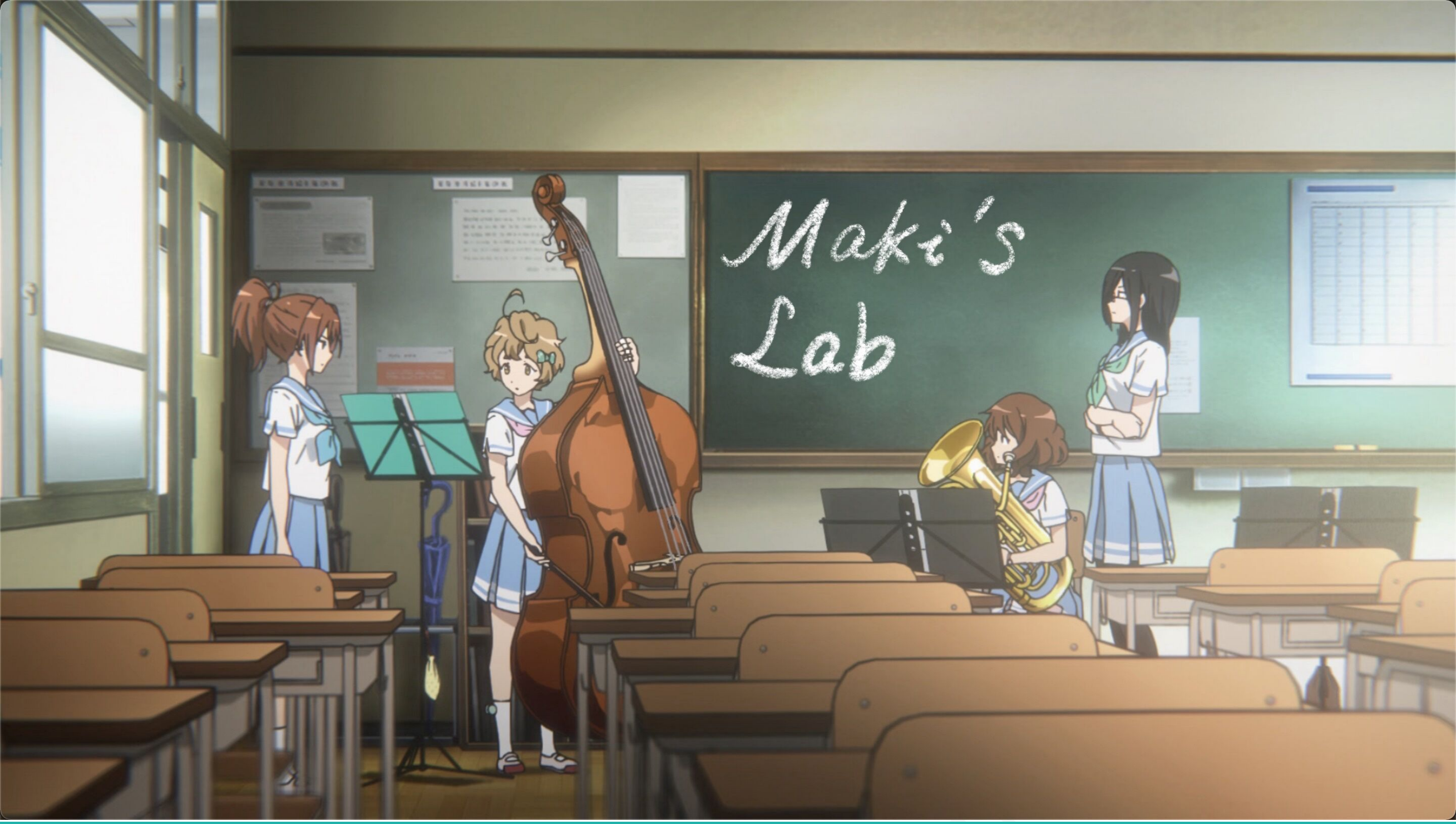
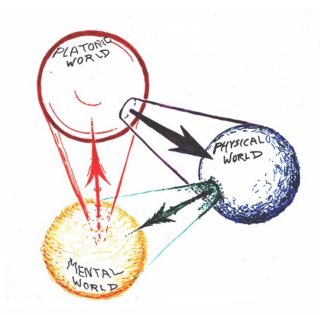


实分析习题讲义

作者：Hongxin Yang 南风

时间：January 7, 2024



目录

第 1 章 相关定理环境等的标识

证明 使用方法:begin+ proof+ end

注 使用方法:begin+ remark+ end

例题 1.1 使用方法；begin+ example + end

练习 1.1 使用方法:begin+ exercise +end

性质 使用方法:begin+ property + end

问题 1.1 使用方法:begin + problem +end

结论 使用方法:begin+ conclusion +end

笔记 使用方法；begin + note + end

定义 1.1

使用方法:begin+ definition+ end

命题 1.1

使用方法:begin+ proposition+ end

引理 1.1

使用方法:begin+ lemma+ end

推论 1.1

使用方法:begin + corollary + end

公理 1.1

使用方法:begin+ axiom + end

公设 1.1

使用方法:begin + postulate + end

第 2 章 集合论与基础点集习题

练习 2.1 设$E = \{\sqrt{m} - \sqrt{n} : m, n$是自然数$\}$, 则$E' = \mathrm{R}$.

证明 事实上, 对任意的$x \in \mathrm{R}$, 令$x_n = \sqrt{[(x+n)^2]} - \sqrt{n^2}$($[y]$表示不大于$y$的整数部分)
则有$\sqrt{(x+n)^2 - 1} - n < x_n < x$, 因而可得$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$

练习 2.2 设$\{a_n\}$是R中的有界点列, 且有$|a_n - a_{n+1}| \geqslant 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$, 则$\{a_n\}$也可能有无穷多个极限点

证明 构造$\{a_n\}$，$s.t.\{a_n\}$数项为$\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\}$，偶数项为$\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + 5\right\}$，$p$，$q = 1, 2, \cdots$
按照$N^+ \times N^+$的矩阵排列以蛇形对角排列
那么$|a_n - a_{n+1}| \geqslant 1 (n = 1, 2, \cdots)$, 且$\{a_n\}$有界$(3,1)(-3,2)(3,3)$ $\because \therefore \{a_n\}$也可能有无穷多个极限点

练习 2.3 设$E_k \subset \mathrm{R}^n (k = 1, 2, \cdots)$, 令$E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.若有$x_0 \in E'$, 试问：是否一定存在$E_{k_0}$, 使得$x_0 \in E'_{k_0}$?

证明 不一定取$E_k = \left\{\dfrac{1}{k}\right\}$ $\quad E = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \cdots\right\}$ $\quad$ 那么$x_0 = 0$但不存在$x_0 \in E'_{k_0}$

练习 2.4 设$F \subset \mathrm{R}$是有界闭集, $f(x)$是定义在F上的 (实值) 函数.
若对任意的$x_0 \in F'$, 均有$f(x) \to +\infty$ $(x \in F$ 且 $x \to x_0)$, 试证明F是可数集. $\left(F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \leqslant n\}\right)$

证明 对F作分解得$F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : \ f(x) \leqslant n\}$，设$F_n = \{x : f(x) \leq n\}$
$\because F$是有界闭集，且$F_n \subset F_1 \therefore F_n$是有界的，$n = 1, 2, \cdots$
若F_n含有无限个点，则存在聚点$x_0 \in F_n \exists \{x_k\} \subset F_n$，$x_k \to x_0 (k \to \infty)$，而$\lim_{k\to\infty} f(x_k) \leq n$, 这与题设矛盾!
$\therefore F_n$仅含有限个点，进而F_n可数，$F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$可数

练习 2.5 试在R中做出可列个互不相交的稠密可列集.

证明 设全体素数为$\{P_n\}$ $\quad$ 作$E_n = Q + \sqrt{P_n} \triangleq \{q + p_n : \ q \in \mathbb{Q}\}$而$Q$在$R$中稠密
故E_n为稠密可列集
若$\exists s, t$，$s.t.$ $E_s \cap E_t \neq \phi$，即$\exists a, b \in Q, P_y, P_z \in \{P_n\}$
$s.t. a + \sqrt{p_y} = b + \sqrt{P_z}$, 由$p_y \neq p_z$知$a \neq b$. $\quad a - b = \sqrt{P_z} - \sqrt{P_y} \Longrightarrow (a-b)^2 = P_z + p_y - 2\sqrt{P_z P_y}$
$2\sqrt{P_z P_y} = p_z + p_y - (a-b)^2$ $\quad LHS \notin Q$而$RHS \in Q$矛盾! $\Rightarrow E_m \cap E_n = \phi (m \neq n)$
$\therefore \{E_0$ 为可列个互不相交的和密可列集

练习 2.6 设$E \subset \mathbb{R}$是非空点集，若E中任一子集皆为闭集，试问E是有限集吗？

证明 (1)若E为无界点集,则E不一定为有限集，$E=\{1,2,3,\cdots\}$
(2)若E为有界点集，若E为无限集，由$Bolzano-Weierstrass$定理，$\exists x_0\in E'$存在各项异于x_0的数列$\{x_k\}\subset E, s.t. x_k\to x_0(k\to\infty)$
$\{x_k\}$聚点为X_0。而$x_0\notin\{X_k\}$，这与E中任一子集皆为闭集矛盾$\therefore E$为有限集

练习 2.7
设函数$f(x)$在$B(x_0,\delta_0)$上有定义.令$\omega_f(x_0)=\lim\limits_{\delta\to 0}\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x_0,\delta)\}$,我们称$\omega_f(x_0)$为$f$在$x_0$处的振幅.
若G是R^n中的开集,且$f(x)$定义在G上,则对任意的$t\in\mathrm{R}$,点集$H=\left\{x\in G:\omega_f(x)<t\right\}$是开集.

证明
不妨设$H\neq\varnothing$.对于H中$\forall x_0$,因$\omega_f(x_0)<t$,所以$\exists\delta_0>0$,使得$B(x_0,\delta_0)\subset G$,且有$\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x_0,\delta_0)\}<t$.
现在对于$x\in B(x_0,\delta_0)$,可以选取$\delta_1>0$,使得$B(x,\delta_1)\subset B(x_0,\delta_0)$.
显然有$\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x,\delta_1)\}<t$,从而可知$\omega_f(x)<t$,即$B(x_0,\delta_0)\subset H$.
这说明H中的点都是内点,H是开集.

练习 2.8 设$G\subset\mathrm{R}^n$是非空开集,$r_0>0$.若对任意的$x\in G$,作闭球$\overline{B(x,r_0)}$,试证明$A=\bigcup_{x\in G}\overline{B(x,r_0)}$是开集.

证明 $\forall x_0\in A$，$\exists x'\in G$，$s.t. x_0\in\overline{B(x',r_0)}$， $\because G$为开集： $\because\exists\delta'>0, s., B(x',\delta')\subset G_1$
$\forall x''\in B(x',\delta')(x''\neq x')$,有$|x''-x_0|<r_0$
$x_0\in B(x'',r_0),\exists\delta_0>0,\text{s.t.} B(x_0,\delta_0)\subset B(x'',r_0)\subset A$
$\therefore A=\bigcup\limits_{x\in G}\overline{B(x,r_0)}$ 是开集

练习 2.9 设$F\subset\mathrm{R}$是无限闭集,试证明存在F中可数子集E,使得$\bar{E}=F$.

证明 设$F\subset R$是无限闭集,试证明存在F中可数子集E，使得$\bar{E}=F$
对$\forall k\in N$，作开球集$B_k=\left\{B\left(1,\dfrac{1}{k}\right):r\in Q\right\}$ 即B_k是k固定,r取遍Q的开球全体，
若$B\left(r,\dfrac{1}{k}\right)\cap F\neq\phi$则从$B\left(r,\dfrac{1}{k}\right)\cap F$中取出一点.让$r$随着$Q$变化不断地从$B\left(r,\dfrac{1}{k}\right)\cap F$中取出与之前互异的点
再将这些点构成集合A_k.显然A_k为可数集.再让k取遍N，得到$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ E是可数子集
$-$方面$:E\subset F\Rightarrow\bar{E}\subset\bar{F}=F$
另一方面$:\forall x\in F,\forall k\in\mathbb{N}$,一定$\exists r\in\mathbb{Q}$ $s.t.$ $x\in B\left(r,\dfrac{1}{k}\right)$ (Q稠密性) 即$x\in B_k\cap F$
$\exists a\in E$ $s.t.|x-a|<\dfrac{2}{k}$， 即$a\in\left(x-\dfrac{2}{k},x+\dfrac{2}{k}\right)$ 又$\because k$是任意选取的故$x\in E'$， 即$x\in\bar{E}\Rightarrow F\subset\bar{E}$
综上， 存在F中可数子集E， $\gamma\cdot t.\bar{E}=F$

练习 2.10 设$E\subset\mathrm{R}^n$中的每点都是E的孤立点,试证明E是某开集和闭集的交集.

证明 令$A=\bar{E}$ $B=(E')^c$ (A为闭集而E'为闭集故取补为开集)
$A\cap B=\bar{E}\cap(E')^c=(E\cup E')\cap(E')^c=(E\cap(E')^c)\cup(E'\cap(E')^c)=E\cap(E')^c=E$

✍ **练习 2.11** 设F是$\mathbb{R}^n$中的有界闭集, G是$\mathbb{R}^n$中的开集, 且$F \subset G$
则存在$\delta > 0$, 使得当$|x| < \delta$时, 有$F + \{x\} \xrightarrow{\text{def}} \{y + x : y \in F\} \subset G$.

证明 $\forall y \in F$, 由于$y \in G$, 故$\exists \delta_y > 0$, 使得$B(y, \delta_y) \subset G$.因为 $\{B(y, \delta_y/2) : y \in F)\}$ 组成F的一个开覆盖
所以根据$Heine-Borel$有限子覆盖定理, 存在$y_1, y_2, \cdots, y_m \in F$, 使得$F \subset \bigcup_{k=1}^{m} B\left(y_k, \frac{\delta_{y_k}}{2}\right)$.
于是, 每一个$y \in F$至少属于某个$B(y_k, \delta_{y_k}/2)$, 且y与G^c中的任一点z之间的距离为$|y - z| \geqslant |z - y_k| - |y_k - y| > \delta_{y_k} - \delta_{y_k}/2 = \delta_{y_k}/2$.
现在取$\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{y_1}, \delta_{y_2}, \cdots, \delta_{y_m}\}$, 则当$|x| < \delta$时, 有$y + x \in G$, 即$F + \{x\} \subset G$.

✍ **练习 2.12** 设在$\mathbb{R}^n$中$\{G_a\}$是E的一个开覆盖, 试问$\left\{\overline{G_a}\right\}$能覆盖$\bar{E}$吗?

证明 不一定若$E = (0, 1)$ 而 $\{G_a\} = \left\{\left(0, \frac{1}{a}\right)\right\}$

✍ **练习 2.13** 设$\Gamma = \{[a_\alpha, b_\alpha] : \alpha \in [0, 1]\}$, 且$\Gamma$中的任意两个闭区间必相交, 试证明$\bigcap_{\alpha \in [0,1]} [a_\alpha, b_\alpha] \neq \varnothing$.

证明 对于某一个特别的$\alpha_0 \in [0, 1]$ $[a_{\alpha_0}, b_{\alpha_0}]$ 其与其他的$\{[a_\alpha, b_\alpha] : \alpha \in [0, 1]\}$都相交
不难就得到b_{α_0}就是$\{a_\alpha : [a_\alpha, b_\alpha], \alpha \in [0, 1]\}$的上界, 故有上确界
我们记$M = \sup\{a_\alpha : [a_\alpha, b_\alpha], \alpha \in [0, 1]\}$ WTS : $M \in \bigcap_{\alpha \in [0,1]} [a_\alpha, b_\alpha]$
根据上确界知识我们有$\forall \alpha$, $a_\alpha \leqslant M$ *so we only need to prove* $b_\alpha \geqslant M$
we use apagoge to prove. If $\exists \alpha^*$ *s.t.* $M > b^*$ *so according to* $M = \sup\{a_\alpha : [a_\alpha, b_\alpha], \alpha \in [0, 1]\}$
we can find the a_β *between* b_{α^*} *and* M *so* $[a_{\alpha^*}, b_{\alpha^*}] \cap [a_\beta, b_\beta] = \varnothing$*.Get contradiction*

✍ **练习 2.14** 设$F \subset \mathbb{R}$是非空可数闭集, 试证明F必含有孤立点.

证明 反证 : 若F不含孤立点
设$F = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$且$F$无孤立点则对某个$x_n \in F$点集$(R\setminus\{x_n\}) \cap f$在$F$中稠密
从而$\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} (R\setminus\{x_n\}) \cap F \text{在中也稠密但}}_{\text{可数个稠密开集交集为稠密集}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (R\setminus\{x_n\})\right] \cap F = \phi$矛盾即证

✍ **练习 2.15** 设$\{f_n(x)\}$是R上的非负渐降连续函数列，若在有界闭集F上$f_n(x) \to 0 (n \to \infty)$试证明$f_n(x)$在$F$上一致收敛于0

证明 对$\forall x \in F$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_x$，$st.$当$n > N_x$时，$f_n(x) < \varepsilon$
$\because f_n(x)$连续，$\therefore \exists \delta_x > 0, s.t.$对$\forall t \in B(x, \delta_x), f_n(t) < \varepsilon$ $\{B(x, \delta_x)\}$是F的一个开覆盖由$Heine-Borel$有限子覆盖定理
存在有限个开球$B(x_i, \delta x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)s.t.F \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta_{x_i})$
令$N = \max\{N_{x_1}, N_{x_2}, \cdots; N_{x_m}\}$则对$\forall x \in F$，当$n > N$时，$f_n(x) < \varepsilon \therefore f_n(x) \rightrightarrows 0 (n \to \infty), \forall x \in F$

练习 2.16 (i)设$f(x)$是定义在R上的实值函数,则点集$\{x\in R: f(x)$在点x处不连续,但右极限$f(x+0)$存在$\}$是可数集. 表明一个函数的第一间断点是之多可数的

(ii)设$f(x)$是定义在R上的实值函数,则点集$E=\left\{x\in R:\lim\limits_{y\to x}f(y)=+\infty\right\}$是可数集

证明

(i)令$S=\{x\in R: f(x+0)$存在$\}$,对每个自然数n,作$E_n=\{x\in R:$存在$\delta>0$,当$x',x''\in(x-\delta,x+\delta)$时,有$|f(x')-f(x'')|<1/n\}$.

显然,$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$是$f(x)$的连续点集,从而只需指出$S\backslash E_n(n=1,2,\cdots)$是可数集即可.

取定任意一个n,并设$x\in S\backslash E_n$,则存在$\delta>0$,使得$|f(x')-f(x+0)|<\dfrac{1}{2n}$, $\quad x'\in(x,x+\delta)$

从而当$x',x''\in(x,x+\delta)$时,就有$|f(x')-f(x'')|<1/n$.这说明$(x,x+\delta)\subset E_n$.

也就是说,$S\backslash E_n$中每一个点x是某个开区间$I_x=(x,x+\delta)$的左端点,且I_x与$S\backslash E_n$不相交.

因此,当$x_1,x_2\in S\backslash E_n$且$x_1\neq x_2$时,我们得到$I_{x_1}\cap I_{x_2}=\varnothing$.于是区间族$\{I_x: x\in S\backslash E_n\}$是可数的,即$S\backslash E_n$是可数集.

(ii)令$g(x)=\arctan f(x)(x\in R)$,且作点集$E=\{x\in R:\lim g_{y\to x}(y)=\pi/2\}$.从而易知$E$是可数集.

利用上一问就可以这表明x是$g(x)$的第一间断点的子集 □

练习 2.17 设$E\subset R$.

若每个$f\in C(E)$都是有界函数,则E是有界闭集

若每个$f\in C(E)$都在E上达到最大值,则E是有界闭集.

证明 (i)设$f(x)=x$, $x\in E$, 由$f\in C(E)$有界知E有界

$\forall x_0\in E'$,若$x_0\notin E$令$f(x)=\dfrac{1}{|x-x_0|}$,$x\in E$, $\exists\{x_k\}\subset E, X_k\to X_0(k\to\infty)\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)\to\infty$, 与$f$有界矛盾!

$\therefore x_0\in E$综上,E是有界闭集

(ii)设$f(x)=x;x\in E$, 则E有上界设$f(x)=-x$, $x\in E$, 则E有下界$\Rightarrow E$有界

$\forall x_0\in E'$,若$x_0\notin E$,令$f(x)=\dfrac{1}{|x-x_0|}$,$x\in E,\exists\{x_k\}\subset E, X_k\to x_0(k\to\infty)\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)\to\infty$, 故$f$在$E$上无最大值,矛盾!$\therefore x_0\in E$

练习 2.18 设定义在$E\subset R^n$上的函数$f(x)$满足:对E中的任一有界闭集K,均有$f\in C(K)$,则$f\in C(E)$.

$(Hint:$若$x_n\to x_0(n\to\infty)$,则点集$\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$是有界闭集.)

证明 $\forall x_0\in E$, 我们分三种情况考虑

(1)若x_0是孤立点,则$\exists\delta_1>0$, $s.t.B(x_0,\delta_1)\cap E=\{x_0\}$

$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\delta_1>0$, $s.t$当$x\in E\cap B(x_0,\delta_1)$时,$|f(x)-f(x_0)|=0<\varepsilon\Longrightarrow f(x)$在$x_0$处连续

(2)若x_0是内点, 则$\exists\delta_2>0$, $s.t.\bar{B}(x_0,\delta_2)\subset E$.

令$K=\bar{B}(x_0,\delta_2)$为有界闭集$\because f\in C(K)\Longrightarrow f(x)$在$x_0$处连续

(3)若x_0是聚点且是$f(x)$在E上的不连续点,则$\exists\varepsilon_0>0$,对$\forall n,\exists x_n\in E\cap B\left(x_0,\dfrac{1}{n}\right)$ $s.t.|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$

则$\{x_n\}\subset E$且$x_n\to x_0(n\to\infty)$

令$K=\{x_0,x_1,x_2,-\cdots x_n,\cdots\}$则$K$是有界闭集,进而有$f\in C(K)$,

即对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, $s.t$当$x\in K\cap B(x_0,\delta)$时$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

当$\frac{1}{n}<\delta$, 即$n>\frac{1}{\delta}$时， $|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$矛盾 $\Longrightarrow f(x)$在x_0处连续综上, $f\in C(E)$

练习 2.19 设$f\in C(\mathrm{R})$, 且当$G\subset\mathrm{R}$是开集时, $f(G)$必是开集, 则$f(x)$是严格单调函数.
($Hint$: $f((a,b))$是开集, $f(x)$在 $[a,b]$上的最大、最小值必在端点上取到.从而若$f(a)<f(b)$, 则对$a<x<b$, 必有$f(a)<f(x)<f(b)$.)

证明 $f((a,b))$是开集, $f(x)$在 $[a,b]$上的最大、最小值必在端点上取到.这点利用开映射即可知道
不妨反证法假设不是严格单调分有一段是常值函数和递增又递减的情形讨论即可

练习 2.20 函数连续点的结构
若$f(x)$是定义在开集$G\subset\mathrm{R}^n$上的实值函数, 则$f(x)$的连续点集是G_δ集.

证明 令$\omega_f(x)$为$f(x)$在x点的振幅, 易知$f(x)$在$x=x_0$处连续的充分必要条件是$\omega_f(x_0)=0$.
由此可知$f(x)$的连续点集可表示为$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{x\in G:\omega_f(x)<\frac{1}{k}\right\}$.因为 $\{x\in G:\omega_f(x)<1/k\}$ 是开集, 所以$f(x)$的连续点集是G_δ集.

练习 2.21 连续函数列——极限函数的不连续点结构是第一纲集合
设$f_k\in C(\mathrm{R}^n)\ (k=1,2,\cdots)$.若$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)\ (x\in\mathrm{R}^n)$, 则$f(x)$的不连续点集为第一纲集.

证明 注意到$f(x)$的连续点集的表示, 只需指出
$\left(G\left(\frac{1}{m}\right)\right)^c$ 是第一纲集 $\left(\text{其中注意}:G\left(\frac{1}{m}\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^\circ\left(\frac{1}{m}\right)\right)$.

对$\varepsilon>0$, 令$F_k(\varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{x\in\mathrm{R}^n:|f_k(x)-f_{k+i}(x)|\leqslant\varepsilon\}$, 易知$\mathrm{R}^n=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)\quad F_k(\varepsilon)\subset E_k(\varepsilon)$

$F_k^\circ(\varepsilon)\subset E_k^\circ(\varepsilon)\subset G(\varepsilon)$, $\quad\bigcup_{k=1}^{\infty}\overset{\circ}{\rightarrow}_k(\varepsilon)\subset G(\varepsilon)$.

由此知

$$\begin{aligned}
[G(\varepsilon)]^c&=\mathrm{R}^n\backslash G(\varepsilon)\subset\mathrm{R}^n\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^\circ(\varepsilon)\\
&=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k(\varepsilon)\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k^\circ(\varepsilon)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[F_k(\varepsilon)\backslash F_k^\circ(\varepsilon)\right]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\partial F_k(\varepsilon).
\end{aligned}$$

因为$F_k(\varepsilon)$是闭集, 所以$\partial F_k(\varepsilon)$是无处稠密集.
上面这句话是因为$F_k(\varepsilon)$是闭集 $\Longrightarrow\partial F_k(\varepsilon)\subset F_k(\varepsilon)$且$\partial F_k(\varepsilon)$边界是闭集故求闭包仍然为$\partial F_k(\varepsilon)$
若$\partial F_k(\varepsilon)$有内点$x_0$, 那么$x_0$邻域$B(x_0,\delta)$ 都应该包含于$\partial F_k(\varepsilon)$但是$\partial F_k(\varepsilon)$上的点邻域同样含有 $(F_k(\varepsilon))^c$ 矛盾
这说明 $(G(\varepsilon))^c$是第一纲集.

练习 2.22 设$f_n\in C([a,b])(n=1,2,\cdots)$, 且存在极限 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x), x\in[a,b]$
则对任意的$t\in\mathrm{R}$, 点集$\{x\in[a,b]:f(x)<t\}$是F_σ集.

证明 设$E=\{x\in[a,b]:f(x)<t\}$，我们证明$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x\in[a,b]:f_n(x)\leq t-k\}$

$\left\{x\in[a,b]:f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\right\}$ 为闭集 (利用 f_n 连续的拓扑描述即可) $\Longrightarrow \bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\in[a,b]:f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\right\}$ 为闭集

故 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\in[a,b]:f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\right\}$ 为 F_σ 集

记 $E_{k,n}=\left\{x\in[a,b];f_n(x)\le t-\frac{1}{k}\right\}$

$\forall x\in E,\exists k_0\in\mathbb{N},\ s.t. f(x)<t-\frac{1}{k_0};\ \exists n_0\in\mathbb{N}$, 当 $n>n_0$ 时, $f_n(x)\le t-\frac{1}{k_0}$

$\therefore x\in\varliminf_{n\to\infty}E_{k,n}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{k,n}\Longrightarrow x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{k,n}$

$\forall x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{k,n}$ 那么 $\exists k_0\in N,\ s.t. x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{k,n}\Longrightarrow\exists n_0\in\mathbb{N},\ s.t.$ 当 $n>n_0$ 时, $f_n(x)\le t-\frac{1}{k_0}$

令 $n\to\infty$ 得 $f(x)\le t-\frac{1}{k}<t\Longrightarrow x\in E$

故我们有 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}E_{k,n}\Longrightarrow\{x\in[a,b]:f(x)<t\}$ 是 F_σ 集

练习 2.23 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭集 $F\subset\mathrm{R}$ 上的连续函数列, 则 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集.

证明 设 $E_{m,n}^k=\left\{x\in F=|f_m(x)-f_n(x)|\le\frac{1}{k}\right\}$

对 $\forall x_0\in\left(E_{m,n}^k\right)',\exists\left\{x_p\right\}\subset E_{m,n}^k\ x_p\to x_0(p\to\infty)$ 又因为 $|f_m(x)-f_n(x)|\in C(F)$ 且 $\left|f_m\left(x_p\right)-f_m(x_p)\right|\le\frac{1}{k}$

令 $p\to\infty$ 得 $|f_m(x)-f_n(x)|\le\frac{1}{k}\Longrightarrow x\in E_{m,n}^k\ \therefore E_{m,n}^k$ 为闭集

令 $E_n^k=\bigcap_{m=n}^{\infty}E_{m,n}^k$. 则 E_n^k 为闭集; $\Longrightarrow$ 令 $E^k=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^k$, 则 E^k 为 F_σ 集 $\Longrightarrow$ 令 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E^k$, 则 E 为 $F_{\sigma\delta}$ 集

设 $f_n(x)$ 在 F 上任一收敛点为 x. 则对 $\forall k>0,\exists\mathbb{N},\ s.t.$ 当 $m,n>N$ 时, $|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{1}{k}$

$\therefore x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E_{m,n}^k$, 进而有 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E_{m,n}^k$

$\forall x\in E$, 对 $\forall k>0\ \exists j_0\in N$, $s.t.$ 当 $m\geqslant j_0$ 时, $|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{1}{k}$

当 $m,n>j_0$ 时亦有 $|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{1}{k}\Rightarrow x$ 为 $f_n(x)$ 在 F 上的收敛点

综上, 的 (x) 在 F 上的收敛点集是 $F_{\sigma\delta}$ 集

练习 2.24 设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, 则点集 $\left\{x\in\mathrm{R}:\lim_{y\to x}f(y)\text{存在}\right\}$ 是 G_δ 集.

证明 令 $w_\delta(x)=\underset{B(x,\delta)}{w}$, $\lim_{\delta\to 0}w_\delta(x)=w(x)$.

$\lim_{y\to x}f(y)$ 存在 $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,s.t.$ 当 $x',x''\in U'(x_0,\delta)$ 时, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

设 $E=\left\{x\in\mathbb{R}:\lim_{y\to x}f(y)\text{存在}\right\}$

现证 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R};\omega(x)<\frac{1}{n}\right\}$

$\forall x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}:\omega(x)<\frac{1}{n}\right\}$ 那么对 $\forall n\in N$ 均有 $\omega(x)<\frac{1}{n}\Longrightarrow\omega(x)=0$

对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0,\ s.t.$ 当 $0<|\delta|<\delta_0$ 时, $\omega_\delta(x)<\varepsilon$ 此时 $\forall x',x''\in U(x,\delta_0)$ 时, $|f(x')-f(x'')|\le\omega_\delta(x)<\varepsilon\Longrightarrow\lim_{y\to x}f(y)$ 存在 $\Rightarrow$ $x\in E$

$\forall x\in E,\lim\limits_{y\to x}f(y)$存在$,\forall n>0,\exists\delta>0\ \ s.t.\ \ \forall x',x''\in U^0(x,\delta)$时$,|f(x')-f(x')|<\dfrac{1}{n+1}$

$\therefore \sup\limits_{x',x''\in B(x,\delta)}|f(x')-f(x'')|=\omega_\delta(x)\le\dfrac{1}{n+1}$

$\omega(x)=\lim\limits_{\delta\to0}\omega_\delta(x)\le\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}\Longrightarrow x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}:\omega(x)<\dfrac{1}{n}\right\}$

$\therefore E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}:\omega(x)<\dfrac{1}{n}\right\}.$

下证$\left\{x\in\mathbb{R}:\omega(x)<\dfrac{1}{n}\right\}$是开集

$\forall x\in\left\{x\in\mathbb{R}:\omega(x)<\dfrac{1}{n}\right\}\Longrightarrow\lim\limits_{\delta\to0}\omega_\delta(x)=\omega(x)<\dfrac{1}{n}.$

对$\forall x'\in B(x,\delta_1)$，选取$\delta_2>0$，$s.t.B(x',\delta_2)\subset B(x,\delta_1)$

那么$\{\omega_\delta(x'):|\delta|<\delta_2\}\subset\{\omega_\delta(x)=|\delta|<\delta,\}\therefore w(x')=\lim\limits_{\delta\to0}\omega_\delta(x')\le\lim\limits_{\delta\to0}\omega_\delta(x)=w(x)<\dfrac{1}{n}$

$\therefore\left\{x\in\mathbb{R}:\omega(x)<\dfrac{1}{n}\right\}$是开集综上，点集$\left\{x\in\mathbb{R}:\lim\limits_{y\to0}f(y)\right.$ 存在$\}$是开集

练习 2.25 $[a,b]$上的导函数$f'(x)$的连续点在$[a,b]$中稠密.

证明 令$F_n(x)=\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$则$F_n(x)\to f'(x)$

因为$f'(x)$在$[a,b]$上都存在所以$f(x)$一定要在比$[a,b]$上更大的区间上连续

那么当n充分大$f(x+1/n)$也是落在了f连续的定义域里面,此时我们有$F_n(x)$连续

$f'(x)$的不连续点为第一纲集不妨设为$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ $\quad E_n$为无处稠密集

此时$E\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bar{E}_n$此时$(\bar{E}_n)^\circ=\varnothing\Longrightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bar{E}_n$无内点$\Longrightarrow\underbrace{E\text{无内点}\Longrightarrow E^c\text{是稠密集}}_{\text{利用}(E^\circ)^c=\overline{E^c}}\Longrightarrow$连续点稠密

练习 2.26 设$\{F_k\}\subset\mathrm{R}^n$是闭集列,且$\mathrm{R}^n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$,则$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k^\circ$在$\mathrm{R}^n$中稠密.

证明 $\forall x_0,\forall\delta>0\quad$令$J_\delta=[x_0-\delta,x_0+\delta]$

$J_\delta=J_\delta\cap\mathbb{R}^n=J_\delta\cap\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k\right)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[J_\delta\cap F_k]$

其中J_δ与F_k都是闭集。故J_δ是可数个闭集的交.而J_δ有内点

故由$Baire$定理知道一定$\exists k_0$，$s.t.J_\delta\cap F_{k_0}$有内点$\Longrightarrow(J_\delta\cap F_{k_0})^\circ\neq\varnothing\Longrightarrow(J_\delta)^\circ\cap(F_{k_0})^\circ\neq\varnothing\Longrightarrow J_\delta\cap(F_{k_0})^\circ\neq\varnothing$

所以$J_\delta\cap\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k^\circ\neq\varnothing$证毕

练习 2.27 若F_1,F_2是R^n中两个互不相交的非空闭集,则存在R^n上的连续函数$f(x)$,使得

$(i)0\leqslant f(x)\leqslant1\,(x\in\mathrm{R}^n)$;

$(ii)F_1=\{x:f(x)=1\},F_2=\{x:f(x)=0\}$.

证明 构造函数$f(x):f(x)=\dfrac{d(x,F_2)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)},\quad x\in\mathrm{R}^n$,它就是所求的函数.

练习 2.28

证明

第 3 章 测度论习题

练习 3.1 设$E \subset \mathrm{R}^n$.若对任意的$x \in E$,存在开球$B(x,\delta_x)$,使得$m^*(E \cap B(x,\delta_x)) = 0$,则$m^*(E) = 0$.

证明 依题设可知,存在E的可数覆盖球列$\left\{B_k \triangleq B\left(x_k,\delta_{x_k}\right)\right\}$,使得$E \subset \bigcup\limits_{k=1} B_k$,且$m^*(E \cap B_k) = 0$.($Lindoeff$引理)

从而知$E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E \cap B_k)$, $\quad m^*(E) \leqslant \sum\limits_{k=1} m^*(E \cap B_k) = 0$ □

练习 3.2 设$E \subset \mathrm{R}$,若$0 < a < mE$,证明存在闭集$F \subset E$,使得$mF = a$.

证明 1.先假定$mE < \infty$.,存在闭集$F \subset E$,使得$mF = m(E) > a$.

定义$f(t) = m(F \cap (-\infty,t])), t \in \mathrm{R}$.

对任意$t_1 < t_2, |f(t_1) - f(t_2)| = |m(F \cap (-\infty,t_1]) - m(F \cap (-\infty,t_2])| \leqslant |m((t_1,t_2]) \leqslant |t_1 - t_2|$, $f(t)$在R上连续

且$\lim_{t\to\infty} m(F \cap (-\infty,t]) = mF > a, \lim_{t\to-\infty} m(F \cap (-\infty,t]) = 0$.由推广的连续函数的介值定理,存在$t_0, f(t_0) = a$.

令$F_0 = F \cap (-\infty,t_0]$,则$F_0$是闭集,且$m(F_0) = a$.

2.若$mE = \infty$,则存在测度有限的单调增可测集列$\{E_n\}$,使得$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.其中$E_n = G_n \cap E, G_n = \{x : d(x,0) \leqslant n\}, n = 1,2,\cdots$.

由测度单调定理知道$mE = \lim_{n\to\infty} m(E_n) > a$所以存在$m\left(E_{k_0}\right) > a$那么根据1.的证明即可

存在$n, mE_n > a$.再用以上证明结果知存在集$F \subset E_n \subset E, mF = a$.

练习 3.3 设$E \subset \mathrm{R}^n$,证明存在G_δ型集$G \supset E$,使得对任意可测集$A \subset \mathrm{R}^n, m^*(E \cap A) = m(G \cap A)$

证明 先设$m^*E < \infty$.对任意n,存在开集G_n,使得$G_n \supset E$,且$m^*(G_n \backslash E) < 1/n$.

令$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$,则$G$是$G_\delta$型集,且$G \supset E, m^*(G \backslash E) = 0$.于是$mG = m^*E$.

对任意可测集A,由于$m^*E = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$, $\quad mG = m(G \cap A) + m(G \cap A^c)$,

以及$m(G \cap A^c) \geqslant m^*(E \cap A^c)$,可得$m^*(E \cap A) \geqslant m(G \cap A)$

另一方面,显然有$m(G \cap A) \geqslant m^*(E \cap A)$,于是$m^*(E \cap A) = m(G \cap A)$.

再考虑$m^*E = \infty$的情况.

设$T_k = \{x \in \mathrm{R}^n : k-1 \leqslant d(x,0) < k\}, n = 1,2,\cdots$,则对每一个$n$,设$E_n = E \cap T_n$.则$\{E_n\}$是一列互不相交且测度有限的集合.

由以上证明,存在G_δ型集$G_n \supset E_n$,使得对任意可测集$A, m^*(E_n \cap A) = m(G_n \cap A)$,且$m^*E_n = mG_n$.

令$G_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$.则$G_0 \supset E$,并且$G_0$是可测集.由于$T_n \cap A$是可测集,对任意整数$N$,

$$m^*(E \cap A) = m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \cap A\right)\right) \geqslant \underbrace{m^*\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} T_n \cap A\right)\right) = \sum_{n=1}^{N} m^*(E \cap T_n \cap A)}_{\text{可测分离可加性}} = \sum_{n=1}^{N} m^*(E_n \cap A) = \sum_{n=1}^{N} m(G_n \cap A).$$

令$N \to \infty$, $m^*(E \cap A) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(G_n \cap A) \geqslant m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \cap A\right) = m(G_0 \cap A)$.

反过来,不等式$m(G_0 \cap A) \geqslant m^*(E \cap A)$显然成立.因此$m^*(E \cap A) = m(G_0 \cap A)$.

由于G_0是可测集,存在G_δ型集$G \supset G_0$,使得$m(G \backslash G_0) = 0$

于是对任意可测集$A \subset \mathrm{R}^n, m^*(E \cap A) = m(G_0 \cap A) = m(G_0 \cap A) + m((G \backslash G_0) \cap A) = m(G \cap A)$ □

✍ **练习 3.4** 若有界集$E \subset \mathbb{R}^n$满足条件 : $\inf\{mG : G$ 是开集$, E \subset G\} = \sup\{mK : K$ 是紧集$, K \subset E\}$
证明 : E是可测集.

证明 设$a = \inf\{mG : G$ 是开集$, E \subset G\} = \sup\{mK : K$ 是闭集$, K \subset E\}$.
则对任意$n \in \mathbb{N}$, 由上、下确界的定义, 存在开集G_n和闭集K_n, 满足条件$K_n \subset E \subset G_n$且$a < mK_n + \frac{1}{n}, a > mG_n - \frac{1}{n}$.
注意到, $mK_n \leqslant mE < \infty, m\left(G_n \backslash K_n\right) = mG_n - mK_n < \frac{2}{n}$.由可测夹逼定理知, E可测.
当$m^*E = \infty$时, 结论不对.例如 : 设$Z \subset [0,1]$是不可测集.则$E = (-\infty, 0] \cup Z$满足习题的条件, 但不是可测集.
实际上E可测的充要条件是 : 对任意有限区间I, $E \cap I$满足习题的条件.此为原始的勒贝格可测集的定义.

✍ **练习 3.5** 设 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$中可测集列, 若$mE_n = 1(n = 1, 2, \cdots)$, 证明 : $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1$.

证明 对任意n, $m\left([0,1] \backslash E_n\right) = m([0,1]) - mE_n = 0$, 因此$m\left([0,1] \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left([0,1] \backslash E_n\right)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\left([0,1] \backslash E_n\right) = 0$.
从而, $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m([0,1]) - m\left([0,1] \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1 - 0 = 1$.

✍ **练习 3.6** 设$A, B \subset \mathbb{R}^n$且$A \cup B$可测, $m(A \cup B) < \infty$.若$m(A \cup B) = m^*A + m^*B$
那么A与B都可测.

证明 证明取G_δ型集$G \supset A$, 使得$mG = m^*A$, 则$K = (A \cup B) \backslash G$可测, 且$K \subset B$.
因$A \cup B \subset ((A \cup B) \backslash G) \cup G$, $m(A \cup B) \leqslant m((A \cup B) \backslash G)) + mG$由此,
$$
\begin{aligned}
mK = m((A \cup B) \backslash G) &\geqslant m(A \cup B) - mG \\
&= m^*A + m^*B - mG = m^*B.
\end{aligned}
$$
又$K \subset B$, 有$mK \leqslant m^*B$, 于是$mK = m^*B$.用卡拉泰奥多里条件
$m^*B = m^*(B \cap K) + m^*\left(B \cap K^c\right) = mK + m^*(B \backslash K)$, 因此$m^*(B \backslash K) = 0$, 从而$B \backslash K$可测.
而$B = K \cup (B \backslash K)$也可测.同理$A$也可测.

✍ **练习 3.7**

证明

✍ **练习 3.8**

证明

✍ **练习 3.9**

证明

✍ **练习 3.10**

证明

第 4 章 可测函数习题

✍ **练习 4.1 可测集的判定定义可以换为定义域中的一稠密集**

设$f(x)$是可测集E上的函数, D是R中的一个稠密集.

若对任意的$r \in D$, 点集$\{x : f(x) > r\}$都是可测集, 则对任意的$t \in \mathrm{R}$, 点集$\{x : f(x) > t\}$也是可测集.

证明 对任一实数t, 选取D中的点列$\{r_k\}$, 使得$r_k \geqslant t(k = 1, 2, \cdots)$; $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = t$.

我们有$\{x : f(x) > t\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{x : f(x) > r_k\}$.因为每个点集$\{x : f(x) > r_k\}$都是可测集, 所以$\{x : f(x) > t\}$是可测集.

✍ **练习 4.2 几乎处处有限函数局部有界化**

设$mE < \infty$, 若$f(x)$是E上$a.e.$有限的可测函数

证明对$\forall \delta > 0, \exists E_\delta \subset E$和$M > 0$, 使得$m(E \backslash E_\delta) < \delta$, 且对$\forall x \in E_\delta, |f(x)| \leqslant M$.

证明 由题意, $m(E[|f| = \infty]) = 0$.又$E[|f| < \infty] = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E[|f| \leqslant k]$.

由于$mE < \infty$, 以及$E[|f| \leqslant k] \subset E[|f| \leqslant k+1]$, $m(E[|f| < \infty]) = \lim\limits_{k\to\infty} m(E[|f| \leqslant k])$.

于是存在N, 对任意$k \geqslant N, m(E[|f| < \infty]) < m(E[|f| \leqslant k]) + \delta$.

取$E_\delta = E[|f| \leqslant k], M = k$, 则对任意$x \in E_\delta, |f(x)| \leqslant M$, 而$E \backslash E_\delta \subset E[|f| = \infty] \cup E[|f| < \infty] \backslash E[|f| \leqslant k]$

因此, $m(E \backslash E_\delta) \leqslant m(E[|f| = \infty]) + m(E[|f| < \infty] \backslash E[|f| \leqslant k]) \leqslant \delta$.

$m(E) < +\infty$”是必要的.否则, 例如$f(x) = x, x \in E = \mathbb{R}$.这时, 题中结论不成立.

✍ **练习 4.3**

设$\{f_n(x)\}$是可测集E上$a.e.$有限的可测函数列, 而且$a.e.$收玫于有限函数$f(x)$.这里$mE < \infty$.

证明对$\forall \delta > 0, \exists$常数$M > 0$与可测集$E_\delta \subset E, m(E \backslash E_\delta) < \delta$, 使得对一切$n$和$x \in E_\delta$, 有$|f_n(x)| \leqslant M$.

证明 由题意, $e_n = E[|f_n| = \infty], e_0 = E[f_n \nrightarrow f]$都是零测度集, 因此, $E_1 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} e_n$是零测度集.

设$E_2 = E \backslash E_1$, 则对任意$x \in E_2, \sup\{|f_n(x)| : n \in \mathrm{N}\} < \infty$.因此, $\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathrm{N}\}$是$E$上几乎处处有限的函数

由上个习题, 存在$E_\delta \subset E$, 和$M > 0$, 使得$m(E \backslash E_\delta) < \delta, \sup\{|f_n(x)| : x \in E_\delta, n \in \mathrm{N}\} \leqslant M$

$m(E) < +\infty$”是必要的.否则, 例如$f_k(x) = x + \frac{1}{k}, x \in E = \mathbb{R}$.这时, 题中结论不成立.

✍ **练习 4.4** 若f是有限值可测函数，则$sgn(f)$可测

证明 即研究$sgn(f) < a$的可测性：$a \geq 1$时它是整个定义域E;

$0 < a \leq 1$时它是集合$\{f \leq 0\} = \{f > 0\}^c$是可测集的补集, 当然可测

$-1 < a \leq 0$时它是$\{f < 0\} = \{f \leq 0\} - \{f = 0\}$是可测集

$a \leq -1$时它是空集$\emptyset$。

练习 4.5 可测函数列的控制函数, 控制依测度收敛的极限函数

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在E上依测度收敛于 $f(x)$, 且对任意正整数n, $f_n(x) \leqslant g(x) a.e.$于$E$.

证明 : $f(x) \leqslant g(x) a.e.$于E.

证明 由里斯定理, 存在子列 $\left\{f_{n_k}(x)\right\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) a.e.$于$E$.

由于$f_{n_k}(x) \leqslant g(x)$, 由极限的保不等式性质, $f(x) \leqslant g(x)$在E上几乎处处成立.

练习 4.6 设在可测集E上, $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x)$, 而对任意正整数$n$和$a.e.$的$x \in E$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$

证明 : $f_n(x) a.e.$收敛于$f(x)$.

证明 由里斯定理, 存在子列 $\left\{f_{n_k}(x)\right\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$几乎处处成立.

由于 $\{f_n(x)\}$ 是单调函数列, 子列收敛可得到数列收敛, 因此$f_n(x)$几乎处处收敛于$f(x)$.

练习 4.7 设$E_n \subset E (n = 1, 2, \cdots)$, 对任意$A$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

(1) $\left\{\chi_{E_n}(x)\right\}$ 一致收敛于$\chi_E(x)$的 $\Longleftrightarrow$ 存在正整数N, 使得对任意$n \geqslant N$, $E_n = E$

(2) $\left\{\chi_{E_n}(x)\right\}$ 近一致收敛于$\chi_E(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{N\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_n)\right) = 0$;

(3) $\left\{\chi_{E_n}(x)\right\}$ $a.e.$收敛于$\chi_E(x)$ $\Longleftrightarrow$ $m\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_n)\right) = 0$;

(4) $\left\{\chi_{E_n}(x)\right\}$ 依测度收敛于$\chi_E(x)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} m(E \backslash E_n) = 0$

证明 (1)若存在N, 使得对任意$n \geqslant N$, $E_n = E$, 则$\chi_{E_n}(x) = \chi_E(x)$, 此时显然有$\chi_{E_n}(x)$一致收敛于$\chi_E(x)$.

反之, 若$\chi_{E_n}(x)$一致收敛于$\chi_E(x)$, 则对$\varepsilon = 1/2$, 存在N, 使得对任意$n \geqslant N$和任意$x \in \mathrm{R}$都有 $\left|\chi_{E_n}(x) - \chi_E(x)\right| < 1/2$.

由于χ_{E_n}, χ_E只取值0, 1, 因此对任意$n \geqslant N$和任意$x \in \mathrm{R}$, $\chi_{E_n}(x) = \chi_E(x)$, 即对任意$n \geqslant N$, $E_n = E$.

(2)若 $\lim\limits_{N\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_n)\right) = 0$, 则$\forall \delta > 0$, 存在$N$使得$m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_n)\right) < \delta$.

那么根据我们要证近一致收敛的定义, 我们只要证明在$E \backslash \left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_n)\right)$上一致收敛即可

而$E \backslash \left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_n)\right) = \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E_n$ 那么$\forall x \in \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} E_n \subset E$此时$\left|\chi_{E_n}(x) - \chi_E(x)\right| = 0$, 证毕

另一方面

若$\chi_{E_n}(x)$近一致收敛于$\chi_E(x)$

则$\forall \delta > 0$, 存在$E_\delta \subset E$, $m(E \backslash E_\delta) < \delta$, 使得$\chi_{E_n}(x)$在$E_\delta$上一致收敛于$\chi_E(x)$

即$\chi_{E_n \cap E_\delta}(x)$在$E_\delta$上一致收敛于$\chi_{E_\delta}(x)$. 由 (1)的结论, 存在$N$, 对任意$n \geqslant N$, $E_n \cap E_\delta = E_\delta$, 所以$E_\delta \subset E_n$, 即 $(E \backslash E_n) \cap E_\delta = \varnothing$.

于是$m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_n)\right) \leqslant m\left(\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} (E \backslash E_\delta)\right) = m(E \backslash E_\delta) < \delta$. 由于$\delta$是任意的, 令$\delta \to 0$即可

(3) : 任意$k \in \mathrm{N}$, $\left\{x : \left|\chi_{E_n}(x) - \chi_E(x)\right| \geqslant 1/k\right\} = E \backslash E_n$

因此

$$
\begin{aligned}
&\{x:\chi_{E_n}(x)\nrightarrow\chi_E(x)\}\\
=&\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{x:\left|\chi_{E_n}(x)-\chi_E(x)\right|\geqslant 1/k\}\\
=&\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}(E\backslash E_n),
\end{aligned}
$$

因此$\chi_{E_n}(x)$几乎处处收敛于$\chi_E(x)$的充要条件是$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}(E\backslash E_n)\right)=0$.

(4) $\forall\sigma>0,\left\{x:\left|\chi_{E_n}(x)-\chi_E(x)\right|\geqslant\sigma\right\}=E\backslash E_n$, 因此, $\lim_{n\to\infty}m\left(\left\{x:\left|\chi_{E_n}(x)-\chi_E(x)\right|\geqslant\sigma\right\}\right)=0$的充要条件是$\lim_{n\to\infty}m\left(E\backslash E_n\right)=0$.

✍ 练习 4.8

设$\{E_k\}$是R^n中可测集列, $f(x)$是R^n上的可测函数, 若$\chi_{E_n}(x)\xrightarrow{m}f(x)$
证明：存在可测集E, 使得$f(x)=\chi_E(x), a.e.$于R^n.

证明 存在子列$\left\{\chi_{E_{n_k}}(x)\right\}$, 使得$\lim_{k\to\infty}\chi_{E_{n_k}}(x)\to f(x)$几乎处处成立.由于对任意$x\in\mathrm{R}^n$, $\left\{\chi_{E_{n_k}}(x)\right\}\subset\{0,1\}$
因此$\mathrm{R}^n=E\cup E_0\cup E_1$, 其中$E=\{x:f(x)=1\}$; $E_0=\{x:f(x)=0\}$, $E_1=\left\{x:\left\{\chi_{E_{n_k}}(x)\right\}\text{不收玫}\right\}$.
由于不收玫的点是零测度集, 即$mE_1=0$.因此$f(x)=\chi_E(x)$几乎处处成立.

✍ 练习 4.9

设$\{f_n(x)\}$是E上有限可测函数列且$mE<\infty$.
求证：$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0 a.e.$于$E\Longleftrightarrow g_n(x)\xrightarrow{m}0$, 其中$g_n(x)=\sup\{|f_k(x)|:k\geqslant n\}$.

证明 设$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$在$E$上几乎处处成立
则由叶戈罗夫定理, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$E_\varepsilon\subset E$, $m\left(E\backslash E_\varepsilon\right)<\varepsilon$, $\{f_n(x)\}$在E_ε上一致收玫于0.
因此对任意$\sigma>0$, 存在N, 对任意$n\geqslant N$, 任意$x\in E_\varepsilon$, $|f_n(x)|<\dfrac{\sigma}{2}$.
由此, 对任意$n\geqslant N$, $g_n(x)=\sup\{|f_k(x)|:k\geqslant n\}\leqslant\dfrac{\sigma}{2}<\sigma$.因此, $E\left[|g_n|\geqslant\sigma\right]\subset E\backslash E_\varepsilon$, 从而$m\left(E\left[|g_n|\geqslant\sigma\right]\right)\leqslant m\left(E\backslash E_\varepsilon\right)<\varepsilon$.
这就证明了$\{g_n(x)\}$依测度收玫于0.

反之, 若$g_n\xrightarrow{m}0$, 由于$mE<\infty$, 存在$\left\{g_{n_i}(x)\right\}$, $\lim_{i\to\infty}g_{n_i}(x)=0$在$E$上几乎处处成立.
由于$\{g_n(x)\}$单调减, 在E上几乎处处成立$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=0$.由于$|f_n(x)|\leqslant|g_n(x)|$对任意$x\in E$成立, 因此$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$在$E$上几乎处处成

✍ 练习 4.10

若$f(x,y)$是定义在R^2上的实值函数, 且对固定的$x\in\mathrm{R}$, $f(x,y)$是$y\in\mathrm{R}$上的连续函数;
对固定的$y\in\mathrm{R}$, $f(x,y)$是$x\in\mathrm{R}$上的可测函数, 则$f(x,y)$是R^2上的可测函数.

证明 对每个$n=1,2,\cdots$, 作函数$f_n(x,y)=f\left(x,\dfrac{k}{n}\right)$, $\dfrac{k-1}{n}<y\leqslant\dfrac{k}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.
因为对任意的$t\in\mathrm{R}$, 有$\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2:f_n(x,y)<t\right\}=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left\{x\in\mathrm{R}:f\left(x,\dfrac{k}{n}\right)<t\right\}\times\left(\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$
所以$f_n(x,y)$是R^2上的可测函数.而由题设易知$\lim_{n\to\infty}f_n(x,y)=f(x,y),\quad(x,y)\in\mathrm{R}^2$
因为对于固定的x关于y连续，所以只要看当$n\to\infty$时，$\dfrac{k}{n}$充分趋近y, 利用归结原则$\left|\dfrac{k}{n}-y\right|<\dfrac{1}{n}\to0$

即得所证.

练习 4.11 设$E\times[0,1]$上$f(x,y)$满足 : $f(x,y)$是$x\in E$上的可测函数, 且$f(x,y)$是$y\in[0,1]$上的连续函数, 证明 : $M(x)=\max\{f(x,y):0\leqslant y\leqslant 1\}$是$E$上的可测函数.

证明 记 $[0,1]$ 中的有理数为 $\{r_n\}$, 则$M(x)\geqslant\sup\limits_n\{f(x,r_n)\}$.又存在$y_x\in[0,1]$, 使得$M(x)=f(x,y_x)\ (x\in E)$.
对任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$|y_x-y|<\delta$时, 有$f(x,y_x)<f(x,y)+\varepsilon\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}\{f(x,r_n)\}+\varepsilon$.
由此又得$M(x)\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}\{f(x,r_n)\}$.总之, 我们有$M(x)=\sup\limits_{n\geqslant 1}\{f(x,r_n)\}$.根据$f(x,r_n)$在$E$上的可测性可知, $M(x)$在E上可测.

练习 4.12
设$E\subset\mathbb{R}$是可测集, 定义在$E\times(0,1)$上的$f(x,y)$满足 : $f(x,y)$是E上 (y固定) 的可测函数, 又是 $(0,1)$上 ($x\in E$固定) 的连续函数
试证明 : $H(x)=\overline{\lim\limits_{y\to 0^+}}f(x,y),\quad h(x)=\underline{\lim\limits_{y\to 0^+}}f(x,y)$均在$E$上可测.

证明 令$H_n(x)=\sup\limits_{0<y<1/n}\{f(x,y)\}$, 我们有$H_n(x)\geqslant H_{n+1}(x)(n\in\mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to\infty}H_n(x)=\overline{\lim\limits_{y\to 0^+}}f(x,y)$.
令 $\{r_k\}$ 是 $(0,1/n)$ 中的有理数全体, 则得$H_n(x)=\sup\limits_{k\geqslant 1}\{f(x,r_k)\}=\sup\limits_{0<y<1/n}\{f(x,y)\}$.
由此知$H_n(x)$在E上可测, 因此$H(x)$在E上可测.类似地可证$h(x)$在E上可测.

练习 4.13 周民强解题指南 p111
定义在 $(0,1]\times(0,1]$上的$f(x,y)$满足 : $f(x,y)$是x的 (y固定) 可测函数, 又是y在 $(0,1]$上 (x固定) 的递增函数
试证明$f(x,y)$在 $(0,1]\times(0,1]$上可测.

证明 对每个$n\in\mathbb{N},t\in\mathbb{R}$
作点集 $(k=1,2,\cdots,2^n)$ $E_k(t)=\left\{x\in(0,1]:f\left(x,\dfrac{k-1}{2^n}\right)<t\leqslant f\left(x,\dfrac{k}{2^n}\right)\right\}$
易知$E_k(t)$是可测集, 且$E_i(t)\cap E_j(t)=\varnothing(i\neq j)$, $\bigcup\limits_{k=1}^{2^n}E_k(t)\subset(0,1]$.
又令

$$A_n(t)=\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\left\{x\in(0,1]:f\left(x,\frac{k}{2^n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\right),$$

$$B_n(t)=\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\left\{x\in(0,1]:f\left(x,\frac{k-1}{2^n}\right)<t\right\}\times\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\right),$$

从而对 $(x,y)\in B_n(t)\backslash A_n(t)$, 则只有唯一的$k$, 使得$x\in E_k(t)$, $f(x,(k-1)/2^n)<t$, 且由f对y的递增性可知, $y\leqslant k/2^n$.
又因 $(x,y)\bar{\in}A_n(t)$, $f(x,k/2^n)\geqslant t$, $y>(k-1)/2^n$, 所以 $(x,y)\in E_k(t)\times((k-1)/2^n,k/2^n]$.这说明

$$B_n(t)\backslash A_n(t)\subset\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(E_k(t)\times\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\right)$$

$$m\left(B_n(t)\backslash A_n(t)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{2^n}m\left(E_k(t)\right)\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}m\left(\bigcup_{k=1}^{2^n}E_k(t)\right)\leqslant\frac{1}{2^n},$$

$$m(B(t)\backslash A(t))=\lim_{n\to\infty}m\left(B_n(t)\backslash A_n(t)\right)=0.$$

令$\widetilde{E}(t)=\{(x,y):f(x,y)<t\}$, 则由$A_n(t)\subset\widetilde{E}(t)\subset B_n(t)\quad(n\in\mathbb{N},t\in\mathbb{R})$, 即得所证.

✍ **练习 4.14** 设$f(x)$定义在可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上,若$f^2(x)$在E上可测,且$\{x\in E:\ \ f(x)>0\}$是可测集,则$f(x)$在E上可测

证明 令$A=\{x\in E; f(x)>0\}$是可测集,则由E是可测集,知$B=\{x\in E: f(x)\le 0\}=E\backslash A$是可测集
则$\chi_A(x),\chi_B(x)$是R^n上的可测函数，且$f(x)=|f(x)|\cdot(x_A(x)-x_B(x))$
对$\forall t<0,\{x\in E;|f(x)|>t\}=E$是可测集 (空集而已)
对$\forall t\geqslant 0$, 由$f^2(x)$在E上可测知 $\left\{x\in E: f^2(x)>t^2\right\}=\{x\in E:|f(x)|>t\}$是可测集
$\therefore |f(x)|$是E上的可测函数 $\Longrightarrow f(x)=|f(x)|\cdot(\chi_A(x)-\chi_B(x))$ 是E上可测函数

✍ **练习 4.15** 记$\mathscr{F}$为 $(0,1)$上的一个连续函数族,则函数$g(x)=\sup\limits_{f\in F}\{f(x)\}, h(x)=\inf\limits_{f\in f}\{f(x)\}$是 $(0,1)$上的可测函数

证明 对$\forall t\in\mathbb{R}$, 设$E_t=\{x\in(0,1): g(x)>t\}$
若$x_0\in E_t$, 即$g\left(x_0\right)=\sup\limits_{t\in F}\{f(x)\}>t$ 取$\varepsilon_0=g\left(x_0\right)-t>0,\exists f\in F,\ \ s.t. f\left(x_0\right)>g\left(x_0\right)-\varepsilon_0\neq t$
$\because f$在 $(0,1)$上连续 $\therefore\exists\delta_0>0, st$当$x\in B\left(x_0,\delta_0\right)$ 时, $f(x)>t\Longrightarrow g(x)\geqslant f(x)>t$
$\Longrightarrow B\left(x_0,\delta_0\right)\subset E_t\Longrightarrow x_0$为$E_t$的内点 $\Longrightarrow E_t$是开集 $\Longrightarrow E_t$为可测集 $\Longrightarrow g(x)$为可测函数

对$\forall t\in\mathbb{R}$, 设$Q_t=\{x\in(0,1): h(x)<t\}$
若$x_0\in Q_t$, 即$h\left(x_0\right)=\inf\limits_{t\in F}\{f(x)\}<t$ 取$\varepsilon_0=t-h\left(x_0\right)>0,\exists f\in F,\ \ s.t.\ \ h(x)<h\left(x_0\right)+\varepsilon_0=t$
$\because f$在 $(0,1)$连续, $\exists\delta_0>0,\ \ s.t.$当$x\in B\left(x_0,\delta_0\right)$ 时, $f(x)<t\Longrightarrow h(x)\le f(x)<t$
$B\left(x_0,\delta_0\right)\subset Q_t\Longrightarrow x_0$为$Q_t$的内点 $\Longrightarrow Q_t$是开集 $\Longrightarrow Q_t$为可测集 $\Longrightarrow h(x)$为可测函数
综上, $g(x),h(x)$是 $(0,1)$上的可测函数

✍ **练习 4.16**
设$f(x)$在$E\subset\mathbb{R}$上可测，G和F为$\mathbb{R}$中的开集和闭集,则点集$E_1=\{x\in E: f(x)\in G\}$，$E_2=\{x\in E: f(x)\in F\}$是可测集

证明 $\because G$是$\mathbb{R}$中开集, $\therefore$ 不妨没$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$
则$E_1=\{x\in E: f(x)\in G\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\{x\in E:\{(x)>a_n\}\cap\{x\in E: f(x)<b_n\})$
因为 $\{x\in E: f(x)>a_n\}\cap\{x\in E: f(x)<b_n\}$ 是可测集，进而有E是可测集
F^c为R中的开集，由上可知 $\{x\in E: f(x)\in F^c\}$ 是可测集
$\therefore E_2=\{x\in E: f(x)\in E\}=\{x\in E: f(x)\notin F^c\}=E\mid\{x\in E: f(x)\in F^c\}$ 是可测集综上, 点集E_1,E_2是可测集

✍ **练习 4.17** 设$f(x),f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是$E$上的实值可测函数.
若对任给$\varepsilon>0$以及$\delta>0$, 存在E中可测子集e以及K, 使得$m(E\backslash e)<\delta$, 且有 $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon\quad(k>K,x\in e)$.
试问这是哪种意义下的收敛?

证明 答案: 依测度收敛. 只要注意集合是放在两个任意之后的所以跟前面两个都有关系不要想当然的就是近一致收敛

✍ **练习 4.18** 设 $\{f_k(x)\}$ 在E上依测度收敛于零, $g(x)$是E上实值可测函数.
若$m(E)=+\infty$, 试说明 $\{g(x)f_k(x)\}$ 在E上不一定依测度收敛于零

证明 提示：$g(x)=x, f_k(x)=1/k)$

练习 4.19 $\forall r\in\mathbb{Q}$.如果集合$E[f=r]$可测,问f是否可测?

证明 $\forall r\in\mathbb{Q}$,集合$E[f=r]$可测,则f未必可测.

例如,设E是$\mathbb{R}$中不可测集,令$f(x)=\begin{cases}\pi, x\in E,\\ e, x\notin E,\end{cases}$,则$E[f=r]=\emptyset$为可测集.但$E[f>e]=E$不可测,故$f(x)$在$\mathbb{R}$上不可测.

练习 4.20 函数$f(x)$在E上可测当且仅当对任意的$t\in\mathbb{R}, E[f=t]$是可测集.

证明 令A为$[0,1]$上的不可测集,定义$f(x)=x\ (x\in A)$

此时对于$\forall t\in\mathbb{R}; E[f=t]$为空集或者单点集因而是可测集,

但是$E[f>-1]=A$不可测

练习 4.21 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上可导,证明$f'(x)$在$(-\infty,\infty)$上可测.

证明 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$.

对每一个n, $f_n(x)=\dfrac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$是连续函数,因此是可测函数.可测函数列的极限也是可测函数,于是$f'(x)$是可测函数.

练习 4.22

设E是测度有限的可测集.$f(x)$是E上$a.e.$有限的可测函数.

证明对任意的$\varepsilon>0$,存在E上有界可测函数$g(x)$,使得$m(E[|f-g|>0])<\varepsilon$.

证明 显然$E=E[f=\infty]\cup\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E[-n\leqslant f\leqslant n]\right)$.又由于$m(E[f=\infty])=0$,而且$E[-n\leqslant f\leqslant n]\subset E[-(n+1)\leqslant f\leqslant n+1], n=1,2,\cdots$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}m(E[-n\leqslant f\leqslant n])=mE$

由于$mE<\infty, m(E\backslash E[-n\leqslant f\leqslant n])=mE-m(E[-n\leqslant f\leqslant n])\to 0(n\to\infty)$

那么对于$\forall\varepsilon>0$,存在N,使得$m(E\backslash E[-N\leqslant f\leqslant N])<\varepsilon$.

定义$m=-N, M=N, g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E[-N\leqslant f\leqslant N],\\ 0, & x\notin E[-N\leqslant f\leqslant N].\end{cases}$ $\Longrightarrow$ 显然g是有界的,显然g也是可测的(不妨用定义)

则$m(E[|f-g|>0])=m(\{x:\ x\notin E[-N\leqslant f\leqslant N]\})=m(E\backslash E[1/N\leqslant f\leqslant N])<\varepsilon$.

练习 4.23 设$\{f_n(x)\}$是$E=[0,1]$上实有限可测函数,满足条件:$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon$,使得$m\left(\bigcup\limits_{k=N_\varepsilon}^{\infty}E[|f_k|<\varepsilon]\right)=1$

证明:存在$E_0\subset[0,1]$且$m(E_0)=1$使得$\{f_n(x)\}$在E_0上一致收敛到0

证明 对任意正整数i,取$\varepsilon=1/i$,存在N_i,使得$m\left(\bigcup\limits_{k=N_i}^{\infty}E[|f_k|<1/i]\right)=1$.

记$E_i=\bigcup\limits_{k=N_i}^{\infty}E\left[|f_k|<1/i\right],E_0=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i$.

由于$E\backslash E_0=E\backslash\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E\backslash E_i)$, 因此$m\left(E\backslash E_0\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}m\left(E\backslash E_i\right)=0$.

于是我们只要证明$\{f_n(x)\}$在E_0上一致收敛于0就可以了.

$\forall\varepsilon>0$, 设$1/i<\varepsilon$.对任意$x\in E_0\subset E_i$.由E_i的定义, $|f_n(x)|<1/i<\varepsilon$对任意$n>N_i$成立, 这就证明了$\{f_n(x)\}$在E_0上一致收敛于0.

练习 4.24 设$\{f_n(x)\}$是定义在可测集E上的一列可测函数, 且对任意$\varepsilon>0$, 任意$\{a_n\}\subset\mathrm{R}^{+}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n m\left(E\left[|f_n|>\varepsilon\right]\right)=0$. 证明存在$E_0\subset E, mE_0=0$, 使得$\{f_n(x)\}$在$E\backslash E_0$上一致收敛于0.

证明 (1)先证明对任意$\varepsilon>0$, 存在N, 对任意$n\geqslant N, m\left(E\left[|f_n|\geqslant\varepsilon\right]\right)=0$.

倘若结论不对, 则存在$\varepsilon>0$和子列$\{n_k\}$, 使得$m\left(E\left[\left|f_{n_k}\right|\geqslant\varepsilon\right]\right)>0$, 而对任何$n\notin\{n_k\}, m\left(E\left[f_{n_k}|\geqslant\varepsilon\right]\right)=0$.

取$a_n=\begin{cases}\left(m\left(E\left[|f_n|\geqslant\varepsilon\right]\right)\right)^{-1}, & n\in\{n_k\},\\ 1, & n\notin\{n_k\}.\end{cases}$

则$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}m\left(E\left[\left|f_{n_k}\right|\geqslant\varepsilon\right]\right)=1\neq0$与$\lim\limits_{n\to\infty}a_n m\left(E\left[|f_n|\geqslant\varepsilon\right]\right)=0$矛盾.

(2)由此对任意$\varepsilon=1/k>0$, 存在N_k, 任意$n\geqslant N_k, m\left(E\left[|f_n|\geqslant1/k\right]\right)=0$.

于是$m\left(\bigcup\limits_{n=N_k}^{\infty}E\left[|f_n|\geqslant1/k\right]\right)\leqslant\sum\limits_{n=N_k}^{\infty}m\left(E\left[|f_n|\geqslant1/k\right]\right)=0$.

(3)定义$E_0=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N_k}^{\infty}E\left[|f_n|\geqslant1/k\right]$, 则$mE_0\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=N_k}^{\infty}m\left(E\left[|f_n|\geqslant1/k\right]\right)=0$.

(4)$\forall\varepsilon>0$, 存在k, 使得$1/k<\varepsilon$, 注意到$E\backslash E_0=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N_k}^{\infty}E\left[|f_n|<1/k\right]$

对任意$x\in E\backslash E_0$, 存在k, 使得$x\in\bigcap\limits_{n=N_k}^{\infty}E\left[|f_n|<1/k\right]$, 即对任意$n\geqslant N_k, x\in E\left[f_n|<1/k\right]$.

于是对$n\geqslant N_k, |f_n(x)|<1/k<\varepsilon$.

这就证明了$f_n(x)$在$E\backslash E_0$上一致收敛于0.

练习 4.25

设$f(x,y)$是定义在R^2上的连续函数.$g_1(x),g_2(x)$是$[0,1]$上的可测函数.证明$f\left(g_1(x),g_2(x)\right)$是$[0,1]$上的可测函数.

证明 因为$g_1(x),g_2(x)$是可测函数, 存在简单函数列$\{\varphi_n(x)\},\{\psi_n(x)\}$, 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=g_1(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=g_2(x)$.

(1)$f\left(\varphi_n(x),\psi_n(x)\right)$是简单函数.设$\varphi_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{N_1}a_i\chi_{E_i}(x),\psi_n(x)=\sum\limits_{j=1}^{N_2}b_j\chi_{F_j}(x)$

其中$\{E_i\}$和$\{F_i\}$是$[0,1]$中互相不交的可测集且$[0,1]=\bigcup\limits_{i=1}^{N_1}E_i=\bigcup\limits_{j=1}^{N_2}F_j$

则$f\left(\varphi_n(x),\psi_n(x)\right)=\sum\limits_{i=1}^{N_1}\sum\limits_{j=1}^{N_2}f\left(a_i,b_j\right)\chi_{E_i\cap F_j}(x)$是简单函数.

(2)由于$f(x,y)$是二元的连续函数, $f\left(g_1(x),g_2(x)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\varphi_n(x),\psi_n(x)\right)$是简单函数的极限, 因此$f\left(g_1(x),g_2(x)\right)$是可测函数.

练习 4.26 设$f(x)$在R上可测.若有$f(x+1)=f(x), a.e.x\in\mathrm{R}$

试作R上函数$g(x)$: $g(x) \xlongequal{a.e.} f(x).x \in \mathrm{R}$ 且$g(x)=g(x+1)(x \in \mathrm{R})$.

证明 作点集$E=\{x \in \mathrm{R}: f(x) \neq f(x+1)\}$, 且令$E^*=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}(E+\{n\})$, 再作函数$g(x)=\begin{cases} f(x), & x \notin E^* \\ 0, & x \in \widetilde{E} \end{cases}$ 即为所求.
首先E^*零测故$g(x) \xlongequal{a.e.} f(x)$ 再证$g(x)=g(x+1)$

练习 4.27 设$\{f_k(x)\}$是$[a,b]$上的实值可测函数列, 试证明存在正数列$\{a_k\}$, 使得$\lim\limits_{k \to \infty} a_k \cdot f_k(x)=0, \text{a.e.} x \in [a,b]$.

证明 选数列$\{b_n\}$, 且令$E_n=\{x \in [a,b]: |f_n(x)| \leqslant b_n\}$, 还满足$m([a,b] \backslash E_n)<1/2^{n+1}$.
令$a_n=1/(nb_n)\ (n \in \mathrm{N})$, 并考查$\varliminf\limits_{n \to \infty} E_n$.对$x_0 \in \varliminf\limits_{n \to \infty} E_n$, 存在$N$, 使得$x_0 \in E_n$, $\quad |f_n(x_0)| \leqslant b_n \quad (n \geqslant N)$.
从而知$|a_n f_n(x_0)| \leqslant 1/n \to 0 (n \to \infty)$, 又有$m\left([a,b] \backslash \varliminf\limits_{n \to \infty} E_n\right)=m\left(\varlimsup\limits_{n \to \infty}([a,b] \backslash E_n)\right) \leqslant \sum\limits_{n=k} m([a,b] \backslash E_n) \leqslant 1/2^k \to 0 \quad (k \to \infty)$.

练习 4.28 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的有界函数, 则$f(x)$在$\mathbb{R}$上几乎处处等于一个几乎处处连续的函数$\Longleftrightarrow$
存在$Z \subset \mathbb{R}$满足$m(Z)=0$, 且$f(x)$在$\mathbb{R} \backslash Z$上连续

证明 必要性显然.
为证充分性, 作函数$g(x)=\lim\limits_{0<\delta \to 0} \sup\{f(y): y \in \mathrm{R} \backslash Z, |y-x|<\delta\}$, 显然$f(x)=g(x), x \in \mathrm{R} \backslash Z$.
对$x \in \mathrm{R} \backslash Z$, 任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得$f(x)-\varepsilon \leqslant f(y) \leqslant f(x)+\varepsilon, \quad y \in \mathrm{R} \backslash Z$且$|y-x|<\delta$.
而对$x^{\prime}:|x-x^{\prime}|<\delta$, 有$y \in \mathrm{R} \backslash Z$且$|y-x|<\delta$, 使得$|y-x^{\prime}|<\delta^{\prime}=\delta-|x-x^{\prime}|$.由此知$g(x)-\varepsilon \leqslant g(x^{\prime}) \leqslant g(x)+\varepsilon$.

练习 4.29 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的可测函数列, $f(x)$是$[a,b]$上的实值函数.
若对任给的$\varepsilon>0$, 都有$\lim\limits_{n \to \infty} m^*(\{x \in [a,b]: |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0$, 试问$f(x)$是$[a,b]$上的可测函数吗?

证明 是的.依题设知, 对任意的$k \in \mathrm{N}$, 存在$\{n_k\}$, 有$m^*(E_k)<1/2^k$, $E_k=\left\{x \in [a,b]: \left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|>1/2^k\right\}$.
由此得$m^*\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=N}^{\infty} E_k\right)=0$, 故对$a.e.x \in [a,b]$, 有$x \in \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=N}^{\infty} E_k^c$.
从而又知存在N_0, 当$k \geqslant N_0$时, 有$x \in E_k^c$.这说明$\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right| \leqslant 1/2^k$, $\quad \lim\limits_{k \to \infty} f_{n_k}(x)=f(x), \quad \text{a.e.} x \in [a,b]$,

练习 4.30 设$m(E)<\infty, f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数
则$\{f_k(x)\}$在E上依测度收敛于$f(x)$的充分且必要条件是 : $\lim\limits_{k \to \infty} \inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(\{x \in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})\}=0$.

证明 必要性依题设知, 对任给$\varepsilon>0, \alpha<\varepsilon/2$, 存在$N$, 使得$m(\{x \in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})<\varepsilon/2 \quad (k \geqslant N)$.
从而得$\alpha+m(\{x \in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\})<\varepsilon(k \geqslant N)$.对$\alpha$取下确界更成立, 再令$k \to \infty$也然.
由此即得所证.
充分性记$E_k(\alpha)=\{x \in E: |f_k(x)-f(x)|>\alpha\}$
由假设知, 对任给$\varepsilon>0$, 存在N, 当$k \geqslant N$时有$\inf\limits_{\alpha>0}\{\alpha+m(E_k(\alpha))\}<\varepsilon$.
从而对每个$k: k \geqslant N$, 可取$\alpha_k>0$, 使得$\alpha_k+m(E_k(\alpha_k))<\varepsilon$.自然有$\alpha_k<\varepsilon(k \geqslant N)$.
现在令$\alpha_{\varepsilon}=\sup\limits_{k \geqslant N}\{\alpha_k\}$, 则$\alpha_{\varepsilon} \leqslant \varepsilon(k \geqslant N)$.

因此,对任给$\varepsilon > 0, 0 < \delta < \varepsilon$,存在$N$,使得$m\left(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \delta\}\right) < \varepsilon \quad (k \geqslant N)$.这说明$f_k(x)$在$E$上依测度收敛于$f(x)$.

练习 4.31 设$E \subset \mathrm{R}$且$m(E) < +\infty$, $\{f_n(x)\}$是E上实值可测函数列

则$f_n(x)$在E上依测度收敛于$f(x)$的充分必要条件是:$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} = 0, \quad \text{a.e.} x \in E$.

证明 必要性

依题设知,对任给$\varepsilon > 0, \sigma > 0$,存在$N$,当$n \geqslant N$时有$m\left(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\right) < \sigma$.

因为在点$x \in E$满足$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$时,必有$0 \leqslant F_n(x) < \varepsilon$,所以$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0, a.e. x \in E$.

充分性

由题设知,对$\forall \delta > 0, \varepsilon > 0$,存在$E_{\delta} \subset E$以及$N$,使得$m\left(E \backslash E_{\delta}\right) < \delta, \quad |F_n(x)| < \varepsilon \, (n \geqslant N, x \in E_{\delta})$.由此易知$f_n(x)$在$E$上依测度收玫于$f($

练习 4.32 设$f_n(x)$是$[0,1]$上的递增函数$(n = 1, 2, \cdots)$,且$f_n(x)$在$[0,1]$上依测度收玫于$f(x)$

则在$f(x)$的连续点$x = x_0$上,必有$f_n(x_0) \to f(x_0) \quad (n \to \infty)$.

证明 反证法.

假定$f_n(x_0)$当$n \to \infty$时不收敛于$f(x_0)$,则存在$\varepsilon_0 > 0$,以及$\left\{f_{n_k}(x_0)\right\}$,使得$f_{n_k}(x_0) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0$ 或$f_{n_k}(x_0) \leqslant f(x_0) - \varepsilon_0$.

若前一情形成立,则由x_0是f的连续点可知,存在$\delta > 0$,使得$f(x) < f(x_0) + \varepsilon_0/2 \quad (x_0 \leqslant x < x_0 + \delta)$.

由于$f_{n_k}(x) \geqslant f_{n_k}(x_0) \geqslant f(x_0) + \varepsilon_0 > f(x)$,故得$m\left(\left\{x \in [0,1] : f_{n_k}(x) > f(x)\right\}\right) \geqslant \delta \quad (k \in \mathrm{N})$.

但这与$f_n(x)$在$[0,1]$上依测度收敛于$f(x)$矛盾.对后一种情形,证略.

练习 4.33

证明

练习 4.34

证明

练习 4.35

证明

练习 4.36

证明

✍ **练习 4.37**

证明

✍ **练习 4.38**

证明

✍ **练习 4.39**

证明

第 5 章 积分论习题

练习 5.1 设$f(x), f_n(x)\ (n\in \mathrm{N}^+)$ 在E上可积, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \xlongequal{a.e.} f(x)$且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$

证明：对任意可测子集$e\subset E$有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_e |f(x)|\mathrm{d}x$

证明 由法图引理, $\int_e |f(x)|\mathrm{d}x = \int_e \varliminf\limits_{n\to\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x.$

又

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x - \int_e |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E\setminus e} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E\setminus e} \varliminf_{n\to\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_{E\setminus e} |f_n(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_E \varliminf_{n\to\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x - \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x$$

$$= \int_E |f(x)|\mathrm{d}x - \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x.$$

因此 $\int_e |f(x)|\mathrm{d}x \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_e |f(x)|\mathrm{d}x$

注 上述$f_n(x) \xrightarrow{a.e.} f$可以改为$f_n(x) \xrightarrow{m.} f$一样成立

证明：若不成立即：∃可测子集$A\subset E$；使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k|dx \neq \int_E |f|dx \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\left|\int_E |f_k|dx - \int_E |f|dx\right| \neq 0$

$\Longrightarrow \exists\varepsilon_0>0; \exists\{f_{n_k}\}$ 使得$\left|\int_E \left|f_{n_k}\right|dx - \int_E |f|dx\right| \geqslant \varepsilon_0$

但此时我们有$f_n(x) \xrightarrow{m.} f$那么$f_{n_k} \xrightarrow{m.} f \Longrightarrow f_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.e.} f$

那么根据我们已经证明的几乎处处收敛的结果就有：

在A上, $\left|\int_E \left|f_{n_{k_j}}\right|dx - \int_E |f|dx\right| < \varepsilon_0\ (j\to\infty)$ 矛盾

练习 5.2

设$f\in L(\mathrm{R}), f_n\in L(\mathrm{R})(n=1,2,\cdots)$, 且有 $\int_{\mathrm{R}} |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^2}\quad (n=1,2,\cdots)$ (右端的控制级数可以换为其余收敛的)

则$f_n(x)\to f(x)$, a.e.$x\in\mathrm{R}$.

证明 由题 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\mathrm{R}} |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\right) < \infty$由积分与级数换序知道 $\int_{\mathbb{R}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n-f| < \infty \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n-f| < \infty$ $a.e.$成立

反之若不然则存在一集合Z, $m(Z)>0, \forall x_0\in Z$有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x_0)-f(x_0)| = +\infty$

那么 $\int_{\mathbb{R}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n-f| \geqslant \int_Z\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n-f| = +\infty$矛盾

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n-f| < \infty$ $a.e.$成立 $\Longrightarrow |f_n-f|\to 0$ $a.e.$成立

练习 5.3 测度有限下，函数可积的一判据

设E可测, 且$mE<\infty$, $f(x)$在E上可测, $E_n = E[n-1\leqslant f<n]$

则$f(x)$在E上可积的充要条件是$\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|n|mE_n < \infty$.

证明 注意$f(x)$可积的充要条件是$|f(x)|$可积且$f(x)$可测.

先证必要性.若$f(x)$可积, 则$|f(x)|$也可积.

$$\begin{aligned}\infty > \int_E |f(x)|\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x + \sum_{n=0}^{-\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x\\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)mE_n + \sum_{n=0}^{-\infty}|n|mE_n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|n|mE_n + \sum_{n=0}^{-\infty}|n|mE_n - \sum_{n=1}^{\infty}mE_n\\ &= \sum_{-\infty}^{\infty}|n|mE_n - \sum_{n=1}^{\infty}mE_n.\end{aligned}$$

因为 $\{E_n\}$ 两两不交, $\sum_{n=1}^{\infty}mE_n = m\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right) \leqslant mE < \infty$, 因此 $\sum_{-\infty}^{\infty}|n|mE_n < \infty$.

再证充分性.若 $\sum_{-\infty}^{\infty}|n|mE_n < \infty$, 则

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x + \sum_{n=0}^{-\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n + \sum_{n=0}^{-\infty}|n-1|mE_n\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|n|mE_n + \sum_{n=0}^{-\infty}|n|mE_n + \sum_{n=0}^{-\infty}mE_n\\ &\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty}|n|mE_n + mE < \infty,\end{aligned}$$

于是$|f(x)|$可积.又$f(x)$可测, 所以$f(x)$可积.

练习 5.4 设 $\{f_n(x)\}$ 为E上可积函数列, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) a.e.$于$E$, 且 $\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant K$, K 为常数
证明$f(x)$可积.

证明 由法图引理, $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E \lim\limits_{n\to\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant K$.因此, $|f(x)|$可积.又$f(x)$可测, 因此$f(x)$可积.

练习 5.5 设$f(x)$是R上的L可积函数, 证明 : $\sum_{n=1}^{\infty} f(x+n)$在R上$a.e.$绝对收玫.

证明 记$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}|f(x+k)|$; 则$\forall j \in \mathbb{Z}$

$$\int_{[j,j+1]} F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[j,j+1]}|f(x+k)|dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{[j+k,j+k+1]}|f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx < \infty$$

故$F \in L[j,j+1]$, 即级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)$在 $[j,j+1](\forall j \in \mathbb{Z})$上几乎处处绝对收玫.因此, $\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)$在$\mathbb{R}$上乎处处绝对收敛.

练习 5.6 设$E \subset \mathrm{R}^n$为可测集, $f(x)$为E上非负L可积函数
证明 : 对任意$\varepsilon > 0$, 存在测度有限的可测集$E_0 \subset E$, 使得 $(L)\int_{E\setminus E_0} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$.

证明 令$G_n = \{x : d(x,0) < n\}$, $E_n = E \cap G_n$, 则$E_n \subset E_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, 且$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
定义$f_n(x) = \chi_{E_n}(x)f(x)$, 则 $\{f_n(x)\}$ 单调增且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

用莱维定理, $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

因此对任意$\varepsilon>0$, 存在N, 使得$\left|\int_{E\setminus E_N} f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_E f_N(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.因为$E_N\subset G_N$是测度有限的, 令$E_0=E_N$即可.

练习 5.7 设$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$是$E$上的非负可积函数, 则

$(i)F(x)=\left(\sum_{k=1}^m (f_k(x))^2\right)^{1/2}$ 在E上可积

$(ii)G(x)=\sum_{1\leqslant i,k\leqslant m}(f_i(x)f_k(x))^{1/2}$在$E$上可积.

证明 $F(x)\leqslant f_1+\cdots+f_m$故可积

$G(x)\leqslant\sum_{1\leqslant i,k\leqslant m}\frac{f_i+f_k}{2}$故可积

练习 5.8 设$f^3(x)$是$E(m(E)<+\infty)$上的非负可积函数，则$f^2(x)$在E上可积

证明 令$A=\{x\in E:f(x)\leq 1\}$, 则对$\forall x\in E\setminus A$, 有$f^2(x)\leq f^3(x)$

$\int_E f^2(x)dx=\int_A f^2(x)dx+\int_{E\setminus A} f^2(x)dx\leq m(A)+\int_{E\setminus A} f^3(x)dx\leq m(A)+\int_E f^3(x)dx<+\infty$

$\therefore f^2(x)$在E上可积

练习 5.9 设$f\in C[0,+\infty)$, 且$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 则$\forall a>0$, $\lim_{k\to\infty}\int_0^a f(kx)dx=aA$.

证明 因为$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$, 所以$\exists X>0$, 使得$f(x)$在$[X,+\infty)$上有界.而在$[0,X]$上, 由于$f(x)$连续, 因而也有界.

从而，$f(x)$在$[0,+\infty)$上有界.于是，由有界收敛定理，$\lim_{k\to\infty}\int_0^a f(kx)dx=\int_0^a\lim_{k\to\infty}f(kx)dx=\int_0^a Adx=aA$.

练习 5.10 设$f\in L(\mathbb{R})$, 且正项级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}<\infty$, 则$\lim_{k\to\infty}f(a_kx)=0, a.e.x\in\mathbb{R}$.

证明 只要证：级数$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_kx)|$几乎处处收敛, 即$F(x)$几乎处处有限, 即证：$F(x)$在$\mathbb{R}$上可积.

事实上, 由逐项积分定理, $\int_{\mathbb{R}}F(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{\infty}|f(a_kx)|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(a_kx)|dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}\cdot\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt<\infty$, 即$F\in L(\mathbb{R})$

练习 5.11 设$g\in L(E)$, $f_n\in L(E)(n\in\mathrm{N})$.若$f_n(x)\geqslant g(x), a.e.x\in E$ 则$\int_E\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.

证明 根据$Fatou$引理, 我们有$\int_E\varliminf_{n\to\infty}[f_n(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_E[f_n(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right)$.

这说明$\int_E\varliminf_{n\to\infty}[f_n(x)]\,\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$.证毕.

练习 5.12 设$g(x)$是E上的可测函数.若对任意的$f\in L(E)$, 都有$fg\in L(E)$, 则除一个零测集Z外, $g(x)$是$E\setminus Z$上的有界函数.

证明 事实上,如果结论不成立,那么一定存在自然数子列 $\{k_i\}$, 使得 $m(\{x\in E: k_i\leqslant |g(x)|<k_{i+1}\})=m(E_i)>0\quad (i=1,2,\cdots)$.

现在作函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sgn(x)}{i^{1+(1/2)}m(E_i)}, & x\in E_i,\\ 0, & x\in E_i\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots)$.

因为 $\displaystyle\int_E |f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}|f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1+(1/2)}m(E_i)}m(E_i)<+\infty$, 所以 $f\in L^1(E)$

但我们有所以 $f\in L^1(E)$, 但我们有 $\displaystyle\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k_i}{i^{1+(1/2)}m(E_i)}m(E_i)=+\infty$, 这说明 $fg\in L(E)$, 矛盾

练习 5.13 $\displaystyle\int_{[a,+\infty)}\frac{xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=o\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty,a>0)$.

证明 只需指出 $I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[a,\infty)}\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$ 即可.

令 $u=nx$, 则 $\displaystyle\int_{[a,\infty)}\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{[na,+\infty)}\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\mathrm{d}u=\int_{[(0,\infty)}\chi_{[na,+\infty)}(u)\frac{ue^{-u^2}}{1+u^2/n^2}\mathrm{d}u$.

注意到 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\chi_{[na,+\infty)}(u)\left(1+u^2/n^2\right)^{-1}ue^{-u^2}=0$,

$0\leqslant\chi_{[na,+\infty)}(u)\left(1+u^2/n^2\right)^{-1}ue^{-u^2}\leqslant ue^{-u^2}\quad(0\leqslant u<+\infty)$,

以及 ue^{-u^2} 在 $[0,+\infty)$ 上可积, 故根据控制收敛定理即得所证.

练习 5.14 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负可积, 且有 $E\subset(0,+\infty)$ $\displaystyle\int_E f(x)dx=1$ 那么 $\displaystyle\int_E f(x)\cos xdx\neq 1$

证明 反证法若 $\displaystyle\int_E f(x)\cos xdx=1\Longrightarrow\int_E f(x)(1-\cos x)=0\Longrightarrow f(x)(1-\cos x)\xlongequal{a.e.}0$

而 $1-\cos x=0$ 在 $\mathbb{R}$ 上仅有可数个点是个零测集, 所以 $f(x)\xlongequal{a.e.}0\Longrightarrow\displaystyle\int_E f(x)dx=0$ 矛盾

练习 5.15 设定义在 $E\times\mathrm{R}^n$ 的函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) 对每一个 $y\in\mathrm{R}^n$, $f(x,y)$ 是 E 上的可测函数;

(ii) 对每一个 $x\in E$, $f(x,y)$ 是 R^n 上的连续函数.

若存在 $g\in L(E)$, 使得 $|f(x,y)|\leqslant g(x), a.e. x\in E$, 则函数 $F(y)=\displaystyle\int_E f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 R^n 上的连续函数.

证明 即证: $\forall y_n\to y$, 有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F(y_n)=\lim_{n\to\infty}\int_E f(x,y_n)dx=\int_E f(x,y)dx$

因为 $f(x,y_n)$ 是可测函数, 所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x,y_n)=f(x,y)$ 且 $|f(x,y_n)|\leqslant g(x)\in L(E)\quad a.e. x\in E$

由控制收敛定理知道 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_E f(x,y_n)dx=\int_E f(x,y)dx$

练习 5.16 设 $f\in C([a,b]),\varphi\in C([a,b]),F\in L([a,b])$

且对 $x\in[a,b]$, 有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x),\quad\varphi_n\in C^{(1)}([a,b])\quad(n=1,2,\cdots).\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_n(x)=f(x)\varphi_n(x),\quad|f(x)\varphi_n(x)|\leqslant F(x)$,

试证明 $\varphi'(x)=f(x)\varphi(x),\quad x\in[a,b]$.

证明 由题: $|f(x)\varphi_n(x)|\leqslant F(x)\in L(E)\Longrightarrow f(x)\varphi_n(x)\in L(E)$ 且 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x)\varphi_n(x)=f(x)\varphi(x)$

$\displaystyle\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{[a,x]}f(t)\varphi_n(t)dt=\int_{[a,x]}f(t)\varphi(t)$

由题目 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,x]} f(t)\varphi_n(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,x]}\varphi_n'(t)dt=\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi(x)-\varphi(a))=\varphi(x)-\varphi(a)$

故 $\int_{[a,x]} f(t)\varphi(t)=\varphi(x)-\varphi(a)\Longrightarrow$ 两边对x求导即可

练习 5.17 证明：$\{\cos nx\}$ 在 $[-\pi,\pi)$ 不是依测度收敛到0的

证明 反证法，若 $\cos nx$是依测度收敛到0的

$\forall\varepsilon>0,\lim\limits_{n\to\infty} m(\{x:\ |\cos nx|>\varepsilon\})=0$而 $\{x:\ |\cos nx|>\sqrt{\varepsilon}\}\Longleftrightarrow\{x:\ \cos^2 nx>\varepsilon\}$

故 $\{\cos^2 nx\}$ 依测度收敛到0故存在 $\{\cos_i^2 nx\}\xrightarrow{a.e}0$而 $\cos_i^2 nx\leqslant 1\in L[-\pi,\pi)$

所以$0=\int_{[-\pi,\pi)}\lim\limits_{i\to\infty}\cos_i^2 nx=\lim\limits_{i\to\infty}\int_{[-\pi,\pi)}\cos_i^2 nx=\pi$矛盾

练习 5.18 设$f\in L(E)$，记$E_k=\left\{x\in E:|f(x)|<\dfrac{1}{k}\right\}$

试证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx=0$

证明 $\int_{E_k}|f(x)|dx=\int_E\chi_{E_k}|f(x)|dx\Longrightarrow 0\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\chi_{E_k}|f(x)|\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k}=0\Longrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\chi_{E_k}|f(x)|=0$

而 $\left|\chi_{E_k}|f(x)|\right|\leqslant|f(x)|\in L(E)$ 故 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|dx=\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f(x)|\chi_{E_k}=\int_E 0=0$

练习 5.19 设$f_k\in L(E)(k=1,2,\cdots)$，且$f_k(x)$在$E$上一致收敛于$f(x)$.

若$m(E)<+\infty$试证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$.

证明 即证$\forall\varepsilon>0.\exists k_0\in N$当$k>k_0$时自$\left|\int_E(f_k(x)-f(x))dx\right|<\varepsilon$

对上述ε，$\exists k_1\in\mathbb{N}$当$k>k_1$时有 $|f_k(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{m\mid E)}$

$\therefore\left|\int_E f_k(x)-f(x)dx\right|\leqslant\int_E|f_k-f|dx\leqslant\varepsilon$

练习 5.20 设$F\subset[a,b]$是疏朗闭集，则$\chi_F\in R[a,b]\Longleftrightarrow m(F)=0$.

证明 对任意的$x_0\in(a,b)\backslash F$，由于 $(a,b)\backslash F$为开集，所以存在$\delta>0$，使得$U(x_0,\delta)\subset(a,b)\backslash F$.

这时χ_F在$U(x_0,\delta)$上取值均为0，是常值函数.因而χ_F在x_0连续，从而χ_F在 $(a,b)\backslash F$上连续.

$\Longleftarrow$.若$m(F)=0$，则χ_F在 $[a,b]$上几乎处处连续.于是可知$\chi_F\in R[a,b]$.

$\Longrightarrow$.若$\chi_F\in R[a,b]$，则χ_F在 $[a,b]$上几乎处处连续.

反证法：假设$m(F)>0$，则必存在$x_0\in F$，使得χ_F在x_0连续，而$\chi_F(x_0)=1>0$

故存在$\delta>0$，使得当$x\in U(x_0,\delta)$时，$\chi_F(x)>0$，即$\chi_F(x)=1$，也即$x\in F$，故$U(x_0,\delta)\subset F$，所以$x_0\in F^\circ$.

但F是疏朗闭集，因而我们应该有$F^\circ\subset\bar{F}^\circ=\emptyset$.矛盾!因此，$m(F)=0$.

练习 5.21 设$f\in L(E)$，记$E_k=E[|f|\geq k]$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}k\cdot m(E_k)=0$.

证明 记$E_\infty = E[|f| = +\infty]$, 则$E_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = \lim_{k\to\infty} E_k$.而$f \in L(E)$, 故$m(E_\infty) = 0$.

从而, 由*Levi*定理

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot m(E_k) \le \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} |f(x)|dx = \lim_{k\to\infty} \int_E |f(x)| \cdot \chi_{E_k}(x)dx = \int_E |f(x)| \cdot \chi_{E_\infty}(x)dx = \int_{E_\infty} |f(x)|dx = 0.$$

练习 5.22

设$E_1, \cdots, E_n$是 $[0,1]$中n个可测集, 若 $[0,1]$内每一点至少属于这n个集合中的q个, 则$E_1, \cdots, E_n$中至少有一个的测度不小于$\frac{q}{n}$.

证明 假设$m(E_i) < \frac{q}{n}(1 \le i \le n)$, 则$q > \sum_{i=1}^{n} m(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)dx = \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x)dx \ge q$.矛盾!

练习 5.23 证明 : $\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^k t^{\frac{1}{k}}} dt = 1.$

证明 记$f_k(t) = \frac{1}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^k t^{\frac{1}{k}}}$, 则 $\lim_{k\to\infty} f_k(t) = e^{-t}$

当$t \ge 1$时, $0 \le f_k(t) \le \frac{1}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2} \le \frac{4}{t^2} \in L([1,\infty))$

而当$0 < t < 1$时, $0 \le f_k(t) \le t^{-\frac{1}{2}} \in L((0,1))$

故由*Lebesgue*控制收敛定理即得 $\lim_{k\to\infty} \int_{(0,\infty)} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{k}\right)^k t^{\frac{1}{k}}} dt = \int_{(0,\infty)} e^{-t}dt = 1.$

练习 5.24 设$f(x,t)$当$|t - t_0| < \delta$时作为x的函数在 $[a,b]$上可积, 且有常数K, 使$\left|f_t'(x,t)\right| \le K\ (a \le x \le b, |t - t_0| < \delta)$

则$\frac{\partial}{\partial t} \int_{[a,b]} f(x,t)dx = \int_{[a,b]} f_t'(x,t)dx.$

证明 记$g(t) = \int_{[a,b]} f(x,t)dx$以及$g_k(x,t) = \frac{f(x,t+h_k) - f(x,t)}{h_k}$, 其中 $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$.

由微分中值定理, 存在$0 < \theta_k < 1$, 使得$|g_k(x,t)| = \left|f_t'(x, t + \theta_k h_k)\right| \le K$.

于是, 由*Lebesgue*控制收敛定理

$$\int_{[a,b]} f_t'(x,t)dx = \int_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} g_k(x,t)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} g_k(x,t)dx = \lim_{k\to\infty} \frac{g(t+h_k) - g(t)}{h_k} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{[a,b]} f(x,t)dx.$$

练习 5.25 设$f(x)$在 $(0,\infty)$上可积且一致连续, 则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

证明 证假设$f(x) \nrightarrow 0(x \to \infty)$

则存在$\varepsilon_0 > 0$以及数列 $\{x_k\}$, 使得 $\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$, 但$|f(x_k)| \ge \varepsilon_0$.

而$f(x)$在 $(0,\infty)$上一致连续, 故对上述$\varepsilon_0 > 0$, 存在$\delta > 0$, 对任意的$x, y \in (0,\infty)$, 当$|x - y| < \delta$时, $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

取 $\{x_k\}$ 的一个递增子列 $\{x_{k_i}\}$, 使得$\left|x_{k_i} - x_{k_{i-1}}\right| > 2\delta$.令$E_i = U(x_{k_i}, \delta)$, 则$E_i \cap E_j = \emptyset(i \ne j)$, 且$m(E_i) = 2\delta$.

令$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, 则 $\int_{(0,\infty)} |f(x)|dx \ge \int_E |f(x)|dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |f(x)|dx > \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \left(\left|f(x_{k_i})\right| - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)dx \ge \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_0 \delta = +\infty.$

练习 5.26 设$D=[-1,1]\times[-1,1]$, 在D上定义$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$
则$f(x,y)$的两个累次积分存在且相等, 但$f(x,y)$在D上不可积.

证明 易见, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}f(x,y)dx\right)dy=\int_{-1}^{1}y\left(\int_{-1}^{1}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx\right)dy=0.$同理, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}f(x,y)dy\right)dx=0.$

但$\displaystyle\iint_D|f(x,y)|dxdy\geq\iint_{U^\circ(0,1)}\frac{|xy|}{\left(x^2+y^2\right)^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{|\sin2\theta|}{2r}drd\theta\geq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1\frac{\sin2\theta}{2r}drd\theta=\int_0^1\frac{dr}{4r}=+\infty.$

练习 5.27 设f与f_k都是E上几乎处处有限的非负可测函数, 且$f_k\xrightarrow{m}f$, 则$\displaystyle\int_E f(x)dx\leq\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx.$

证明 记$a=\displaystyle\int_E f(x)dx, a_k=\int_E f_k(x)dx.$不妨设$\displaystyle\varliminf_{k\to\infty}a_k=\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx<+\infty.$

用反证法.假设$\displaystyle\int_E f(x)dx>\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx$, 即$\displaystyle\varliminf_{k\to\infty}a_k<a$, 则存在$b>0$, 使得$\displaystyle\varliminf_{k\to\infty}a_k<b<a.$

于是, 存在子列$\left\{a_{k_i}\right\}$, 使得$a_{k_i}<b<a(\forall i\geq1)$.因为$f_k\xrightarrow{m}f$, 故$f_{k_i}\xrightarrow{m}f$.

从而由 Riesz 定理, 存在子列$\left\{f_{k_{i_j}}(x)\right\}$, 使得$f_{k_{i_j}}\xrightarrow{\text{a.e.}}f$.

于是由$Fatou$引理, $\displaystyle a=\int_E f(x)dx=\int_E\lim_{j\to\infty}f_{k_{i_j}}(x)dx\leq\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_{k_{i_j}}(x)dx=\varliminf_{k\to\infty}a_{k_{i_j}}\leq b<a.$矛盾!

练习 5.28

证明

练习 5.29

证明