则必在 $\{z : |z| < |z_0|\}$ 中内闭绝对一致收敛

这就说明幂级数在收敛圆内是内闭绝对一致收敛的

Proof 设 K 是 $\{z : |z| < |z_0|\}$ 中的一个紧集, 选取 $r < |z_0|$, 使得 $K \subset B(0, r)$

于是, 当 $z \in K$ 时, 有 $|z| < r$. 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 收敛, 所以 $|a_n z_0^n| < M$, 这里, M 是一个常数

于是, 当 $z \in K$ 时, 有 $|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq M \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$

因为 $r < |z_0|$, 所以由 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ 在 K 中一致收敛.

Theorem 5.9

幂级数在其收敛圆内确定一个全纯函数

Proof 证由 *abel* 第一定理知道, 幂级数在其收敛圆内是内闭一致收敛的. 根据 *Weierstrass* 定理, 它的和函数是收敛圆内的全纯函数

Note 幂级数在其收敛圆周上的收敛性如何呢? 从下面这些例子可以看出, 它在收敛圆周上的情况是不确定的

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处发散

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处收敛

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 它在 $z=1$ 处是发散的, 但在收敛圆周的其他点 $z=e^{i\theta}$ ($0 < \theta < 2\pi$) 处则是收敛的

是因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ 由 *Dirichlet* 判别法知道, 实部和虚部的两个级数都是收敛的.

Note 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R

和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 是圆盘 $B(z_0, R)$ 中的全纯函数. 再由 *Weierstrass* 定理

得 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z-z_0)^{n-k}$

现若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 在收敛圆周 $|z-z_0|=R$ 上某点 ζ 处收敛, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta-z_0)^n$ 和 f 有什么关系呢?

为了简化问题的讨论, 作变换 $w = \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta-z_0)^n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$

这里, $b_n = a_n (\zeta-z_0)^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{|\zeta-z_0|} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{R} \cdot R = 1$ 且在 $w=1$ 处收敛

因此, 不妨就收敛半径为 1, 且在 $z=1$ 处收敛的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 来讨论.

Definition 5.8

设 g 是定义在单位圆中的函数, $e^{i\theta_0}$ 是单位圆周上一点, $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 如图所示, 其中 $\alpha < \frac{\pi}{2}$

如果当 z 在 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 中趋于 $e^{i\theta_0}$ 时, $g(z)$ 有极限 l , 就称 g 在 $e^{i\theta_0}$ 处有非切向极限 l , 记为 $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} \lim_{z \in S_\alpha(e^{i\theta_0})} g(z) = l$.

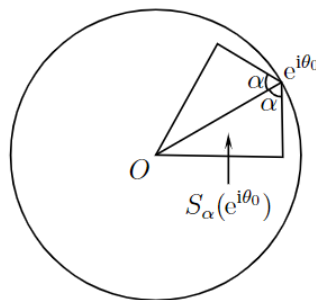


图 5.1

Theorem 5.10 (Abel 第二定理)

设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R = 1$, 且在 $z = 1$ 处收敛于 S , 那么 f 在 $z = 1$ 处有非切向极限 S , 即 $\lim_{z \rightarrow 1} \lim_{z \in S_\alpha(1)} f(z) = S$

Proof 证如图所示, 只要能证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $S_\alpha(1) \cap B(1, \delta)$ (这里, $\delta = \cos \alpha$) 的闭包上一致收敛, 那么 $f(z)$ 便在 $z = 1$ 处连续因而所求式成立

记 $\sigma_{n,p} = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = 1$ 处收敛, 即 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, $|\sigma_{n,p}| < \varepsilon$ 对任意自然数 p 成立

$$\begin{aligned} & a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_{n+p}z^{n+p} \\ &= \sigma_{n,1}z^{n+1} + (\sigma_{n,2} - \sigma_{n,1})z^{n+2} + \cdots + (\sigma_{n,p} - \sigma_{n,p-1})z^{n+p} \\ &= \sigma_{n,1}z^{n+1}(1-z) + \sigma_{n,2}z^{n+2}(1-z) + \cdots + \sigma_{n,p-1}z^{n+p-1}(1-z) + \sigma_{n,p}z^{n+p} \\ &= z^{n+1}(1-z)(\sigma_{n,1} + \sigma_{n,2}z + \cdots + \sigma_{n,p-1}z^{p-2}) + \sigma_{n,p}z^{n+p} \end{aligned}$$

因而当 $|z| < 1, p = 1, 2, \cdots, n > N$ 时, 便有

$$|a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_{n+p}z^{n+p}| < \varepsilon|1-z|(1+|z|+\cdots) + \varepsilon = \varepsilon \left(\frac{|1-z|}{1-|z|} + 1 \right)$$

现在任取 $z \in S_\alpha(1) \cap B(1, \delta)$, 记 $|z| = r, |1-z| = \rho$, 那么 $r^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos \theta$

$$\text{故有 } \frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{\rho}{1-r} = \frac{\rho(1+r)}{1-r^2} \leq \frac{2\rho}{2\rho \cos \theta - \rho^2} = \frac{2}{2 \cos \theta - \rho}.$$

因为 $z \in B(1, \delta)$, 所以 $\rho = |1-z| < \delta = \cos \alpha$. 又因 $\theta < \alpha$, 所以 $\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2 \cos \alpha - \rho} < \frac{2}{\cos \alpha}$.

便可得 $|a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_{n+p}z^{n+p}| < \varepsilon \left(\frac{2}{\cos \alpha} + 1 \right)$

又当 $z = 1$ 时, 有 $|a_{n+1}z^{n+1} + \cdots + a_{n+p}z^{n+p}| = |\sigma_{n,p}| < \varepsilon$

这样, 我们就证明了级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $S_\alpha(1) \cap B(1, \delta)$ 的闭包上一致收敛, 因而式成立

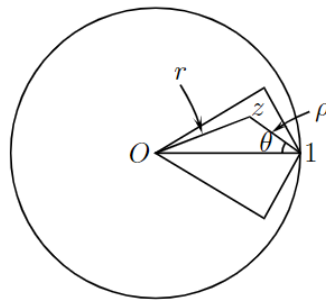


图 5.2

Corollary 5.3

若幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在多角形域 G 的每个顶点处都收敛, 则它必在 \bar{G} 上一致收敛. 特别地, f 在 \bar{G} 上连续.

Proposition 5.3

1. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处绝对收敛, 则它在 $\overline{B(0, |z_0|)}$ 上绝对一致收敛

$$\left(|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z^n}{z_0^n} \right| \right)$$

2. 设正数列 $\{a_n\}$ 单调收敛于零. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\partial B(0, R) \setminus \{R\}$ 上处处收敛

3. 若 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是 $B(0, 1)$ 上的有界全纯函数, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

4. 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 将 $B(0, R)$ 一一地映为域 G . 证明: G 的面积为 $\pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}$.

5. 证明: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 在域 D 上一致收敛, 当且仅当它在 \bar{D} 上一致收敛.

Proof 3. 任取 $0 < r < 1$ 由于

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \overline{f(re^{i\theta})} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} d\theta$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$$

$$= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \text{ 由于 } f \text{ 有界, 从而 } \exists M > 0, |f(z)| \leq M, z \in B(0, 1)$$

$$\text{故 } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M^2 < +\infty \text{ 令 } r \rightarrow 1^-, \text{ 得 } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq M^2 < +\infty$$

5.3 全纯函数的 Taylor 展开

5.3.1 全纯函数的 Taylor 展开表达

Theorem 5.11 (泰勒定理)

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $a \in D$, 只要圆 $K: |z - a| < R$ 含于 D , 则 $f(z)$ 在 K 内能展成幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$

其中系数 $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ (C 为包含了 a 的简单闭曲线, 且 C 含在 K 里面), 且展式是惟一的.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

Proof 设 z 为 K 内任意取定的点, 总有一个圆周 $\Gamma_\rho: |\zeta - a| = \rho$ ($0 < \rho < R$), 使点 z 含在 Γ_ρ 的内部.

由柯西积分公式得 $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$.

$$\text{此时 } \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} \text{ 且 } \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1$$

$$\text{利用几何级数 } \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} \Rightarrow \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

$$\text{此时 } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta$$

接下来去证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta)$ 该在 Γ_ρ 上一致收敛这样积分与求和号可以交换次序

因为 $\frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta) = \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}$ 且因为 f 在 Γ_ρ 上连续故记 $M = \sup \{|f(\zeta)| \mid \zeta \in \Gamma_\rho\}$

$$\Rightarrow \left| \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta) \right| \leq \frac{M}{\rho} \left| \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n} \right| < \frac{M}{\rho} \left| \frac{z - a}{\rho} \right|^n \text{ 其中 } \left| \frac{z - a}{\rho} \right| < 1$$

上式右端就为一个收敛的级数, 由魏尔斯特拉斯判别法 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta)$ 该在 Γ_ρ 上一致收敛

所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right) (z - a)^n \right]$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ 且 } c_n = \int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

且若有另外的展开式 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - a)^n$ ($z \in K: |z - a| < R$).

利用幂级数的魏尔斯特拉斯叙述逐项求导可以得到 $c'_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n$ ($n = 0, 1, \dots$)

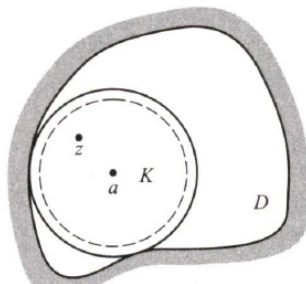


图 5.3

Theorem 5.12

f 在点 z_0 处全纯的充分必要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以展开成幂级数: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

Remark 泰勒定理我们经过观察我们知道仅限 z 在 Γ_ρ 内部成立, 而 Γ_ρ 又只需要在 $f(z)$ 的解析区域 D 内即可. 故定理在以 a 为圆心通过与 a 最为接近的 $f(z)$ 奇点的内部均成立

Theorem 5.13 (幂级数的和函数在收敛圆周上的情况)

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 且 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ($z \in K: |z-a| < R$), 则 $f(z)$ 在收敛圆周 $C: |z-a| = R$ 上至少有一奇点, 即不可能有这样的函数 $F(z)$ 存在, 它在 $|z-a| < R$ 内与 $f(z)$ 恒等, 而在 C 上处处解析.

Proof 假若这样的 $F(z)$ 存在, 这时 C 上的每一点就都是某圆 O 的圆心, 而在圆 O 内 $F(z)$ 是解析的. 根据有限覆盖定理, 我们就可以在这些圆 O 中选取有限个圆将 C 覆盖了. 这有限个圆构成一个区域 G , 用 $\rho > 0$ 表示 C 到 G 的边界的距离. 于是, $F(z)$ 在较大同心圆 $K': |z-a| < R + \rho$ 内是解析的. 于是 $F(z)$ 在 K' 中可展开为泰勒级数. 但因在 $|z-a| < R$ 中 $F(z) \equiv f(z)$, 故在 $z = a$ 处它们以及各阶导数有相同的值,

因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 也是 $F(z)$ 的泰勒级数, 而它的收敛半径不会小于 $R + \rho$, 这与假设矛盾.

Corollary 5.4

设 $f(z)$ 在点 a 解析, b 是 $f(z)$ 的奇点中距 a 最近的一个奇点, 则 $|b-a| = R$ 即为 $f(z)$ 在点 a 的邻域内的幂级数展式 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径.

Remark 注 (1) 纵使幂级数在其收敛圆周上处处收敛, 其和函数在收敛圆周上仍然至少有一个奇点.

例如, $f(z) = \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \cdots + \frac{z^n}{n^2} + \cdots$, 由知其收敛半径 $R = 1 > 0$,

而在圆周 $|z| = 1$ 上级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收敛的, 所以原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在收敛圆周 $|z| = 1$ 上是处处绝对收敛的;

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z| \leq 1$ 上绝对且一致收敛

但 $f'(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{n} + \cdots$ ($|z| < 1$), 当 z 沿实轴从单位圆内趋于 1 时, $f'(z)$ 趋于 ∞ , 所以 $z = 1$ 是 $f(z)$ 的一个奇点.

Definition 5.9

设 f 在 z_0 点全纯且不恒为零, 如果 $f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$ 则称 z_0 是 f 的 m 阶零点

Lemma 5.3

z_0 为 f 的 m 阶零点 $\iff f$ 在 z_0 的邻域内可以表示为 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ 这里, g 在 z_0 点全纯, 且 $g(z_0) \neq 0$

Proof 证如果 z_0 是 f 的 m 阶零点, 则从 f 的 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\
 &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\
 &= (z - z_0)^m \left\{ \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \cdots \right\} \\
 &= (z - z_0)^m g(z)
 \end{aligned}$$

这里, $g(z)$ 就是花括弧中的幂级数, 它当然在 z_0 处全纯, 而且 $g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. 反之, 如果表达式成立, f 当然在 z_0 处全纯, 通过直接计算即知 z_0 是 f 的 m 阶零点.

5.3.2 全纯函数的零点孤立性与唯一性定理

Lemma 5.4

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f \in H(D)$, 如果 f 在 D 中的小圆盘 $B(z_0, \varepsilon)$ 上恒等于零, 那么 f 在 D 上恒等于零

Proof 在 D 中任取一点 a , 我们证明 $f(a) = 0$

用 D 中的曲线 γ 连接 z_0 和 a , 由引理知道 $\rho = d(\gamma, \partial D) > 0$

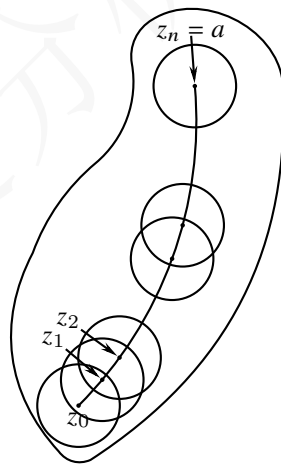
在 γ 上依次取点 $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = a$, 使得 $z_1 \in B(z_0, \varepsilon)$, 其他各点之间的距离都小于 ρ , 作圆盘 $B(z_j, \rho), j = 1, \dots, n$

由于 f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中恒为零, 所以 $f^{(n)}(z_1) = 0, n = 0, 1, \dots$

于是, f 在 $B(z_1, \rho)$ 中的 Taylor 展开式的系数全为零, 所以 f 在 $B(z_1, \rho)$ 中恒为零

由于 $z_2 \in B(z_1, \rho)$, 所以 $f^{(n)}(z_2) = 0, n = 0, 1, \dots$, 用同样的方法推理, f 在 $B(z_2, \rho)$ 中恒为零

再往下推, 即知 f 在 $B(a, \rho)$ 中恒为零, 所以 $f(a) = 0$



Theorem 5.14 (全纯函数的零点孤立性定理)

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f \in H(D), f(z) \neq 0$, 那么 f 在 D 中的零点是孤立的

即若 z_0 为 f 的零点, 则必存在 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon)$, 使得 f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中除了 z_0 外不再其他的零点

Proof 由引理知, f 在 z_0 的邻域中不能恒等于零

此时断言 $f^{(n)}(z_0)$ 不能全为零否则用泰勒展开式得到 f 在 z_0 的邻域中恒等于零

故不妨设 z_0 为 f 的 m 阶零点. f 在 z_0 的邻域中可表示为 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$

因 g 在 z_0 处连续, 且 $g(z_0) \neq 0$, 故存在 z_0 的邻域 $B(z_0, \varepsilon)$, 使得 g 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中处处不为零

因而 f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中除了 z_0 外不再其他的零点.

Theorem 5.15 (唯一性定理)

设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f_1, f_2 \in H(D)$

如果存在 D 中的点列 $\{z_n\}$, 使得 $f_1(z_n) = f_2(z_n), n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in D$, 那么在 D 中有 $f_1(z) \equiv f_2(z)$
(上述点列的条件常常应用中加强为在一个子区域或者弧上相等)

Proof 令 $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$, 则 $g(z_n) = 0, n = 1, 2, \dots$

由于 $g \in H(D)$, 所以 $g(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = 0$, 即 a 是 g 的一个零点. 由于 $\{z_n\}$ 也是 g 的零点, 而且 $z_n \rightarrow a$, 因而零点 a 不是孤立的. 由全纯函数零点孤立性定理的逆否形式, 得 $g(z) \equiv 0$, 即 $f_1(z) \equiv f_2(z)$

Proposition 5.4

必须注意, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, a \in D$ 这个条件是不能去掉的, 否则结果不成立

例如 $f(z) = \sin \frac{1}{1-z}$ 在单位圆盘中全纯, 令 $z_n = 1 - \frac{1}{n\pi}$ 则 $f(z_n) = 0, n = 1, 2, \dots$ 但 $f(z) \not\equiv 0$, 原因是 $z_n \rightarrow 1$, 而 1 不在单位圆盘中

Note 以下给出一些常用函数的泰勒展开式

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (|z| < +\infty).$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < +\infty)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty)$$

$$[\ln(1+z)]_k = 2k\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad (|z| < 1; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \dots \quad (|z| < 1).$$

Theorem 5.16

设幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 所表示的和函数 $f(z)$ 在其收敛圆周上只有唯一的一阶极点 z_0

试证: $\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow z_0$, 因而 $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \rightarrow |z_0|$ ($|z_0| = r$ 是收敛半径)

Proof 由题意可知, $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内的洛朗展开式可设为 $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ($c_{-1} \neq 0$). 令 $g(z) = f(z) - \frac{c_{-1}}{z - z_0}$

因为 $f(z)$ 与 $\frac{c_{-1}}{z - z_0}$ 在 $|z| \leq r$ 上除去 z_0 外解析, 所以 $g(z)$ 在 $|z| \leq r$ 上除去 z_0 外解析. 又由式可知 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在 z_0 的邻域内解析

故 $g(z)$ 在 $|z| \leq r$ 上解析. 函数 $g(z)$ 在 $|z| < r$ 内的泰勒展开式为 (间接法, 利用 $f(z)$ 与 $\frac{c_{-1}}{z - z_0}$ 的展开式) $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + c_{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{n+1}} z^n$

而直接法又给出 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \xrightarrow{\text{定义}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, 从而 $b_n = a_n + \frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}}$ 或 $a_n = b_n - \frac{c_{-1}}{z_0^{n+1}}$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0 \left(\frac{b_n z_0^n - \frac{c_{-1}}{z_0}}{b_{n+1} z_0^{n+1} - \frac{c_{-1}}{z_0}} \right)$

因为 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 在 $|z| \leq r$ 上解析, 所以当 $z = z_0$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n$ 是收敛的, 一般项 $b_n z_0^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

故由式知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$.

5.4 辐角原理与 Rouché 定理及其应用

5.4.1 辐角原理与 Rouché 定理

Theorem 5.17

设 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, γ 是 D 中一条可求长的简单闭曲线, γ 的内部位于 D 中

如果 f 在 γ 上没有零点, 在 γ 内部的全部零点设为 a_1, a_2, \dots, a_n 它们的阶数分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 那么

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

Proof 证取充分小的 $\varepsilon > 0$, 作圆盘 $B(a_k, \varepsilon), k = 1, \dots, n$, 使得这 n 个圆盘都在 γ 内部, 且两两不相交

于是, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $D \setminus \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \varepsilon)$ 中全纯. 应用多连通域的 Cauchy 积分定理得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

其中, $\gamma_k = \partial B(a_k, \varepsilon), k = 1, \dots, n$

因为 a_k 是 f 的 α_k 阶零点与零点孤立性知道, f 在 a_k 的邻域中可以写成 $f(z) = (z - a_k)^{\alpha_k} g_k(z)$

这里, g_k 在 a_k 的邻域中全纯, 且 $g_k(a_k) \neq 0$, 且 $g_k(z)$ 在 $B(a_k, \varepsilon)$ 上无零点. 于是

$$f'(z) = \alpha_k (z - a_k)^{\alpha_k - 1} g_k(z) + (z - a_k)^{\alpha_k} g_k'(z) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha_k}{z - a_k} + \frac{g_k'(z)}{g_k(z)}$$

因为 $\frac{g_k'}{g_k}$ 在 $\overline{B(a_k, \varepsilon)}$ 中全纯, 于是由 Cauchy 积分定理与经典积分得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \alpha_k, k = 1, \dots, n$$

把它代入 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \dots + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 即可

Note 上述定理有明确的几何意义. 我们先作一个自然的约定: 如果 a 是 f 的 m 阶零点, 我们就把 a 看成是 f 的 m 个重合的 1 阶零点. 这样, 定理等式右边就表示 f 在 γ 内部的零点个数的总和, 我们记之为 N .

于是可写为 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N$

设 Γ 是 w 平面上一段不通过原点的连续曲线, 它的方程记为 $w = \lambda(t), a \leq t \leq b$

对于每个 t , 选取 $\lambda(t)$ 的一个辐角 $\theta(t)$, 使得 $\theta(t)$ 是 t 的连续函数

我们称 $\theta(b) - \theta(a)$ 为 w 沿曲线 Γ 的辐角的变化, 记为 $\Delta_{\Gamma} \text{Arg} w = \theta(b) - \theta(a)$

今设 Γ 是一条不通过原点的可求长简单闭曲线, 显然有 $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg} w = \begin{cases} 1, & \text{如果原点在 } \Gamma \text{ 内部;} \\ 0, & \text{如果原点不在 } \Gamma \text{ 内部.} \end{cases}$

另一方面, 我们早就知道 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw = \begin{cases} 1, & \text{如果原点在 } \Gamma \text{ 内部;} \\ 0, & \text{如果原点不在 } \Gamma \text{ 内部.} \end{cases}$

于是得到 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg} w$

一般来说, 当 Γ 是一条不通过原点的任意可求长闭曲线时, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w}$ 等于 Γ 绕原点的圈数, 称为 Γ 关于原点的环绕指数

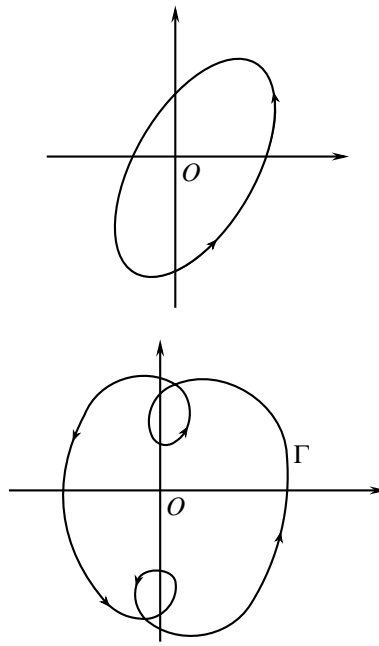
因而 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \text{Arg} w$ 式对于一般的不通过原点的可求长闭曲线都是成立的

现在让 z 在 z 平面上沿曲线 γ 的正方向走一圈, 相应的函数 $w = f(z)$ 的值在 w 平面上画出一条相应的闭曲线 Γ

我们有 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg} f(z)$

由此可知, 积分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 就表示当 z 沿着 γ 的正方向走一圈时, 函数 $f(z)$ 在 Γ 上的辐角变化再除以 2π

我们得到 $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \text{Arg} f(z) = N$ 由此即得下面的定理

**Theorem 5.18 (辐角原理)**

设 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, γ 是 D 中的可求长简单闭曲线, γ 的内部位于 D 中. 如果 f 在 γ 上没有零点, 那么当 z 沿着 γ 的正方向转动一圈时, 函数 $f(z)$ 在相应的曲线 Γ 上绕原点转动的总圈数恰好等于 f 在 γ 内部的零点的个数.

Theorem 5.19 (Rouché 定理)

设 $f, g \in H(D) \cap C(\bar{D})$, γ 是 D 中可求长的简单闭曲线, γ 的内部位于 D 中. 如果当 $z \in \gamma$ 时, 有不等式 $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ 那么 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同 (或者是在曲线上有 $|f(z)| > |\varphi(z)|$ 则在曲线内部 $f + \varphi$ 与 f 零点个数相同).

Proof 证式知道, f 和 g 在 γ 上都没有零点. 用 $|f(z)|$ 去除式的两端, 得 $\left|1 - \frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$

若记 $w = \frac{g}{f}$, 则有 $|w - 1| < 1$. 这说明当 z 在 γ 上变动时, w 落在以 1 为中心, 半径为 1 的圆内, 因而 $\Delta_\gamma \text{Arg} w = 0$ 即 $\Delta_\gamma \text{Arg} f(z) = \Delta_\gamma \text{Arg} g(z)$ 由辐角原理即知 f 和 g 在 γ 内部的零点个数相同.

5.4.2 分歧覆盖, 开映射, 与单叶全纯函数性质, Hurwitz**Theorem 5.20 (分歧覆盖定理)**

设 f 是域 D 中的全纯函数, $z_0 \in D$, 记 $w_0 = f(z_0)$, 如果 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点, 那么对于充分小的 $\rho > 0$, 必存在 $\delta > 0$ 使得 $\forall a \in B(w_0, \delta)$ 成立 $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个一阶零点.

Proof 根据全纯函数零点的孤立性, 必存在充分小的 $\rho > 0$, 使得 $f(z) - w_0$ 在 $\overline{B(z_0, \rho)}$ 中除 z_0 外没有其他的零点.

记 $\min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = \rho\} = \delta > 0$

于是当 z 位于圆周 $|z - z_0| = \rho$ 上时, $|f(z) - w_0| \geq \delta$

今任取 $a \in B(w_0, \delta)$, 则当 z 在圆周 $|z - z_0| = \rho$ 上时, 有 $|f(z) - w_0| \geq \delta > |w_0 - a|$.

若记 $F(z) = f(z) - w_0$, $G(z) = f(z) - a$, 则可写成 $|F(z)| > |F(z) - G(z)|$

由 Rouché 定理, F 和 G 在 $B(z_0, \rho)$ 中的零点个数相同, 因而 $G(z) = f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个零点.

下说明这些零点都是一阶的.

若 $m = 1$ 此时 $f'(z_0) \neq 0$ 于是存在 z_0 的一个邻域 $B(z_0, \delta_1)$ 使得在内部 $f'(z) \neq 0$

于是我们就在 $B(z_0, \delta_1)$ 与 $\overline{B(z_0, \rho)}$ 更小的邻域上讨论即可, 此时 $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 1 个一阶零点
绝对不会是大于等于二阶否则与 $f'(z) \neq 0$ 矛盾

若 $m \geq 2$, 故 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点, 此时可以说 $\overline{B(z_0, \rho)}$ 上不可能 $f'(z) \equiv 0$ 否则 $f(z) \equiv c$
 $f^{(n)}(z_0) \equiv 0 (\forall n)$ 与已知 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点矛盾, 故我们在 $\overline{B(z_0, \rho)}$ 可以使用零点孤立性定理
使得在 $B(z_0, \delta_2)$ 上 $f'(z)$ 除了 z_0 外无任何零点, 这时 $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个一阶零点只能为一阶

Corollary 5.5

设 $f \in H(D), z_0 \in D, w_0 = f(z_0)$, 则对充分小的 $\rho > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 使得 $f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta)$.

Theorem 5.21 (保域定理 (开映射定理))

设 f 是域 D 上非常数的全纯函数, 那么 $f(D)$ 也是 \mathbb{C} 中的域

Proof 我们证明 $f(D)$ 是 \mathbb{C} 中的连通开集. 先证 $f(D)$ 是开集

任取 $w_0 \in f(D)$, 由分歧覆盖定理知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $B(w_0, \delta) \subset f(D)$, 这说明 w_0 是 $f(D)$ 的内点, 所以 $f(D)$ 是开集

再证 $f(D)$ 是连通的. 任取 $w_1, w_2 \in f(D)$, 则存在 $z_1, z_2 \in D$, 使得 $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$

因为 D 是连通的, 故在 D 中存在连续曲线 $z = \gamma(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 连接 z_1 和 z_2

于是 $w = f(\gamma(t)) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 是 $f(D)$ 中连接 w_1, w_2 的曲线, 因而 $f(D)$ 是连通的

Theorem 5.22

如果 f 是域 D 中单叶的全纯函数, 那么对于 D 内每一点 z , 有 $f'(z) \neq 0$

Proof 用反证法. 如果存在 $z_0 \in D$, 使得 $f'(z_0) = 0$, 那么 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 m 阶零点

(这里能够设为 m 阶是合理的, 若不然若 $f^{(n)}(z_0) \equiv 0 (\forall n)$ 那么利用泰勒展开知道在 z_0 的一个邻域内 f 恒为零, 与单叶矛盾)

这里, $m \geq 2$. 取 ρ 充分小, 使得 $f'(z)$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中除了 z_0 外不再其他的零点

由分歧覆盖定理, 对于 $0 < \eta < \rho$, 存在 $\delta > 0$, 使得对任意 $a \in B(f(z_0), \delta), f(z) - a$ 在 $B(z_0, \eta)$ 中至少有两个零点, 设为 z_1, z_2

由于 $f'(z)$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中除了 z_0 外不再其他的零点 $\implies f'(z_1) \neq 0, f'(z_2) \neq 0$

故 z_1, z_2 都是 $f(z) - a$ 的 1 阶零点. 这就是说, 存在 $z_1 \neq z_2$, 使得 $f(z_1) = f(z_2) = a$, 这与 f 的单叶性相矛盾.

Proposition 5.5

设 f 是域 D 中的全纯函数, 如果对于 $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$, 那么 f 在 z_0 的邻域中是单叶的

Proof 因为 $f'(z_0) \neq 0$, 所以 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 1 阶零点

由分歧覆盖定理: 存在 $\rho > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $a \in B(f(z_0), \delta)$ $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中只有一个零点

由 f 的连续性, 可取 $\rho_1 < \rho$, 使得 $f(B(z_0, \rho_1)) \subset B(f(z_0), \delta)$ 因而 f 在 $B(z_0, \rho_1)$ 中是单叶的.

Theorem 5.23

设 f 是域 D 上的单叶全纯函数, 那么它的反函数 f^{-1} 是 $G = f(D)$ 上的全纯函数

而且 $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}, w \in G$ 其中, $w = f(z)$

Proof 先证明 f^{-1} 在 G 上连续. 任取 $w_0 \in G$, 则存在 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0) = w_0$

由分歧覆盖定理, 对于充分小的 $\rho > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|w - w_0| < \delta$ 时, 相应的 z 满足 $|z - z_0| < \rho$, 即 $|f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)| < \rho$

这说明 f^{-1} 在 w_0 处是连续的

现在 $\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$ 即 $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$

这里, 我们已经利用了定理单叶全纯函数导数不等于零的结果.

Theorem 5.24 (Hurwitz 定理)

设 $\{f_n\}$ 是域 D 中的一列全纯函数, 它在 D 中内闭一致收敛到不恒为零的函数 f
 设 γ 是 D 中一条可求长简单闭曲线, 它的内部属于 D , 且不经过 f 的零点
 那么必存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, f_n 与 f 在 γ 内部的零点个数相同

Proof 由 Weierstrass 定理, f 在 D 中是全纯的。因为 f 在 γ 上没有零点, 所以 $\min\{|f(z)| : z \in \gamma\} = \varepsilon > 0$
 另一方面, 对于上面的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ 在 γ 上成立
 于是, 当 $n \geq N$ 时, 在 γ 上有不等式 $|f(z)| \geq \varepsilon > |f_n(z) - f(z)|$ 根据 Rouché 定理, f 和 f_n 在 γ 内有相同个数的零点。

Corollary 5.6

设 $\{f_n\}$ 是域 D 上一列单叶的全纯函数, 它在 D 上内闭一致收敛到 f , 如果 f 不是常数, 那么 f 在 D 中也是单叶的全纯函数

Proof 由 Weierstrass 定理, f 是 D 上的全纯函数

如果 f 在 D 上不是单叶的, 那么一定存在 $z_1, z_2, z_1 \neq z_2$, 使得 $f(z_1) = f(z_2)$

令 $F(z) = f(z) - f(z_1)$, 那么 F 在 D 中有两个零点 z_1 和 z_2 。因为 $F \not\equiv 0$, 故 z_1 和 z_2 是孤立的

选取充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(z_1, \varepsilon) \cap B(z_2, \varepsilon) = \emptyset$, 且 F 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$ 中除去 z_1 和 z_2 外不再其他的零点

令 $F_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$ 则 F_n 在 D 中内闭一致收敛到 F

由 Hurwitz 定理, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, F_n 在 $B(z_1, \varepsilon)$ 和 $B(z_2, \varepsilon)$ 中各有一个零点, 设为 z'_1 和 z'_2

显然 $z'_1 \neq z'_2$, 由此即得 $f_n(z'_1) = f_n(z'_2) = f(z_1)$ 这与 f_n 在 D 内的单叶性相矛盾。

5.5 最大模定理与 Schwarz 定理

Theorem 5.25 (最大模定理)

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 则 $|f(z)|$ 在 D 内任何点都不能达到最大值, 除非在 D 内 $f(z)$ 恒等于常数.

推论设函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析, 在闭域 $\bar{D} = D + \partial D$ 上连续. 且 $|f(z)| \leq M (z \in \bar{D})$

则除 $f(z)$ 为常数的情形外, $|f(z)| < M (z \in D)$.

此定理说明了解析函数边界上的最大模限制了区域内的最大模, 且若最大值能取到则必定在区域都为常

Proof 证如果用 M 表示 $|f(z)|$ 在 D 内的最小上界, 则必 $0 < M < +\infty$. 假定在 D 内有一点 z_0 , 函数 $f(z)$ 的模在 z_0 达到它的最大值, 即 $|f(z_0)| = M$.

(若在 D 上恒等于常数或 $M = 0$ 这也表示恒等于 0 是很 *trivial* 的情况)

应用平均值定理于以 z_0 为圆心, 并且连同它的周界一起都全含于区域 D 内的一个圆 $|z - z_0| < R$, 得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi \text{ 由此推出 } |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\varphi})| d\varphi$$

由于 $|f(z_0 + Re^{i\varphi})| \leq M$, 而 $|f(z_0)| = M$, 从不等式就可以看出, 对于任何 $\varphi (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, $|f(z_0 + Re^{i\varphi})| = M$.

事实上, 如果对于某一个值 $\varphi = \varphi_0$, 有 $|f(z_0 + Re^{i\varphi_0})| < M$, 那么根据 $|f(z)|$ 的连续性, 不等式 $|f(z_0 + Re^{i\varphi})| < M$ 在某个充分小的区间 $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$ 内成立. 同时, 在这个区间之外, 总是 $|f(z_0 + Re^{i\varphi})| \leq M$.

在这样的情况下, 由得 $M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\varphi})| d\varphi < M$, 矛盾.

因此, 我们已经证明了: 在以点 z_0 为圆心的每一个充分小的圆周上 $|f(z)| = M$.

换句话说, 在 z_0 点的足够小的邻域 K 内 (K 及其周界全含于 D 内) 有 $|f(z)| = M$.

必有 $f(z)$ 在 K 内为一常数. 再由惟一性定理, $f(z)$ 在 D 内必为一常数.

Proof 因为 f 是 D 上非常数的全纯函数, 由 $G = f(D)$ 是一个域

如果 $|f(z)|$ 在 D 中某点 z_0 处取到最大值, 记 $w_0 = f(z_0)$, 则 w_0 是 G 的一个内点, 即有 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(w_0, \varepsilon) \subset G$

故必有 $w_1 \in G$, 使得 $|w_1| > |w_0|$. 于是存在 $z_1 \in D$, 使得 $|f(z_1)| = |w_1| > |w_0| = |f(z_0)|$

这与 $|f(z_0)|$ 是 $|f(z)|$ 在 D 中的最大值相矛盾.

Theorem 5.26 (最小模定理)

若区域 D 内不恒为常数的解析函数 $f(z)$, 在 D 内的点 z_0 有 $f(z_0) \neq 0$, 则 $|f(z_0)|$ 不可能是 $|f(z)|$ 在 D 内的最小值

设 (1) 函数 $f(z)$ 在有界区域 D 内解析, 在有界闭域 $\bar{D} = D + \partial D$ 上连续

(2) $f(z) \neq 0 (z \in D)$.

(3) 存在 $m > 0$, 使 $|f(z)| \geq m (z \in \bar{D})$

\Rightarrow 除 $f(z)$ 为常数外, $|f(z)| > m (z \in D)$.

Proof 反证法: 若

1°: 若 $f(z)$ 在区域 D 内无零点易知 $\frac{1}{f(z)}$ 也为 D 上的解析函数; 那么 $\frac{1}{f(z_0)}$ 就是 $\frac{1}{f(z)}$ 在 D 上的最大值, 由最大模定理知道

$\frac{1}{f(z)}$ 在 D 内恒为常数与题设矛盾.

2°: 若 $f(z)$ 在区域 D 内有零点, 那么我们必定可以取一个 δ st. 在 $K: |z - z_0| < \delta$ 内无零点. 否则若无论取多小的 δ , 总有零点 那么我们就可以根据这点构造出一个趋向 z_0 的点列且全部取 0; 那么根据惟一性定理知道在 K 内恒等于 0 延拓到整个 D 上就全部为 0 这与题目中不恒为常数矛盾

K 内无零点, 此时根据 1° 一样的做法. 因为 $f(z_0)$ 是 D 上最小值自然也是 K 上的最小值

我们也会得到在 K 上 $\frac{1}{f(z)}$ 恒为常数又可以延拓到 D 上, 又矛盾

综上 $|f(z_0)|$ 不可能是 D 内的最小值

Theorem 5.27 (Schwarz 引理)

设 f 是单位圆盘 $B(0, 1)$ 中的全纯函数, 且满足条件

(1) 当 $z \in B(0, 1)$ 时, $|f(z)| \leq 1$

(2) $f(0) = 0$

那么下列结论成立

(1) 对于任意 $z \in B(0, 1)$, 均有 $|f(z)| \leq |z|$

(2) $|f'(0)| \leq 1$

(3) 如果存在某点 $z_0 \in B(0, 1), z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或者 $|f'(0)| = 1$ 成立

那么存在实数 θ , 使得对 $B(0, 1)$ 中所有的 z , 都有 $f(z) = e^{i\theta}z$

Proof 因为 $f \in H(B(0, 1))$, 且 $f(0) = 0$, 故 f 在 $B(0, 1)$ 中可展开为 $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \cdots = z(a_1 + a_2z + \cdots) = zg(z)$

这里, $g(0) = a_1 = f'(0)$

取 $0 < r < 1$, 当 $|z| = r$ 时, 有 $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$ 故由最大模原理, 在圆盘 $B(0, r)$ 中也有 $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ (当 $|z| < r$ 时)

让 $r \rightarrow 1$, 即得 $|g(z)| \leq 1 (z \in B(0, 1))$, 即 $|f(z)| \leq |z|$, 结论 (1) 成立

从 $|g(0)| \leq 1$ 即得 $|f'(0)| \leq 1$, 结论 (2) 成立

现若有 $z_0 \in B(0, 1), z_0 \neq 0$, 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 即 $|g(z_0)| = 1$

这说明全纯函数 g 在内点 z_0 处取到了最大模 1, 根据最大模原理, g 必须是常数

设 $g(z) \equiv c$, 由 $|g(z_0)| = 1$, 得 $|c| = 1$, 所以 $c = e^{i\theta}$, 因而 $f(z) = e^{i\theta}z$

如果 $|f'(0)| = 1$, 即 $|g(0)| = 1$, 与上面一样讨论, 即得 $f(z) = e^{i\theta}z$. 结论 (3) 成立.

Note 对于一般的域 D , 要确定 $\text{Aut}(D)$ 是很困难的. 但对于单位圆盘 $B(0, 1)$, 应用 Schwarz 引理不难定出其上的全纯自同构群

对于 $|a| < 1$, 记 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 由分式线性变换知道, 它把 $B(0, 1)$ 一一地映为 $B(0, 1)$, 因而 $\varphi_a \in \text{Aut}(B(0, 1))$

如果记 $\rho_\theta(z) = e^{i\theta}z$, 它是一个旋转变换, 当然有 $\rho_\theta \in \text{Aut}(B(0, 1))$

下面我们将证明, $\text{Aut}(B(0, 1))$ 中除了 φ_a, ρ_θ 以及它们的复合外, 不再其他的变换.

Theorem 5.28

设 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 且 $f^{-1}(0) = a$, 则必存在 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得 $f(z) = e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$

Proof 记 $w = \varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ (实际上 $\varphi_a^2 = id$), 直接计算可得 $z = \varphi_a^{-1}(w) = \frac{a-w}{1-\bar{a}w} = \varphi_a(w)$

令 $g(w) = f \circ \varphi_a(w)$, 则 $g \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 而且 $g(0) = f(\varphi_a(0)) = f(a) = 0$

故由 Schwarz 引理得 $|g'(0)| \leq 1$

由于 $g^{-1} \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 且 $g^{-1}(0) = 0$, 故对 g^{-1} 用 Schwarz 引理, 得 $\left| (g^{-1})'(0) \right| \leq 1$

但由定理有 $\left| (g^{-1})'(0) \right| = \frac{1}{|g'(0)|}$

由此即得 $|g'(0)| \geq 1$, 相互比较, 即得 $|g'(0)| = 1$

根据 Schwarz 引理的结论 (3) 存在实数 θ , 使得 $g(w) = e^{i\theta}w$, 即 $f \circ \varphi_a(w) = e^{i\theta}w$

令 $w = \varphi_a(z)$, 即得 $f(z) = e^{i\theta} \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$

Note 首先我们要说明 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \in \text{Aut}(B(0, 1))$

1. $\varphi_a(0) = a \quad \varphi_a(a) = 0$

2. $\varphi'_a(z) = \frac{-1+|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \quad \varphi'_a(0) = -1+|a|^2 \quad \varphi'_a(a) = -\frac{1}{1-|a|^2}$

3. $\varphi_a^2 = \varphi_a \circ \varphi_a = id$

Theorem 5.29 (Schwarz-Pick 定理)

设 $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 是全纯函数, 对于 $a \in B(0, 1), f(a) = b$. 那么

$$(1) \text{ 对任意 } z \in B(0, 1), \text{ 有 } |\varphi_b(f(z))| \leq |\varphi_a(z)| \iff \left| \frac{f(a) - f(z)}{1 - \overline{f(a)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \right|$$

$$(2) |f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2} \iff |f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$

(3) 如果存在某点 $z_0 \in B(0, 1), z_0 \neq a$, 使得 $|\varphi_b(f(z_0))| = |\varphi_a(z_0)|$, 或者 $|f'(a)| = \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$ 成立, 那么 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$

注: 第一条通常也写为 $f: B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 是全纯函数那么 $\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)}f(w)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| (\forall z, w \in B(0, 1))$

Proof 令 $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a$, 则 $g \in H(B(0, 1))$, 且 $g(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$

$$g(0) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_a(0) = 0$$

$$\text{对 } g \text{ 用 Schwarz 引理} \implies |\varphi_b \circ f \circ \varphi_a(\zeta)| \leq |\zeta|, \zeta \in B(0, 1) \quad |(\varphi_b \circ f \circ \varphi_a)'(0)| \leq 1$$

令 $z = \varphi_a(\zeta)$, 则 $\zeta = \varphi_a(z)$, 于是 $|\varphi_b \circ f \circ \varphi_a(\zeta)| \leq |\zeta|$ 式变成 $|\varphi_b(f(z))| \leq |\varphi_a(z)|$ 这就是 (1)

$$\text{由于 } \varphi_a'(0) = -(1 - |a|^2) \quad \varphi_b'(b) = -\frac{1}{1 - |b|^2}$$

由 $|(\varphi_b \circ f \circ \varphi_a)'(0)| \leq 1$ 式与复合函数求导即得 $|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$ 这就是 (2)

如果存在 $z_0 \in B(0, 1), z_0 \neq a$, 使得 $|\varphi_b(f(z_0))| = |\varphi_a(z_0)|$ 等号成立

令 $\zeta_0 = \varphi_a(z_0)$, 则 $\zeta_0 \neq 0$ (对于双射而言 φ_a 把 a 映到 0) 且 ζ_0 使式中的等号成立

于是由 Schwarz 引理, $g(z) = e^{i\theta}z$, 即 $g \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 于是 $f = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a \in \text{Aut}(B(0, 1))$

用同样的方法可以证明 $|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$ 式中的等号成立时也有 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$

第 6 章 全纯函数的 Laurent 展开及其应用

6.1 全纯函数的 Laurent 展开

Theorem 6.1

设洛朗级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$ 的收敛圆环为 $H: r < |z-a| < R (r \geq 0, R \leq +\infty)$

- \Rightarrow 则级数
- (1) 在 H 内绝对收敛且内闭一致收敛于 $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$
 - (2) 函数 $f(z)$ 在 H 内解析
 - (3) 函数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ 在 H 内可逐项求导 p 次 ($p = 1, 2, \dots$)
 - (4) 函数 $f(z)$ 可沿 H 内曲线 C 逐项积分.

其中幂级数部分称为全纯部分，负项幂级数部分称为主要部分

Theorem 6.2 (洛朗定理)

设 $D = \{z: r < |z-z_0| < R\}$, 如果 $f \in H(D)$, 那么 f 在 D 上可以展开为 Laurent 级数: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, z \in D$

其中, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta$, 而 $\gamma_\rho = \{\zeta: |\zeta-z_0| = \rho\} (r < \rho < R)$, 并且展开式是唯一的.

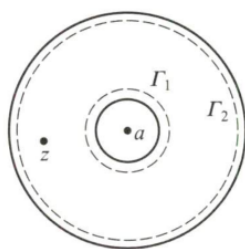


图 6.1

Proof 任意取定 $z \in D$, 取 r_1, r_2 , 使得 $r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R$. 记 $\gamma_j = \{\zeta: |\zeta-z_0| = r_j\}, j = 1, 2$

$$\text{得 } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

记 $M_j = \sup \{|f(\zeta)|: \zeta \in \gamma_j\}, j = 1, 2$

当 $\zeta \in \gamma_1$ 时, $\left| \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z-z_0} \left(1 - \frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

于是 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} f(\zeta) \frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$, $\zeta \in \gamma_1$ 由于 $\left| \frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} \right| \leq \frac{M_1}{|z-z_0|} \left(\frac{r_1}{|z-z_0|}\right)^{n-1}$

并且右端是一收敛级数, 故知级数在 γ_1 上一致收敛, 因而可逐项积分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^{-n} (*)$$

当 $\zeta \in \gamma_2$ 时, $\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$, 所以有

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0} \left(1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

于是 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$, $\zeta \in \gamma_2$ 与上面的讨论一样, 级数在 γ_2 上一致收敛, 所以

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^n (**)$$

由多连通域的 Cauchy 积分定理得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}} d\zeta = a_{-n}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = a_n$$

带入 (*) (**) 可以得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = - \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

即可得到所求式子

现在证明展开式是唯一的

如果另有展开式 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n (z-z_0)^n$ 因为级数在 γ_ρ 上一致收敛, 逐项积分得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{m+1}} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (\zeta-z_0)^{n-m-1} d\zeta = a'_m$$
 所以这个展开式就是式

Proposition 6.1

设 $0 < r < R < \infty$, $D = B(0, R) \setminus \overline{B(0, r)}$

证明: 若 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ 双全纯地将 D 映为域 G , 则 G 的面积为 $\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |a_n|^2 (R^{2n} - r^{2n})$

Proposition 6.2 (面积定理)

若 $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 是 $B(0, 1) \setminus \{0\}$ 上的双全纯映射, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \leq 1$

6.2 解析函数孤立奇点

我们将探究解析函数孤立奇点的分类与判据。注意指的是孤立奇点。形如 $\frac{1}{\sin z}$ 这类函数无法将零点孤立起来我们并不加以讨论

Definition 6.1

设 a 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点

(1) 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零, 则称 a 为 $f(z)$ 的可去奇点

(2) 若 $f(z)$ 在点 a 的主要部分为有限多项, 设为 $\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a}$ ($c_{-m} \neq 0$), 则称 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 一阶极点也称为单极点

(3) 如果 $f(z)$ 在点 a 的主要部分有无限多项, 则称 a 为 $f(z)$ 的本质奇点

Theorem 6.3 (可去奇点的等价判据)

(1) $f(z)$ 在点 a 为可去奇点

(2) $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零.

(3) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b (\neq \infty)$

(4) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内有界.

Proof (1) 推出 (2) 定义, (2) 推 (3) 由知 $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$ ($0 < |z-a| < R$), 于是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 (\neq \infty)$

(3) 推出 (4): 极限性质

(4) 推出 (1): 设 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $K \setminus \{a\}$ 内以 M 为界. 考虑 $f(z)$ 在点 a 的主要部分 $\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots$

$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} d\zeta$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 而 Γ 为全含于 K 内的圆周 $|\zeta-a| = \rho$, ρ 可以充分小

于是由 $|c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{-n+1}} 2\pi\rho = M\rho^n$ 即知当 $n = 1, 2, \dots$ 时, $c_{-n} = 0$

即是说, $f(z)$ 在点 a 的主要部分为零.

Lemma 6.1

$f(z)$ 的孤立奇点 a 为极点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

Proof 证由条件的必要性是明显的 (联系可去奇点). 现在来证明它的充分性.

在本定理的假设下, 存在着某一正数 $\rho_0 \leq R$, 使得在 $0 < |z-z_0| < \rho_0$ 内, $f(z) \neq 0$, 于是 $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ 在 $0 < |z-z_0| < \rho_0$ 内解析, 不等于零

而且 $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. 因此, z_0 是 $F(z)$ 的一个可去奇点, 从而在 $0 < |z-z_0| < \rho_0$ 内

$F(z)$ 有洛朗级数展式: $F(z) = \beta_0 + \beta_1(z-z_0) + \cdots + \beta_n(z-z_0)^n + \cdots$

我们有 $\beta_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = 0$. 由于在 $0 < |z-z_0| < \rho_0$ 内, $F(z) \neq 0$,

由解析函数零点孤立性可以设 $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{m-1} = 0, \beta_m \neq 0$.

由此得 $F(z) = (z-z_0)^m \Phi(z)$ 其中 $\Phi(z)$ 在 $|z-z_0| < \rho_0$ 内解析, 并且不等于零 ($\Phi(z_0) = \beta_m \neq 0$)

于是在 $0 < |z-z_0| < \rho_0$ 内, $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m \Phi(z)}$, 这里的 $\varphi(z) = \frac{1}{\Phi(z)}$ 在 $|z-z_0| < \rho_0$ 内解析, $\varphi(z_0) = \alpha_{-m} = \frac{1}{\beta_m} \neq 0$

因此 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点.

Theorem 6.4 (m 阶极点的等价判据)

- (1) $f(z)$ 在点 a 的主要部分为 $\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a}$ ($c_{-m} \neq 0$)
- (2) $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域内能表示成 $f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}$, 其中 $\lambda(z)$ 在点 a 的邻域内解析, 且 $\lambda(a) \neq 0$.
- $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = b \neq 0$
- (3) $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 以点 a 为 m 阶零点 (可去奇点要当作解析点看, 只要令 $g(a) = 0$).

Proof 证 (1) 推出 (2): 若 (1) 为真, 则在点 a 的某去心邻域内有

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots = \frac{c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-a) + \cdots}{(z-a)^m} = \frac{\lambda(z)}{(z-a)^m},$$

其中 $\lambda(z)$ 显然在点 a 的邻域内解析, 且 $\lambda(a) = c_{-m} \neq 0$

(2) 推出 (3): 若 (2) 为真, 则在点 a 的某去心邻域内有 $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^m}{\lambda(z)}$ 其中 $\frac{1}{\lambda(z)}$ 在点 a 的某邻域内解析, 且 $\frac{1}{\lambda(a)} \neq 0$. 因此, a 为 $g(z)$ 的可去奇点, 作为解析点来看, 只要令 $g(a) = 0$, a 就为 $g(z)$ 的 m 阶零点.

(3) 推出 (1): 如果 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 以点 a 为 m 阶零点, 则在点 a 的某邻域内 $g(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 在此邻域内解析, 且 $\varphi(a) \neq 0$.

这样一来, $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}$. 因 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在点 a 的某邻域内解析, 这是因为在 a 点处值不等于 0 那么就会存在一个小邻域都不等于 0, 如在此邻域内令 $\frac{1}{\varphi(z)} = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-a) + \cdots$ 为其泰勒展式

$$\text{则 } f(z) \text{ 在点 } a \text{ 的主要部分就是 } \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} \quad \left(c_{-m} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0 \right).$$

Theorem 6.5 (本质奇点的判据)

函数 $f(z)$ 的孤立奇点 a 为本质奇点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \neq \begin{cases} b \text{ (有限数)}, \\ \infty, \end{cases}$ 即 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ 不存在.

Proposition 6.3

若 $z = a$ 为函数 $f(z)$ 的一本质奇点, 且在点 a 的充分小去心邻域内不为零, 则 $z = a$ 亦必为 $\frac{1}{f(z)}$ 的本质奇点.

Proof 证令 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$. 由假设, $z = a$ 必为 $\varphi(z)$ 的孤立奇点.

若 $z = a$ 为 $\varphi(z)$ 的可去奇点 (解析点), 则 $z = a$ 必为 $f(z)$ 的可去奇点或极点, 此与假设矛盾.

若 $z = a$ 为 $\varphi(z)$ 的极点, 则 $z = a$ 必为 $f(z)$ 的可去奇点 (零点), 亦与假设矛盾.

故 $z = a$ 必为 $\varphi(z)$ 的本质奇点.

Definition 6.2

设函数 $f(z)$ 在无穷远点的 (去心) 邻域 $N \setminus \{\infty\} : +\infty > |z| > r \geq 0$ 内解析, 则称点 ∞ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

利用倒代换 $\varphi(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right) = f(z)$; 若 $z' = 0$ 为 $\varphi(z')$ 的可去奇点 (解析点)、 m 阶极点或本质奇点, 则我们相应地称 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (解析点)、 m 阶极点或本质奇点, 可见 f 在无穷处可微意味着无穷为可去奇点.

Theorem 6.6 (无穷点为可去奇点等价判据)

- (1) $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的主要部分为零
- (2) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = b (\neq \infty)$
- (3) $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的某去心邻域 $N \setminus \{\infty\}$ 内有界.

Theorem 6.7 (是否为极点判据)

$$z = \infty \text{ 为极点} \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

Theorem 6.8 (无穷点为 m 阶极点等价判据)

- (1) $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的主要部分为 $b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_mz^m$ ($b_m \neq 0$).
- (2) $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的某去心邻域 $N \setminus \{\infty\}$ 内能表示成 $f(z) = z^m \mu(z)$, 其中 $\mu(z)$ 在 $z = \infty$ 的邻域 N 内解析, 且 $\mu(\infty) \neq 0$.
- (3) $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 以 $z = \infty$ 为 m 阶零点 (只要令 $g(\infty) = 0$).
- (4) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m} = A \neq 0$

Theorem 6.9 (无穷点为本质奇点判据)

- (1) $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的主要部分有无穷多项正幂不等于零.
- (2) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不存在 (即当 z 趋向于 ∞ 时, $f(z)$ 不趋向于任何 (有限或无穷) 极限).

Theorem 6.10

若 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的本质奇点, 且存在充分大 R , $|z| \geq R$ 时, $f(z) \neq 0 \Rightarrow$ 则 $z = \infty$ 也为 $\frac{1}{f(z)}$ 的本质奇点

6.3 皮卡定理与整函数与亚纯函数

Theorem 6.11 (魏尔斯特拉斯皮卡小定理)

如果 a 为函数 $f(z)$ 的本质奇点,则对于任何常数 A ,不管它是有限数还是无穷,都有一个收敛于 a 的点列 $\{z_n\}$ 使得 $\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A$.即,在本质奇点的无论怎样小的去心邻域内, $f(z)$ 可以取任意接近于预先给定的任何值(有穷或无穷)若 a 为无穷远点也对.

Proof 证(1)在 $A = \infty$ 的情形,定理是正确的.因为函数 $f(z)$ 的模在 a 的任何去心邻域内都是无界的.否则, a 必为 $f(z)$ 的可去奇点(2)现在设 $A \neq \infty$.可能有这种情形发生,在点 a 的任意小的去心邻域内有这样一点 z 存在,使 $f(z) = A$.在这种情形下,定理已经得证.因此,我们可以假定,在点 a 的充分小的去心邻域 $K \setminus \{a\}$ 内 $f(z) \neq A$.

这样,由定理3.25函数 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ 在 $K \setminus \{a\}$ 内解析且以 a 为本质奇点(因 a 为 $f(z)$ 的本质奇点).

根据前面(1)的结果,必定有一个趋向 a 的点列 $\{z_n\}$ 存在,使得 $\lim_{z_n \rightarrow a} \varphi(z_n) = \infty$.由此推出 $\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A$.

Theorem 6.12 (皮卡大定理)

如果 a 为函数 $f(z)$ 的本质奇点,则对于每一个 $A \neq \infty$,除掉可能一个值 $A = A_0$ 外,必有趋于 a 的无限点列 $\{z_n\}$,使 $f(z_n) = A(n = 1, 2, \dots)$.若 a 为无穷远点也对

Remark 此定理比魏尔斯特拉斯皮卡小定理更为一般化,在此直接是直接把定理中的极限号拿掉了

Theorem 6.13 (整函数的无穷远点作为孤立奇点性质)

设 $f(z)$ 为一整函数,则 $f(z)$ 只以 $z = \infty$ 为孤立奇点,且可设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (*) ($0 \leq |z| < +\infty$).于是显然有

若 $f(z)$ 为一整函数,则

(1) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件为: $f(z) =$ 常数 c_0 .

(2) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点的充要条件为: $f(z)$ 是一个 m 次多项式 $c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m$ ($c_m \neq 0$)

(3) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的本质奇点的充要条件为:展式(*)有无穷多个 c_n 不等于零.(我们称这样的 $f(z)$ 为超越整函数.)

Proof

(1) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 可去奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 存在非零的极限值.这也就意味着 f 在全平面上有界,

那么根据刘维尔定理有界整函数必为常数得到即可

(2) $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m}$ 存在非零的极限值,不妨用反证法就知道 $f(z)$ 最多为一个 m 次多项式,且最高次系数不能等于0

Definition 6.3

在有限平面上除极点外无其他类型奇点的单值解析函数成为亚纯函数,非有理函数的亚纯函数成为超越亚纯函数

Theorem 6.14

有理函数是亚纯函数,且无穷远点是可去奇点或极点,

若无穷远点是一亚纯函数 $f(z)$ 的可去奇点或极点,那么 $f(z)$ 为有理函数

Proof 有理函数 $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n}{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_m z^m}$ ($\alpha_n, \beta_m \neq 0$)也是一个亚纯函数,它在有限复平面上有有限个极点

而无穷远点是它的极点(当 $n > m$ 时)或可去奇点(当 $n \leq m$ 时)

在这里 α_k 及 β_l ($k = 0, 1, 2, \dots, n; l = 0, 1, 2, \dots, m$)是复常数, m 及 n 足正整数.

另一方面如果无穷远点是 $f(z)$ 的可去奇点或极点,那么可找到一个有限的 R ,使得 $f(z)$ 在 $R < |z| < +\infty$ 内解析.

在 $|z| \leq R$ 上, $f(z)$ 只可能有有限个极点, 因为否则极点的极限点既不是极点, 而且函数也不在这点解析, 这是不可能的.

因此 $f(z)$ 只可能有有限个极点, 设为 z_1, z_2, \dots, z_p ; 此外, 无穷远点是可去奇点或极点.

在每一个有限极点附近把 $f(z)$ 展成洛朗级数, 且设在点 z_λ 的主要部分是:

$$h_\lambda(z) = \frac{c_{-1}^{(\lambda)}}{z - z_\lambda} + \frac{c_{-2}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^2} + \dots + \frac{c_{-\alpha_\lambda}^{(\lambda)}}{(z - z_\lambda)^{\alpha_\lambda}} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots, p);$$

当无穷远点是极点时, 在这点的主要部分是 $g(z) = A_1z + A_2z^2 + \dots + A_qz^q$ 而当无穷远点是可去奇点时, 令 $g(z) \equiv 0$

令 $F(z) = f(z) - R(z)$, 其中 $R(z) = h_1(z) + h_2(z) + \dots + h_p(z) + g(z)$ 是一个有理函数

函数 $F(z)$ 除去在 z_1, z_2, \dots, z_p 与 ∞ 有可去奇点外, 在其余各点解析; 这是因为由于展式的唯一性

$F(z)$ 在 z_1, z_2, \dots, z_p 及 ∞ 附近的洛朗展式都不包含主要部分

因此, 令 $F(z_\lambda) = \lim_{z \rightarrow z_\lambda} F(z) \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots, p)$

$F(z)$ 就是一个有界整函数. 由刘维尔定理, $F(z) = C$ (常数), 从而 $f(z) = R(z) + C$. 证完.

Proposition 6.4

$f(z)$ 是单叶整函数的充要条件为 $f(z) = az + b \quad (a \neq 0)$.

Proof

充分性由于函数 $w = f(z) = az + b \quad (a \neq 0)$ 及其反函数 $z = \frac{1}{a}(w - b)$ 都是单值整函数 (一次多项式), 所以 $f(z) = az + b \quad (a \neq 0)$ 是单叶整

必要性设 $f(z)$ 是单叶整函数. 由定理整函数分三类:

(1) $f(z)$ 为常数, 这与单叶性假设矛盾.

(2) $f(z)$ 为超越整函数, $f(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n + \dots \quad (0 \leq |z| < +\infty)$, 它的惟一奇点是本质奇点 $z = \infty$,

再由皮卡大定理, 对每个 $A \neq \infty$, 除掉可能的一个值 $A = A_0$ 外, 必有趋于 ∞ 的无限点列 $\{z_n\}$, 使 $f(z_n) = A \quad (n = 1, 2, \dots)$

这也与 $f(z)$ 的单叶性假设矛盾.

(3) $f(z)$ 为一多项式, $f(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n \quad (c_n \neq 0)$, 对每个 $A \neq \infty$, 由代数学基本定理, $f(z) = A$ 必有且只有 n 个根

(是几重根就算作几个根) 但由 $f(z)$ 的单叶性假设, 必有 $n = 1$, 即必有也可写成 $f(z) = c_0 + c_1z \quad (c_1 \neq 0)$. $f(z) = az + b \quad (a \neq 0)$

Theorem 6.15

(1) C 为一周线, $f(z)$ 在 C 内部亚纯, 且连续到 C

(2) $f(z)$ 沿 C 不等于0

证明: $f(z)$ 在 C 内部最多只有有限个零点, 有限个极点。

Proof

先证明只有有限个极点

假设若有无限个极点, 则根据聚点定理必有一个极限点 z_0 。

若极限点在 C 内部, 那么有 $\{z_n\} \rightarrow z_0$ 且 $\{z_n\}$ 都为极点. 这就造成了 z_0 并不是孤立奇点与亚纯矛盾

若极限点在 C 上, 同理由 $\{z_n\} \rightarrow z_0$; 则在 z_0 极点处是无界的, 但是 $f(z)$ 是连续到 C 周线上必定有界, 也矛盾

\Rightarrow 只有有限个极点

再证明只有有限个零点

假设若有无限个零点, 则根据聚点定理必有一个极限点 z_0

若极限点在 C 上, 那么这与 $f(z)$ 沿 C 不等于0矛盾

若极限点在 C 内. 则根据唯一性定理可以得到内部都为0, 那么延续到 C 上 C 上也为0, 还是矛盾

\Rightarrow 只有有限个零点

第7章 留数理论

7.1 留数基本性质

Definition 7.1 (有限点的留数定义)

设函数 $f(z)$ 以有限点 a 为孤立奇点, 即 $f(z)$ 在点 a 的某去心邻域 $0 < |z - a| < R$ 内解析

则称积分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$ ($\Gamma: |z - a| = \rho, 0 < \rho < R$)为 $f(z)$ 在点 a 的留数 (residue), 记为 $\text{Res} f(z)$.

由柯西积分定理知道, 当 $0 < \rho < R$ 时, 留数的值与 ρ 无关, 利用洛朗系数公式

有 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = c_{-1}$ 即 $\text{Res} f(z) = c_{-1}$. 这里 c_{-1} 是 $f(z)$ 在 $z = a$ 处的洛朗展开式中 $\frac{1}{z - a}$ 这一项的系数.

Theorem 7.1 (柯西留数定理)

$f(z)$ 在周线或复周线 C 所围的区域 D 内, 除 a_1, a_2, \dots, a_n 外解析, 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上除 a_1, a_2, \dots, a_n 外连续

则 $\Rightarrow \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(z)$.

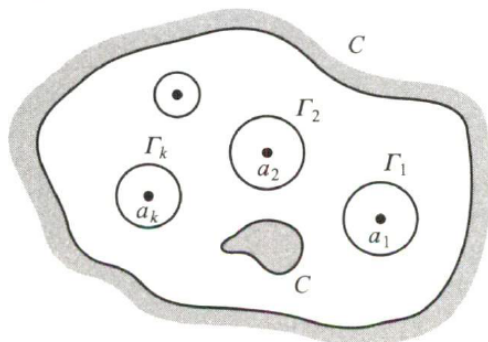


图 7.1

Proof 由题干知道在区域 D 内每个极点挖去充分小的邻域, 那么根据柯西积分定理我们有

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} f(z) dz &= 0 \Rightarrow \int_{C^+} f(z) dz + \int_{\Gamma_1^-} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n^-} f(z) dz = 0 \\ \Rightarrow \int_{C^+} f(z) dz &= \int_{\Gamma_1^-} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n^-} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{i=1}^n \text{Res}(f(z), a_i) \end{aligned}$$

Theorem 7.2 (留数求法)

1. 若孤立奇点 a 为可去奇点, 这是trivial的情况因为主要部分为0; 所以 c_{-1} 系数 = 0
2. 若 a 是 f 的 m 阶极点, 则 $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$
3. 若孤立奇点 a 为本质奇点. 我们只能根据洛朗展开系数进行比较

Proof 若 a 是 f 的 m 阶极点, 则 $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$

因为 a 是 f 的 m 阶极点, 故在 a 点的邻域中有 $f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z)$ 这里, g 在 a 点全纯, 且 $g(a) \neq 0$

$$\text{于是 } f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-m}$$

这是一个Laurent展开式, $(z-a)^{-1}$ 的系数为 $\frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$

知 $g(z) = (z-a)^m f(z)$, 因而得

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-a)^m f(z)\}$$

Corollary 7.1

设 a 为 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的一阶极点 (只要 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 在点 a 解析, 且 $\varphi(a) \neq 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$), 则 $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$
 若 $z = a$ 是 $f(z)$ 的一阶极点则 $\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \cdot f(z)$

Proof 证因为 a 为 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的一阶极点, 故 $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} (z-a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(a)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

7.2 无穷远点的留数

Definition 7.2

设 ∞ 为函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点, 即 $f(z)$ 在去心邻域 $N \setminus \{\infty\} : 0 \leq r < |z| < +\infty$ 内解析

则称 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz$ ($\Gamma : |z| = \rho > r$) 为 $f(z)$ 在点 ∞ 的留数, 记为 $\operatorname{Res} f(z)$

这里 Γ^- 是指顺时针方向 (这个方向很自然地可以看作是绕无穷远点的正方向)

根据洛朗级数展开我们知道 $\operatorname{Res}(f(z), \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz = -c_{-1}$

也就是留数等于 $f(z)$ 在无穷处的洛朗展开式的 $\frac{1}{z}$ 反号

Theorem 7.3 (留数求和定理)

若函数 $f(z)$ 在扩充复平面上只有有限个孤立奇点 (包括无穷远点)

设为 $a_1 \cdots a_n, \infty$; 那么各个点留数之和为零

Remark

要特别注意: 虽然在 $f(z)$ 的有限可去奇点 a 处, 必有 $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = 0$

但是, 如果点 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点 (或解析点), 则 $\operatorname{Res} f(z)$ 可以不是零. 例如, $f(z) = 2 + \frac{1}{z}$ 以 $z = \infty$ 为可去奇点, 但 $\operatorname{Res} f(z) = -1$.

Corollary 7.2 (无穷远点的留数计算方法)

根据洛朗展开式的关系我们做倒代换 $z = \frac{1}{t}$

那么由 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2} dt \Leftrightarrow \operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}, 0\right]$

$\Gamma^- : |z| = \rho > r$ 逆时针 $\rightarrow \gamma^+ : |t| = \lambda = \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$ 顺时针. 其中原 $f(z)$ 在 $0 \leq r < |z| < +\infty$ 上解析

7.3 留数计算积分应用

$$7.3.1 \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

这里 $R(\cos \theta, \sin \theta)$ 表示 $\cos \theta, \sin \theta$ 的有理函数, 并且在 $[0, 2\pi]$ 上连续

$$\text{若令 } z = e^{i\theta}, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

当 θ 经历变程 $[0, 2\pi]$ 时, z 沿圆周 $|z|=1$ 的正方向绕行一周因此有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

右端是 z 的有理函数的周线积分, 并且积分路径上无奇点, 应用留数定理就可求得.

Remark 被积函数 $R(\cos \theta, \sin \theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的连续性可不必先检验, 只要看变换后的被积函数在 $|z|=1$ 上是否有奇点.

对于一个实变函数 $f(x)$ 沿 x 轴上一条有限线段 $[a, b]$ 的积分

我们以一条或几条辅助曲线 Γ 来补充 $[a, b]$, 使 $[a, b]$ 和 Γ 一起构成一条周线围成一个区域 D

如果有在 D 内解析, 在 \bar{D} 上连续 (除了 D 中有有限个点外) 的辅助函数 $g(z)$, 在 $[a, b]$ 内 $g(x)$ 或 $g(z)$ 的实部及虚部中的一个等于 $f(x)$

$$\text{则由留数定理就有 } \int_a^b g(x) dx + \int_{\Gamma} g(z) dz = 2\pi i$$

其中 \sum 是 $g(z)$ 在 D 内的奇点的留数总和. 假如上式中的第二个积分能够算出, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 的计算问题就解决了.

如果 a 或 b 不是有限数, 则可于两端取极限, 这时, 如能求得 $\int_{\Gamma} g(z) dz$ 的极限, 就能至少得到所求反常积分的柯西主值.

但在一般给出的问题中, 或者只要求主值, 或者不难预先看出这一反常积分收敛, 因此, 所求出的那个主值恰好就是所需要的值.

$$7.3.2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Lemma 7.1

设 $f(z)$ 沿圆弧 $S_R: z = Re^{i\theta}$ ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, R$ 充分大) 上连续; 且 $\lim_{R \rightarrow +\infty} z f(z) = \lambda$ 于 S_R 上一致成立 (即与 θ 无关)

$$\Rightarrow \text{则 } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1) \lambda.$$

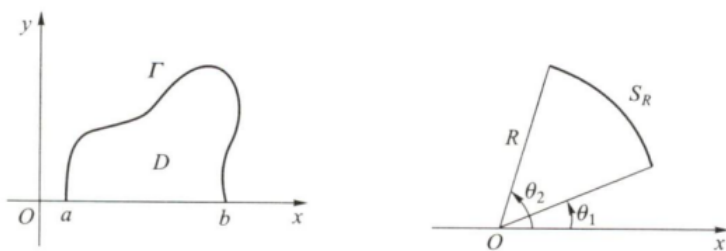


图 7.2

Proof 由题干知道 $i(\theta_2 - \theta_1) \lambda = \lambda \int_{S_R} \frac{1}{z} dz$. 于是进行如下估计

$$\left| \int_{S_R} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1) \lambda \right| = \left| \int_{S_R} \frac{zf(z) - \lambda}{z} dz \right|$$

由题干知道 $zf(z) \rightarrow \lambda$ 当 $R \rightarrow +\infty$ 时一致成立那么 $LHS < \frac{\varepsilon}{R} \cdot (\theta_2 - \theta_1) R \rightarrow 0$

Theorem 7.4

设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 为有理分式

(1) $Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$ ($b_0 \neq 0$) 与 $P(z) = c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m$ ($c_0 \neq 0$) 互质

(2) $n - m \geq 2$

(3) 在实轴上 $Q(z) \neq 0$

$$\Rightarrow \text{于是有 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} a_k > 0} \text{Res} f(z)$$

Proof 由条件及数学分析的结论, 知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 存在, 且等于它的主值 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$. 记为 P.V. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

取上半圆周 $\Gamma_R: z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ 作为辅助曲线. 于是, 由线段 $[-R, R]$ 及 Γ_R 合成一周线 C_R , 先取 R 充分大使 C_R 内部包含 $f(z)$ 在上半平面内的一切孤立奇点 (实际上只有有限个极点) 而由条件, $f(z)$ 在 C_R 上没有奇点.

按留数定理得 $\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} a_k > 0} \text{Res}_{z=a_k} f(z)$, 或写成 $\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im} a_k > 0} \text{Res}_{z=a_k} f(z)$.

$$\text{因为 } |zf(z)| = \left| z \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| z \frac{c_0 z^m + \cdots + c_m}{b_0 z^n + \cdots + b_n} \right| = \left| \frac{z^{m+1}}{z^n} \right| \left| \frac{c_0 + \cdots + \frac{c_m}{z^m}}{b_0 + \cdots + \frac{b_n}{z^n}} \right|$$

由假设条件知 $n - m - 1 \geq 1$, 故沿 Γ_R 上, 就有 $|zf(z)| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$

在等式中令 $R \rightarrow +\infty$, 并根据引理, 知中第二项的积分之极限为零, 这就证明了

7.3.3 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx$

Lemma 7.2 (若尔当引理)

设函数 $g(z)$ 沿半圆周 $\Gamma_R: z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi, R$ 充分大) 上连续, 且 $\lim_{R \rightarrow +\infty} g(z) = 0$ 在 Γ_R 上一致成立.

$$\text{则 } \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} g(z) e^{imz} dz = 0 \quad (m > 0)$$

Proof 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $R_0(\varepsilon) > 0$, 使当 $R > R_0$ 时, 有 $|g(z)| < \varepsilon, z \in \Gamma_R$. 于是, 就有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} g(z) e^{imz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi g(Re^{i\theta}) e^{imRe^{i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta \right| \\ &\leq R\varepsilon \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

这里利用了 $|g(Re^{i\theta})| < \varepsilon, |Re^{i\theta} i| = R$ 以及 $|e^{imRe^{i\theta}}| = |e^{-mR \sin \theta + imR \cos \theta}| = e^{-mR \sin \theta}$. 于是, 由 $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta \leq \theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} g(z) e^{imz} dz \right| &\leq 2R\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR \sin \theta} d\theta \leq 2R\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2mR\theta}{\pi}} d\theta \\ \Rightarrow &= 2\varepsilon R \left[-\frac{e^{-\frac{2mR}{\pi}\theta}}{\frac{2mR}{\pi}} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{m} (1 - e^{-mR}) < \frac{\pi\varepsilon}{m}. \end{aligned}$$

Theorem 7.5

设 $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 其中 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 是互质多项式, 且符合条件

(1) $Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 的次数高

(2) 在实轴上 $Q(z) \neq 0$

(3) $m > 0$

$$\text{则有 } \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{imx} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} a_k > 0} \text{Res}_{z=a_k} [g(z) e^{imz}]$$

特别说来,将分开实虚部,就可以得到形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos mx dx$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin mx dx$ 的积分
由数学分析的结论,可知上面两个反常积分都存在,其值就等于其柯西主值.

7.3.4 路径上存在奇点

Lemma 7.3

设 $f(z)$ 沿圆弧 $S_r: z - a = re^{i\theta} (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, r$ 充分小) 上连续,且 $\lim_{r \rightarrow 0} (z - a)f(z) = \lambda$ 于 S_r 上一致成立

则有 $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_r} f(z) dz = i(\theta_2 - \theta_1)\lambda$

Proof 证因为 $i(\theta_2 - \theta_1)\lambda = \lambda \int_{S_r} \frac{dz}{z - a}$, 于是有 $\left| \int_{S_r} f(z) dz - i(\theta_2 - \theta_1)\lambda \right| = \left| \int_{S_r} \frac{(z - a)f(z) - \lambda}{z - a} dz \right|$
与引理的证明相仿,得知上式在 r 充分小时,其值不超过任意给定的正数 ε .

Theorem 7.6

证明若 $F(z) = e^{imz} f(z), m > 0$, 且满足:

- (1) 在上半平面仅有有限个奇点 $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$;
- (2) 除一阶极点 $x_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 外,在实轴上解析;
- (3) 当 $\text{Im}z \geq 0, z \rightarrow \infty$ 时,有 $f(z) \rightarrow 0$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^n \text{Res}(F(z), a_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \text{Res}(F(z), x_k) \right]$. 这里,积分(对所有 x_k 及 ∞)取主值

即 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{x_1-r} F(x) dx + \int_{x_1-r}^{x_2-r} F(x) dx + \dots + \int_{x_m-r}^R F(x) dx \right] \right\}$.

Proof 针对每个极点都用一个充分小的 r 小圆(逆时针)分割开来。最外面用一个充分大的 R , 联合得到周线 L

那么 $\int_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(F(z), a_k)$

此时根据题目条件我们有 $\int_{\Gamma_R^+} F(z) = 0$.

且拿一个 x_k 举例子那么由 x_k 为一阶极点有 $F(z) = \frac{F_1(z)}{z - x_k} \Rightarrow \text{Res}(F(z), x_k) = F_1(z) = \lim_{z \rightarrow x_k} (z - x_k) F(z)$

$\Rightarrow \int_{\Gamma_r^+} F(z) dz = \text{Res}(F(z), x_k) \cdot i \cdot \pi$

\Rightarrow 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx - \pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(F(z), x_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(F(z), a_k)$

\Rightarrow 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \left[\sum_{k=1}^n \text{Res}(F(z), a_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \text{Res}(F(z), x_k) \right]$.

7.4 鲁歇定理

Lemma 7.4

- (1) 设 a 为 $f(z)$ 的 n 阶零点, 则 a 必为函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 并且 $\operatorname{Res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = n$.
- (2) 设 b 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则 b 必为函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 并且 $\operatorname{Res}_{z=b} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = -m$.

Proof 证 (1) 如 a 为 $f(z)$ 的 n 阶零点, 则在点 a 的邻域内有 $f(z) = (z-a)^n g(z)$, 其中 $g(z)$ 在点 a 的邻域内解析, 且 $g(a) \neq 0$. 于是 $f'(z) = n(z-a)^{n-1}g(z) + (z-a)^n g'(z) \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$.

由于 $\frac{g'(z)}{g(z)}$ 在点 a 的邻域内解析, 故 a 必为 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且 $\operatorname{Res}_{z=a} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = n$.

(2) 如 b 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 则在点 b 的去心邻域内有 $f(z) = \frac{h(z)}{(z-b)^m}$ 其中 $h(z)$ 在点 b 的邻域内解析, 且 $h(b) \neq 0$.

由此易得 $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)}$, 而 $\frac{h'(z)}{h(z)}$ 在点 b 的邻域内解析. 故 b 必为 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一阶极点, 且 $\operatorname{Res}_{z=b} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] = -m$.

Theorem 7.7 (对数函数与零点极点个数关系)

设 C 是一条周线, $f(z)$ 符合条件:

(1) $f(z)$ 在 C 的内部是亚纯的.

(2) $f(z)$ 在 C 上解析且不为零.

则有 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(f, C) - P(f, C)$

式中 $N(f, C)$ 与 $P(f, C)$ 分别表示 $f(z)$ 在 C 内部的零点与极点的个数 (一个 n 阶零点算作 n 个零点, 一个 m 阶极点算作 m 个极点)

Proof 证由前文可知 $f(z)$ 在 C 内部至多只有有限个零点和极点

设 $a_k (k=1, 2, \dots, p)$ 为 $f(z)$ 在 C 内部的不同零点, 其阶相应地为 n_k

$b_j (j=1, 2, \dots, q)$ 为 $f(z)$ 在 C 内部的不同极点, 其阶相应地为 m_j .

则根据引理知, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 C 的内部及 C 上除去在 C 内部有一阶极点 $a_k (k=1, 2, \dots, p)$ 及 $b_j (j=1, 2, \dots, q)$ 外均是解析的.

故由留数定理及引理得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}_{z=a_k} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] + \sum_{j=1}^q \operatorname{Res}_{z=b_j} \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^p n_k + \sum_{j=1}^q (-m_j) = N(f, C) - P(f, C). \end{aligned}$$

上述定理的左端是 $f(z)$ 的对数留数, 它有简单的意义. 为了说明这个意义, 我们将它写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{d}{dz} [\ln f(z)] dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C d[\ln f(z)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_C d[\ln |f(z)|] + i \int_C d[\arg f(z)] \right\}, \end{aligned}$$

函数 $\ln |f(z)|$ 是 z 的单值函数, 当 z 从 z_0 起绕行周线 C 一周回到 z_0 时, 有 $\int_C d[\ln |f(z)|] = \ln |f(z_0)| - \ln |f(z_0)| = 0$.

另一方面, 当 z 从 z_0 起沿周线 C 的正方向绕行一周而回到 z_0 时, $\arg f(z)$ 的值可能改变.

如图, 对应的 $w = f(z)$ 从 $w_0 = f(z_0)$ 起围绕原点 $w = 0$ 二周后又回到起点 $w_0 = f(z_0)$. 显然, $\arg f(z)$ 的终值 φ_1 与始值 φ_0 相差 4π .

于是我们得 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{i(\varphi_1 - \varphi_0)}{2\pi i} = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$

式中 $\Delta_C \arg f(z)$ 表示 z 沿 C 之正方向绕行一周后 $\arg f(z)$ 的改变量, 它一定是 2π 的整倍数.

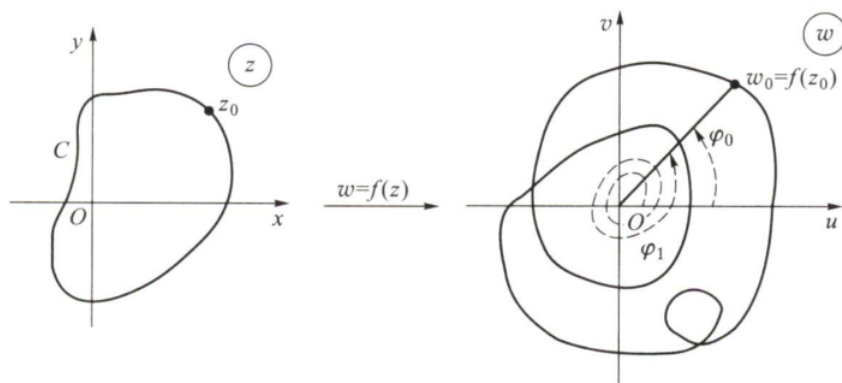


图 7.3

Theorem 7.8 (幅角原理)

(1) $f(z)$ 在 C 的内部亚纯

(2) $f(z)$ 在 C 上解析且不为零, 该条件可以减弱到 $f(z)$ 连续到 C , 且在 C 上不等于零

$f(z)$ 在周线 C 内部的零点个数与极点个数之差, 等于当 z 沿 C 之正方向绕行一周后 $\arg f(z)$ 的改变量 $\Delta_C \arg f(z)$ 除以 2π

$$\text{即 } N(f, C) - P(f, C) = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$$

特别说来, 如 $f(z)$ 在周线 C 上及 C 之内部均解析, 且 $f(z)$ 在 C 上不为零, 则 $N(f, C) = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$.

Theorem 7.9 (鲁歇定理 (Rouché))

设 C 是一条周线, 函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 满足条件:

(1) 它们在 C 的内部均解析, 且连续到 C .

(2) 在 C 上, $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

则函数 $f(z)$ 与 $f(z) + \varphi(z)$ 在 C 的内部有同样多 (几阶算作几个) 的零点. 即 $N(f + \varphi, C) = N(f, C)$.

Proof 证由假设知 $f(z)$ 及 $f(z) + \varphi(z)$ 在 C 的内部解析, 且连续到 C , 在 C 上有 $|f(z)| > 0$, $|f(z) + \varphi(z)| \geq |f(z)| - |\varphi(z)| > 0$.

这样一来, 这两个函数 $f(z)$ 及 $f(z) + \varphi(z)$ 都满足幅角定理的条件. 由于这两个函数在 C 的内部解析, 于是由定理

只需证明 $\Delta_C \arg [f(z) + \varphi(z)] = \Delta_C \arg f(z)$

$$\text{由关系式 } f(z) + \varphi(z) = f(z) \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] \Rightarrow \Delta_C \arg [f(z) + \varphi(z)] = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right],$$

根据条件 (2), 当 z 沿 C 变动时 $|\varphi(z)/f(z)| < 1$. 借助函数 $\eta = 1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ 将 z 平面上的周线 C 变成 η 平面上的闭曲线 Γ .

于是 Γ 全在圆周 $|\eta - 1| = 1$ 的内部, 而原点 $\eta = 0$ 又不在此圆周的内部. 即是说, 点 η 不会围着原点 $\eta = 0$ 绕行.

$$\text{故 } \Delta_C \arg \left[1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right] = 0$$

Theorem 7.10 (鲁歇定理推广)

设 C 是一条周线, 且设

(1) $f(z), \varphi(z)$ 在 C 内部亚纯, 且连续到 C .

(2) 沿 C , $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

试证 $N(f(z) + \varphi(z), C) - P(f(z) + \varphi(z), C) = N(f(z), C) - P(f(z), C)$.

Proof 由题中 (2), 沿周线 C 有 $|f(z)| > 0$, $|f(z) + \varphi(z)| > |f(z)| - |\varphi(z)| > 0$. 于是 $f(z)$ 及 $f(z) + \varphi(z)$ 都满足幅角原理条件, 故有

$$N(f(z) + \varphi(z), C) - P(f(z) + \varphi(z), C) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + \varphi(z)], \quad N(f(z), C) - P(f(z), C) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z).$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg[f(z) + \varphi(z)] &= \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg\left[f(z) \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)} + 1\right)\right] = \frac{1}{2\pi} \left[\Delta_c \arg f(z) + \Delta_c \arg \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)} + 1\right) \right] \\ \text{令 } w &= \frac{\varphi(z)}{f(z)} + 1 \Rightarrow |w - 1| = \left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1 \text{ 所以 } w \text{ 的像是以 } 1 \text{ 为圆心但是半径小于 } 1 \text{ 即 } O \text{ 点在外面} \\ \Rightarrow \Delta_c \arg \left(\frac{\varphi(z)}{f(z)} + 1\right) &= 0 \\ \Rightarrow N(f(z) + \varphi(z), C) - P(f(z) + \varphi(z), C) &= \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg[f(z) + \varphi(z)] = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg f(z). \end{aligned}$$

Corollary 7.3

若函数 $f(z)$ 在区域 D 内单叶解析, 则在 D 内 $f'(z) \neq 0$ 但是显然其逆不真例如 e^z

Proof 证若有 D 的点 z_0 , 使 $f'(z_0) = 0$, 则 z_0 必为 $f(z) - f(z_0)$ 的一个 n 阶零点 ($n \geq 2$). 由零点的孤立性故存在 $\delta > 0$, 使在圆周 $C: |z - z_0| = \delta$ 上 $f(z) - f(z_0) \neq 0$, 在 C 的内部, $f(z) - f(z_0)$ 及 $f'(z)$ 无异于 z_0 的零点. 令 m 表示 $|f(z) - f(z_0)|$ 在 C 上的下确界, 则由鲁歇定理即知, 当 $0 < |a| < m$ 时, $f(z) - f(z_0) - a$ 在圆周 C 的内部亦恰有 n 个零点. 但这些零点无一为多重点, 理由是 $f'(z)$ 在 C 内部除 z_0 外无其他零点, 而 z_0 显然非 $f(z) - f(z_0) - a$ 的零点. 故令 z_1, z_2, \dots, z_n 表示 $f(z) - f(z_0) - a$ 在 C 内部的 n 个相异零点. 于是 $f(z_k) = f(z_0) + a$ ($k = 1, 2, \dots, n$). 这与 $f(z)$ 的单叶性假设矛盾.

Theorem 7.11 (分歧覆盖定理)

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 点 $z_0 \in D$, 记 $f(z_0) = w_0$. 设 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 n 阶零点, n 为正整数. 则对充分小的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$, 使得对满足 $0 < |a - w_0| < \delta$ 的 a , 函数 $f(z) - a$ 在圆 $|z - z_0| < \varepsilon$ 内恰有 n 个一阶零点. 即在点 z_0 附近, $f(z)$ 类似于函数 $w(z) = z^n$.

Proof 由点 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 n 阶零点知 $f(z)$ 非常值函数. 由解析函数零点孤立性知存在 $\varepsilon > 0$, 使得在 $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon$ 上, $f(z) - w_0$ 无零点. 取 $\delta = \min_{|z - z_0| = \varepsilon} \{|f(z) - w_0|\}$. 对任意固定的 $a \in B_\delta(w_0)$, 在 $|z - z_0| = \varepsilon$ 上有 $|w_0 - a| < \delta \leq |f(z) - w_0|$. 由鲁歇定理知 $f(z) - a$ 在 $|z - z_0| < \varepsilon$ 内的零点数为 $N(f(z) - a) = N(f(z) - w_0 + w_0 - a) = N(f(z) - w_0) = n$. 余下只需证明 $f(z) - a$ 的零点都是一阶零点. 事实上, 若 $n = 1$, 则显然 $f(z) - a$ 的零点都是一阶零点. 若 $n > 1$, 考虑 $[f(z) - a]' = f'(z)$. 由于 z_0 为 $f(z) - w_0$ 的 n 阶零点, 故 z_0 为 $f'(z)$ 的 $n - 1$ 阶零点. 于是可以让之前取的 ε 再小一些, 使得在 $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon$ 上, $f'(z)$ 没有异于 z_0 的零点. 从而在 $|z - z_0| = \varepsilon$ 的内部, $f(z) - a$ 的零点都是一阶零点. 证毕.

重要积分

$$1^\circ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$2^\circ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$3^\circ \text{Fresnel 菲涅尔积分 } \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$4^\circ \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

第 8 章 共形映射

8.1 解析变换特性

Theorem 8.1 (保域定理, 开映射定理)

设 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析且不恒为常数, 则 D 的像 $G = f(D)$ 也是一个区域.

推广: $w = f(z)$ 在扩充 z 平面上亚纯, 且不恒为常数, 则 $G = f(D)$ 为扩充 w 平面上的区域

Proof

首先证明 G 的每一点都是内点. 设 $w_0 \in G$, 则有一点 $z_0 \in D$, 使 $w_0 = f(z_0)$. 要证 w_0 为 G 的内点, 只需证明 w 与 w_0 充分接近时, w^* 亦属于 G

即是说, 只需证明, 当 w^* 与 w_0 充分接近时, 方程 $w^* = f(z)$ 在 D 内有解. 为此, 考察 $f(z) - w^* = f(z) - w_0 + w_0 - w^*$

由解析函数零点的孤立性, 必有以 z_0 为心的某个圆周 C , C 及 C 的内部全含于 D , 使得 $f(z) - w_0$ 在 C 上及 C 的内部 (除 z_0 外) 均不为零. 因而在 C 上 $|f(z) - w_0| \geq \delta > 0$. 对在邻域 $|w^* - w_0| < \delta$ 内的点 w^* 及在 C 上的点 z , 有 $|f(z) - w_0| \geq \delta > |w^* - w_0|$.

因此根据鲁歇定理, 在 C 的内部 $f(z) - w^* = [f(z) - w_0] + w_0 - w^*$ 与 $f(z) - w_0$ 有相同的零点个数.

于是 $w^* = f(z)$ 在 D 内有解.

其次, 要证明 G 中任意两点 $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$ 均可以用一条完全含于 G 的折线连接起来.

为此, 由于 D 是区域, 可在 D 内取一条连接 z_1, z_2 的折线 $C: z = z(t) (t_1 \leq t \leq t_2, z(t_1) = z_1, z(t_2) = z_2)$.

于是, $\Gamma: w = f[z(t)] (t_1 \leq t \leq t_2)$ 就是连接 w_1, w_2 的并且完全含于 G 的一条曲线.

从而, 参照柯西积分定理的古尔萨证明第三步, 可以找到一条连接 w_1, w_2 , 内接于 Γ 且完全含于 G 的折线 Γ_1 .

总结以上两点, 即知 $G = f(D)$ 是区域.

Corollary 8.1

设 $w = f(z)$ 在区域 D 内单叶解析. 则 $G = f(D)$ 也为区域. 这是显然的因为在区域 D 内单叶这就保证了不恒为常数

Corollary 8.2

D 为单连通区域, $f(z)$ 在 D 内单叶解析. 则 $G = f(D)$ 也是单连通区域

Proof 证: 由保域定理知道 $G = f(D)$ 也是区域, 下证 G 是单连通的

任取 G 内的一条可求长的若尔当闭曲线 Γ ; 令 $C = f^{-1}(\Gamma)$; 设 Γ 的内部为 G_1 下证 $G_1 \subseteq G$

任取 $w_0 \in G_1$

$$N(f(z) - w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(f(z) - w_0)'}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw}{w - w_0} = 1$$

因为经过变换原本逆时针可能改变方向所以正负号

$\Rightarrow f(z) - w_0$ 在 C 内有零点 z_0 ; 即 $w_0 = f(z_0)$; 由 $z_0 \in D \Rightarrow w_0 \in G \Rightarrow G_1 \subseteq G \Rightarrow G$ 为单连通