Thm: 构造道定理.

$(X,\mathcal{T})$中 每一个子集的导集为闭 $\Longleftrightarrow$ 单点集的导集为闭.

Proof: "$\Longleftarrow$" $\forall A$为 为 X中任一子集. 只需证: $(A')' \subset A'$

$\forall x \in (A')'$ 故 $\forall U_x$ 为x开邻域 $U_x \cap (A' - \{x\}) \neq \phi$

且已知 $x \notin \{x\}'$ 故 $V = U_x - \{x\}'$ 为包含x的开邻域

故: $V \cap (A' - \{x\}) \neq \phi$

取 $y \in V \cap (A' - \{x\})$.

$\Longrightarrow$ $y \in U_x$ $y \notin \{x\}'$ $y \in A'$ $y \neq x$.

故存在 y的一开邻域 W st. $x \notin W$

故 $W \cap U_x \cap V$ 为y的一开邻域

又 $y \in A'$ $\Longrightarrow (W \cap U_x \cap V) \cap (A - \{y\}) \neq \phi$

$$(W \cap U_x \cap V) \cap (A - \{x\}) \overset{\because x \notin W}{=\!=} W \cap U_x \cap V \cap A$$

$$\supseteq W \cap U_x \cap V \cap (A - \{y\}) \neq \phi$$

故 $U_x \cap (A - \{x\}) \supseteq (W \cap U_x \cap V) \cap (A - \{x\}) \neq \phi$ $\square$.

1. 标准直线 $\mathbb{R}$ 上. 令 $X=\mathbb{R}-\{0\}$. 定义 $f: X\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

2: 由连续函数 $f_1\sim f_n$: $X\to\mathbb{R}$. 则 $f_1(x)=0$ ··· $f_n(x)=0$ 的解构成之子集 是闭.

proof:

$$\{x: f_1(x)=0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X: |f_1(x)|\leq \tfrac{1}{n}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in X: -\tfrac{1}{n}\leq f_1(x)\leq \tfrac{1}{n}\}$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty} f_1^{-1}[-\tfrac{1}{n},\tfrac{1}{n}]$$ 为 X 中闭

3. ① 任一严格单调满射 f: $[a,b]\longrightarrow[c,d]$ 都是同胚.

② f: $\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 满射. f 为一同胚 $\Longleftrightarrow$ f 为严格单调函数.

4: f: $X\longrightarrow Y$ 单射 则 f 为嵌入 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_X$ 是 s.t. f 连续的最粗拓扑.

proof:

分析: $\mathcal{T}_X$ 为使 f 连续 则必然 $\mathcal{T}_X\supseteq\{f^{-1}(U)\mid U$ 为 Y 中开$\}$.

而事实上 $\{f^{-1}(U)\mid U$ 为 Y 中开$\}$ 构成集族 为一 X 上的拓扑

"$\Longleftarrow$" 此时 $\mathcal{T}_X=\{f^{-1}(U)\mid U$ 为 Y 中开$\}$

考察: f: $(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow(f(X),\mathcal{T}_{f(X)})$ 这为一 bijection.

对后者任一开集: $V\cap f(X)$ (V 为 Y 中开).

$$f^{-1}(V\cap f(X))=f^{-1}(V)\cap X \xrightarrow[f^{-1}(V)\text{为}X\text{中开}]{:=f\text{连续}}$$ 为 X 中开

$\Longleftarrow$

令 $\mathcal{T}_0=\{f^{-1}(U)\mid U$ 为 Y 中开$\}$ 即为 st. f 连续最粗的

$\because f: X\to f(X)$ 同胚

故. 任一开集 $f(X)\cap V$ (V 为 Y 中开) 其 inverse image $f^{-1}(f(X)\cap V)$

$= X\cap f^{-1}(V) = f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$.

换言之 $\mathcal{T}_X\supseteq\mathcal{T}_0$

其次: 任取 $U\in\mathcal{T}_X$. 因 $f: X\to f(X)$ 是同胚 故 $f(U)$ 为 $f(X)$ 中开

此时: 存在 V 为 Y 中开 st. $f(U)=V\cap f(X)$

故 $f^{-1}(f(U)) = U = f^{-1}(V\cap f(X)) = f^{-1}(V)$.

故 $U\in\mathcal{T}_0$. $\Rightarrow \mathcal{T}_X\subseteq\mathcal{T}_0$

$\Longrightarrow \mathcal{T}_X=\mathcal{T}_0$.

36: X 为拓扑空间. $A\subset X$ A 在 X 中稠密. $f: X\longrightarrow Y$ 满射连续.

$f(A)$ 在 Y 中稠密.

下证 $\overline{f(A)}\supseteq Y$ $\forall y\in Y$ WTS: $V_y\cap f(A)\neq\phi$.

$y=f(x)$ 则 $f^{-1}(V_y)$ 为包含 x 的开邻域

故 $f^{-1}(V_y)\cap A\neq\phi$

$\Rightarrow V_y\cap f(A)\neq\phi$.

1. 设 A 为 X 中闭，B 是 Y 中闭。则 $A\times B$ 是 $X\times Y$ 中闭。

2. $f_i(x_1\cdots x_n)$ 均为实系数 n 元多项式。$1\le i\le m$。称代数方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1\cdots x_n)=0 \\ \vdots \\ f_m(x_1\cdots x_n)=0 \end{cases}$$

解集为一代数集。则其在 $\mathbb{R}^n$ 中是无处稠密的。

Proof：若 $\mathring{A}\ne\phi$ 故 $\exists(x_0,\cdots x_n)$ 包含其的一个开球 $\subset A$。

而 A 应为闭集(自行分析)。则 开球 $\subset A$ 均为解

故固定 $x_1\cdots x_n$ 不变 则 方程组仅是关于 x_0 方程组 但 有无穷多解。矛盾。

(X,d) 中 $S_d(x,\varepsilon)=\{p\in X \mid d(p,x)=\varepsilon\}$ 是球面

则任一闭球与球面是闭集。

Proof：给定一闭球 $\overline{B(x_0,\delta_0)}=\{y\in X: d(y,x_0)\le\delta_0\}\triangleq A$

下证 $A'\subset A$ 若非也 则

存在 $z_0\in A'$ $z_0\notin A$ 有 $\forall\varepsilon>0$ $B(z_0,\varepsilon)\cap A\ne\phi$ 且 $d(z_0,x_0)>\delta_0$

故可取 A 中一列点 y_n s.t. $d(y_n,z_0)<\frac{1}{n}$ 且 $d(y_n,x_0)\le\delta_0$

故 $\quad \delta_0 < d(z_0, x_0) \le d(z_0, y_n) + d(y_n, x_0) < \frac{1}{n} + \delta_0$

故令 $n \to \infty \quad \delta_0 < d(z_0, x_0) \le \delta_0$ 矛盾.

给定一球面. $S_d(x_0, \delta_0) := \{y \in X;\ d(y, x_0) = \delta_0\}$, 令 A.

断言 $A' \subset A$ 若非也

$\exists z_0 \in A' \quad z_0 \notin A \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad B(z_0, \varepsilon) \cap A \ne \phi \qquad d(z_0, x_0) \ne \delta_0$

可取 A 中一列 y_n st. $\quad d(y_n, z_0) < \frac{1}{n} \qquad d(y_n, x_0) = \delta_0$.

若 $d(z_0, x_0) > \delta_0$

则 $\delta_0 < d(z_0, x_0) \le d(y_n, z_0) + d(x_0, y_n) < \frac{1}{n} + \delta_0 \qquad$ 令 $n \to \infty$ 矛盾.

若 $d(z_0, x_0) < \delta_0$

则 $\quad \delta_0 = d(y_n, x_0) \le d(y_n, z_0) + d(x_0, z_0) < \frac{1}{n} + \underbrace{d(z_0, x_0)}_{\text{常}} \quad$ 矛盾

1. 设X为无限的T_2空间，则X中有无限个互不相交非空开集。

假设只有n个不交非空开集，则至少有一U里面有2点（∵无限）

对这2点利用T_2性矛盾

2. 在$\mathbb{R}$上 $\mathcal{B}=\{(-a,a) \mid a\in\mathbb{R},\ a>0\}$ 是一拓扑基，但其生成的空间是连通。

拓扑基定义 it is easy to check. 反证法证

3. X与Y连通，对 $A\subsetneq X$ $B\subsetneq Y$ 证：$X\times Y-A\times B$ 是$X\times Y$中连通集。

取定 $x_0\in X-A$ $y_0\in Y-B$ $\vec{p}=(x_0,y_0)\in X\times Y-A\times B$

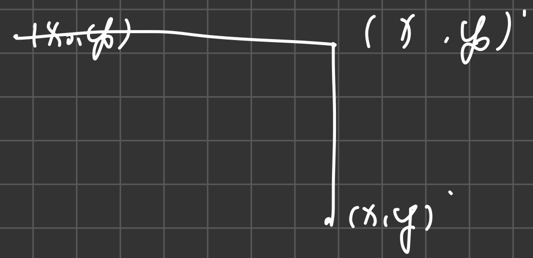
$\forall \underset{(x,y)}{\vec{q}}\in X\times Y-A\times B$ 说明 $\vec{q}$ 与 $\vec{p}$ 属于同一个连通分支

x与y不能同属于A与B

不妨设：

若 $x\notin A$ 考虑 $L_x=\{x\}\times Y$ $L_x\subseteq(X\times Y-A\times B)$ 且 $L_x\cong Y$ 连通

则：

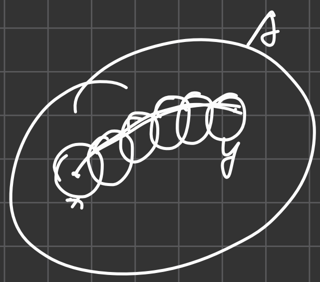


$(x_0,y_0)\sim(x,y_0)\overset{L_x}{\sim}(x,y)$

设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 一子集. 若 A 中二点, 可由包含于 A 中多段折线连接, 则称 A 是折线连通的.
证明: 对于 $\mathbb{R}^n$ 的开子集. 连通性 $\Longleftrightarrow$ 折线连通.

Proof: "$\Longleftarrow$" 折线连通 和 道路连通 知连通

"$\Longrightarrow$" 已知连通 则亦是道路连通的 故 $\forall x, y \in A$
$\exists \gamma: (I, 0, 1) \longrightarrow (A, x, y)$
又 $\gamma[0,1]$ 为紧集 且 A 开



故. 存在有限个开球覆盖 $\gamma[0,1]$ 且每个
开球包含于 A, 容易构造出折线连通.

设 X 为可数无限集, $\mathcal{T}_{fc}$ 为 X 上的有限补拓扑. 则 $(X, \mathcal{T}_c)$ 连通但非道路连通.
若 X 不连通. 则 $X = P \cup Q$ (P, Q 都开 $P \cap Q = \phi$)
$P = X - Q \Rightarrow Q$ 有限 同理 P 有限 则 X 应有限 矛盾

假设 $(X, \mathcal{T}_{fc})$ 为道路连通. $\forall x \neq y$ 则存在道路 $f: (I, 0, 1) \longrightarrow (X, x, y)$
$\forall p \in X$ $f^{-1}(p)$ 为闭子 $[0,1]$ 中 ($\because$ 单点在 X 中为闭) 这样的 $\{f^{-1}(p)\}$ 覆盖 $[0,1]$
且 $f^{-1}(p_1) \cap f^{-1}(p_2) = \phi$ 若 $p_1 \neq p_2$
但 $[0,1]$ 紧致度量空间 不可由可数个非空不交闭集之并
故 这样一族可数的 $\{f^{-1}(p)\}$ 只有有限个不为空.
$\Longrightarrow f([0,1])$ 为 X 中有限集.

$f([0,1])$ 作为 X 的子空间 其拓扑为离散拓扑

$\because f([0,1])$ 仅为 $\{a_1, \cdots a_m\}$

则：$a_1 = \{a_1\} \cap f([0,1])$ a_1 为 $f([0,1])$ 上的闭 —— ...

亦即 每个点 为闭，亦每个点为开

但 $f([0,1])$ 亦需连通 但 $f([0,1])$ 多于1个 $(\because x, y$ 在其中$)$ 只为离散拓扑

亦为不连通 矛盾

$X = \{a, b, c \cdots\}$ 可列点 则分出其上2种拓扑 一种紧致 一种非紧致.

平凡拓扑 有离散拓扑.

以上2种拓扑，空间不同胚 但都紧.

平凡拓扑 $\emptyset$ $\{\phi, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}-\mathbb{Z}\}$ 都紧 but 不同胚.

$\mathbb{R}^n$ 中 开球 非紧致

虽然可用 有界闭 知球 亦可用 $\{B(x, 1-\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ 一族开覆盖 无有限子覆盖说明

① 设 F, G 为 是度量空间 (X, d) 中两个不相交子集. 其中 F 闭，G 是紧 证明 $d(G, F) > 0$

② A 为 (X, d) 度量空间中的 紧子集

1° $diam(A) \triangleq \sup\{d(x,y) \mid x \in A, y \in A\}$ 则存在 $x, y \in A$ s.t. $diam(A) = d(x,y)$

2° 设 $x \in X$ 紧 A 则存在 $y \in A$ s.t. $d(x, A) = d(x, y)$

3° 设 B 是 X 中 闭集，$B \cap A = \phi$ 证 $d(A, B) > 0$

①: 若 $d(G, F) = 0$ 则存在一列 $x_n \in G$ $y_n \in F$ s.t. $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$

$\{x_n\}$ 有子列 $x_{n_k} \to x^{\#}$. G 为在紧 自闭 $x^{\#} \in G$

$$d(y_{n_k}, x^{\#}) \le d(x^{\#}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k})$$

令 $k \to \infty$ 得 $d(y_{n_k}, x^{\#}) \to 0$ 故 $y_{n_k} \to x^{\#}$ 但 y_{n_k} 位于 F(闭)中

$\Rightarrow x^{\#} \in F$ 则 $G \cap F \neq \phi$ 矛盾.

②1° 因 A 界 + 度量空间(Σ) $\Longrightarrow$ A有界闭 $\Longrightarrow$ $\mathrm{diam}(A) < +\infty$

由定义 存在一列 点集: $x_n, y_n \in A$ $d(x_n, y_n) \longrightarrow \mathrm{diam}(A)$

不妨设 $x_{n_k} \longrightarrow x^\#$ $y_{n_k} \longrightarrow y^\#$ 且 $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \longrightarrow \mathrm{diam}(A)$

则: 利用三角不等式 有 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) = d(x^\#, y^\#)$

而 $|\mathrm{diam}(A) - d(x^\#, y^\#)| \leq |\mathrm{diam}(A) - d(x_{n_k}, y_{n_k})| + |d(x_{n_k}, y_{n_k}) - d(x^\#, y^\#)|$

……

②2° 易知 $d(x, A) < +\infty$ 由定义: 存在一列 $y_n \in A$ $d(x, y_n) \longrightarrow d(x, A)$

$\{y_{n_k}\} \to y^\# \in A$ $|d(x, y^\#) - d(x, A)| \leq |d(x, A) - d(x, y_n)| + |d(x, y_n) - d(x, y^\#)|$

□

③:

设 (X, d) 为度量空间. $A \subset X$. 令 $U_\varepsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$ 称之为 A 的 ε邻域

对于 $\forall \varepsilon > 0$ 证明: $\mathbb{R}^n$ 的 连通子集 的 ε邻域 是道路连通的.

actually:

$d(x, A)$ 作为 $X \to \mathbb{R}$ 连续函数 故 $U_\varepsilon(A)$ 为开.

$\forall a, b \in A$. 则 $a \overset{A}{\sim} b$ 处于一个连通分支中. 而 $\mathbb{R}^n$ 局部道路连通 故其

连通分支与道路连通分支一致 故 $a \sim b$ 有道路.

$\forall a \in U_\varepsilon(A)$ $\forall b \in A$ 下证 这2点有道路

由 定义. $\exists c \in A$ $d(a, c) < \varepsilon$ 记 $\delta = d(a, c)$ actually. $B(c, \delta) \subseteq U_\varepsilon(A)$

故 存在 道路 (包含于 $U_\varepsilon(A)$) st. $\alpha: [0,1] \to (a, c)$

再来一条 $c \to b$ 的 复合

$\forall a \in U_\varepsilon(A)$ $\forall b \in U_\varepsilon(A)$ 同理.

设 (X,d) 为一度量空间，U 开，A 紧，且 $A\subseteq U$，则 U 亦包含了 A 的一个 ε 邻域。

$\forall x\in A$，$\exists r_x$ s.t. $B(x,r_x)\subseteq U$，则 $\{B(x,\frac{r_x}{2})\}$ 为 A 开覆盖

取出 $\{B(x_n,\frac{r_n}{2})\}_{n=1}^{m}$ 有限个

令 $\varepsilon=\min\{\frac{r_1}{2},\cdots,\frac{r_m}{2}\}$

下证 $U_A(\varepsilon)\subseteq U$

$\forall y\in U_A(\varepsilon)$，$\exists a\in A$ s.t. $d(y,a)<\varepsilon$.

设 $a\in B(x_1,\frac{r_1}{2})$，则 $d(y,x_1)\le d(y,a)+d(a,x_1)$

$$<\varepsilon+\frac{r_1}{2}$$

$$\le r_1.$$

$\Rightarrow y\in B(x_1,r_1)$ $\Longrightarrow$ $y\in U$. □.

R^n 中，V 闭，K 紧，$V\cap K=\phi$，前面已证 $d(V,K)>0$，下证：$\exists x_0\in V$，$y_0\in K$ s.t. $d(x_0,y_0)=d(V,K)>0$

定义：函数 $R^n\to R$，$x\longmapsto d(x,V)$

$d(x,V)$ 在 K 紧上取到最小值，则 $d(y_0,V)=d(V,K)>0$，$y_0\in K$.

令 $\delta=d(y_0,V)=d(K,V)>0$

$V\cap\overline{B(y_0,\delta+1)}$ 亦为紧，由 δ 定义：$\exists v_n\in V$ s.t. $d(y_0,v_n)\to\delta$.

故 n 充分大后 $v_n\in V\cap\overline{B(y_0,\delta+1)}$，故 $V\cap\overline{B(y_0,\delta+1)}\neq\phi$

则函数 $g(v)=d(y_0,v)$ 在 $V\cap\overline{B(y_0,\delta+1)}$ 上取到 min，设最小值 δ'，最小值在 $v^{\#}$ 取到

显然 $\delta'\ge\delta$

且 $d(y_0,v_n)\ge\delta'$，令 $n\to\infty$ 得 $\delta\ge\delta'$.

$\Rightarrow\delta=\delta'$，则最小值在 y_0 与 $v^{\#}$ 取到.

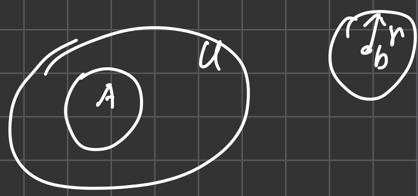
$\mathbb{R}^n$中. $U \subset \mathbb{R}^n$ 开; A 为紧集 $A \subset U$. 则 $d(A, \partial U) = d(A, X-U) > 0$.

A紧, $\mathbb{R}^n - U$闭 则 $\exists\, a \in A$ $b \in \mathbb{R}^n - U$. s.t. $d(A, \mathbb{R}^n - U) = d(a, b)$

若 $b \notin \partial U \Rightarrow b \in \operatorname{Int}(\mathbb{R}^n - U)$ 则 $\exists\, r > 0$ s.t. $B(b, r) \subseteq \mathbb{R}^n - U$.

则 取 $v = a - b$ 取充分小 $t > 0$

s.t. $b + tv \in B(b, r) \subseteq \mathbb{R}^n - U$.



$d(a, b+tv) < d(a, b)$ 与 当时b取法矛盾

故 $b \in \partial U$.

又因为 $\mathbb{R}^n - U \supseteq \partial U$ 则 $d(A, \mathbb{R}^n - U) \le d(A, \partial U)$.

且 $d(A, \partial U) \le d(a, b) = d(A, \mathbb{R}^n - U)$. $\square$

$\mathbb{R}^n$中, U is open. A is 紧集 且 $A \subset U$. $\delta = d(A, \partial U) = d(A, X-U) > 0$

则 A的δ邻域 $\subset U$.

若 $x \in N_\delta(A)$ 即 $d(x, A) < \delta$ 但 $x \notin U$

则 $d(x, A) \geq d(A, X-U) = \delta$ 矛盾.

1.1 拓扑空间.

Definition 1.1.1

X 为非空集合，$\mathcal{T}$ 为 X 一子集族. 且成立

① $X、\phi \in \mathcal{T}$　② : $\bigcap\limits_{U\in\mathcal{T}} U \in \mathcal{T}$ 有限交封闭　③: $\bigcup\limits_{U\in\mathcal{T}} U \in \mathcal{T}$ 无限并封闭

则称 $\mathcal{T}$ 为 X 上一拓扑. $(X, \mathcal{T})$ 为一拓扑空间. $\mathcal{T}$ 中元素叫开集.

Example 1.1.1

X 非空集. $\mathcal{T}_0 = \{X, \phi\}$　$\mathcal{T}_T = \{U \mid U \subset X\}$ 称为平凡拓扑与离散拓扑.

Example 1.1.3

X 一无限集. 令: $\mathcal{T}_{fc} = \{X-F \mid F \subset X, F \text{ 有限集}\} \cup \{\phi\}$

该拓扑记作余有限拓扑或有限补拓扑。

Example 1.1.4

X 为一不可数集. 令. $\mathcal{T}_{cc} = \{X-C \mid C \text{ 为 } X \text{ 可数子集}\} \cup \{\phi\}$

记作余可数拓扑或可数补拓扑

Definition: 1.1.2.

设 X 是一集合. $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ 是 X 上 2 拓扑. 若 $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ 则称 $\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 精细.

或称 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 粗糙. 若是 $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$ 则称严格精细或严格粗糙.

Definition: 1.1.3

设 X 为一拓扑空间. $x \in A \subset X$. 若有开集 U. s.t. $x \in U \subset A \subset X$ 则称

A 是 x 一邻域，特别地 A 就是一开集则 A 是 x 的一开邻域.

Theorem 1.1.1

X为一拓扑空间. $A\subset X$. 则A为X中开集 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in A$. 存在(开)邻域U_x $\ni x$ 且$U_x\subset A$

Proof: "$\Longrightarrow$" 显然

"$\Longleftarrow$" $\forall x$ 有 邻域 $V_x\subset A$, 则有开集U_x, s.t. $x\in U_x\subset V_x\subset A\subset X$.

则: $A=\bigcup\limits_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup\limits_{x\in A}U_x\subset\bigcup\limits_{x\in A}V_x\subset A$

从而 $A=\bigcup\limits_{x\in A}U_x$ A为开.

Definition 1.1.4

X为一拓扑空间. $A\subset X$ 若$X-A$为开 则称A为闭集.

Example 1.1.5

设$(X,\mathcal{T}_T)$为一离散拓扑空间. 则 X每个集都开 故每个集均闭。

Definition 1.1.5

设X为一集合. $\mathcal{B}$为X的非空子集族, 若成立:

①: $\forall x\in X$ 有在 $B\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B\in\mathcal{B}\Longleftrightarrow X=\bigcup\limits_{C\in\mathcal{B}}C$

②: 若 $B_1, B_2\in\mathcal{B}$. , $x\in B_1\cap B_2$. 则有在 $B\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B\subseteq B_1\cap B_2$

$\Longrightarrow$ 则称 $\mathcal{B}$为 X上的一组拓扑基.

Theorem： 令 X 为一非空集. $\mathcal{B}$ 为一组拓扑基. 令 $\mathcal{T}=\{\bigcup_{B\in\mathcal{U}} B \mid \mathcal{U}\subset\mathcal{B}\}$.
则这是一拓扑，即 $\mathcal{B}$ 中集合任意并组成了 X 上一拓扑 记为: $\mathcal{T}(\mathcal{B})$

proof: 为 $\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{B}$ 中集合任意并 组成的 2^X 的子集.

显然 $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \Rightarrow X\in\mathcal{T}$.

其次：设 $V=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ 其中 $V_\lambda\in\mathcal{T}$ 若 $\Lambda=\phi$ 则 $V=\phi \Rightarrow \phi\in\mathcal{T}$.

设 $\Lambda\neq\phi$ 因每个 V_λ 都是 $\mathcal{B}$ 中集合并 则 V 亦为 $\mathcal{B}$ 中集合并 $\Rightarrow V\in\mathcal{T}$

即无限并封闭.

设 $V_1, V_2\in\mathcal{T}$

$\forall x\in V_1\cap V_2 \Rightarrow \exists B_1\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B_1\subseteq V_1$ $\quad \exists B_2\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B_2\subseteq V_2$

则：$x\in B_1\cap B_2 \subset V_1\cap V_2$ 由条件知 存在 $B_x\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B_x\subset B_1\cap B_2\subset V_1\cap V_2$

有：$V_1\cap V_2=\bigcup_{x\in V_1\cap V_2} B_x \Rightarrow V_1\cap V_2\in\mathcal{T}$.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{T}$ 对有限交封闭. 故 $\mathcal{T}$ 为一拓扑结构.

Note： 拓扑基 $\mathcal{B}$ 中任一成员本身亦是 $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 该拓扑中开集.

$\forall A\in\mathcal{B}$ $x\in A$ 则 A 是 x 在 $(X, \mathcal{T}(\mathcal{B}))$ 中最小邻域

一个拓扑本身就是一个拓扑基生成自身。

Theorem：1.1.3

设 X 非空. $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 为由拓扑基生成的拓扑.

则：$U\subset X$ 为开集 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in U$，存在 $B_x\in\mathcal{B}$. 使得 $x\in B_x\subset U$

proof: "$\Longrightarrow$" U 为开 则 $U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ (其中 $V_\lambda\in\mathcal{B}$)

则 $x\in U$ 不妨设 $x\in V_{\lambda_1}\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in V_{\lambda_1}\subset U$

"$\Longleftarrow$" $U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in U} B_x\subset U$

因此 $U=\bigcup_{x\in U} B_x$ 故 U 为开.

Theorem 1.1.4 （$\mathcal{T}$的拓扑基可为$\mathcal{B}$）

设$(X,\mathcal{T})$为一拓扑空间. $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$. 则$\mathcal{B}$是生成$\mathcal{T}$的拓扑基 $\Leftrightarrow$

①: $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B$ ②: $\forall U\in\mathcal{T}$, $\forall x\in U$, $\exists B_x\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B_x\subset U$

proof: "$\Rightarrow$" 已知 $\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 则 $X\in\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 故 X 可写为$\mathcal{B}$中某些并.

不难得 $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B$ 其次 $\because \mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 利用 Thm 1.1.3即可知②.

"$\Leftarrow$" 已知 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ 显然 $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 是$\mathcal{B}$中任意并 显然包含于$\mathcal{T}$ 显然有 $\mathcal{T}(\mathcal{B})\subset\mathcal{T}$

其次 $\forall U\in\mathcal{T}$ 则: $U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}B_x\subset U$ 则 $U=\bigcup_{x\in U}B_x\in\mathcal{T}(\mathcal{B})$

故 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 故 $\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{B})$ □.

Note: 事实上: $(X,\mathcal{T})$为一拓扑空间. 则 $\mathcal{B}$为 X的一组拓扑基 且$\mathcal{T}(\mathcal{B})=\mathcal{T}$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ 且 $\forall U\in\mathcal{T}$, $\forall x\in U$, $\exists B_x\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B_x\subset U$.

Definition: 设$(X,\mathcal{T})$为一拓扑空间; $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$, 若由$\mathcal{S}$中集合有限交构成$\mathcal{T}$的一组拓扑基 则称$\mathcal{S}$为$(X,\mathcal{T})$为拓扑子基.

Theorem: 设X为集合, $\mathcal{S}\subset 2^X$. 且 $X=\bigcup_{S\in\mathcal{S}}S$ 则 $\mathcal{S}$中集合有限交构成X个拓扑基.

Proof: 不难发现 $\mathcal{S}$中集合有限交构成$\mathcal{S}^*$. $\mathcal{S}^*\supseteq\mathcal{S}$. 故 $X=\bigcup_{S\in\mathcal{S}^*}S$

且 设$B_1, B_2\in\mathcal{S}^*$ 则 $B_3=B_1\cap B_2\in\mathcal{S}^*$ 则 $\forall x\in B_1\cap B_2$ 都有在

$B_3\in\mathcal{S}^*$ s.t. $x\in B_3\subset B_1\cap B_2$ 由拓扑基定义 完成proof. □.

Note: 该定理说明: 要用 $\mathcal{S}\subset 2^X$ 生成 X一个拓扑 只需 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}}\mathcal{S}=X$ 即可.

Example 1.1.7.

设 X 为非空集，$\mathcal{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$ $\mathcal{B}$为X上一拓扑基，生成的称为离散拓扑。

生成X上平凡拓扑的拓扑基只能为$\{X\}$。

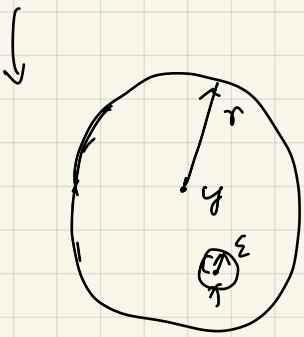
Example 1.1.8.

直线$\mathbb{R}$上 $\mathcal{B}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$ 为$\mathbb{R}$上一拓扑基 生成的拓扑称为标准拓扑 亦称 Euclid 拓扑。因此在此情况下 $\mathbb{R}$上开集为一些开区间并。

$\mathbb{R}$上 $\mathcal{B}=\{[a,b)\mid a<b, a,b\in\mathbb{R}\}$ 亦为一拓扑基。所生成的为$\mathbb{R}$上的下极限拓扑。记为 $\mathbb{R}_l$

Proposition 1.1.1.

$\forall y\in\mathbb{R}^2$. $\forall r>0$ 则 $\forall x\in B(y,r)$ $\exists\varepsilon>0$ s.t. $B(x,\varepsilon)\subset B(y,r)$.



Theorem 1.1.5.

$\mathcal{B}=\{B(x,\varepsilon)\mid x\in\mathbb{R}^2, \varepsilon>0\}$ 为 $\mathbb{R}^2$上一拓扑基。生成的拓扑叫$\mathbb{R}^2$上标准拓扑。

Theorem 1.1.6

$\mathbb{R}^2$上 $\mathcal{B}'=\{(a,b)\times(c,d)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}; a<b, c<d\}$. 则 $\mathcal{B}'$ 亦为$\mathbb{R}^2$上拓扑基。亦生成标准拓扑

1.2 内部~.

Definition 1.2.1

设X为一拓扑空间，$A\subset X$.

① $\mathrm{Int}(A)$ 是含于A中所有开集的并，称之为A的内部，$\mathrm{Int}(A)$中点叫内点.

②: 令 $cl(A)$ 是包含 A的闭集的交 记作 A的闭包

Theorem 1.2.1

Assume X is a topology space, $A,B\subset X$, we have the following results.

① $\mathrm{Int}(A)$ 是含于 A 的最大开集，$cl(A)$ 包含A 的最小闭集.

②: $\mathrm{Int}(A)\subset A\subset cl(A)$

③: $x\in \mathrm{Int}(A) \Longleftrightarrow$ 存在x(开)邻域U st. $U\subset A$

④: A为开 $\Longleftrightarrow \mathrm{Int}(A)=A$ $\qquad$ A是闭 $\Longleftrightarrow cl(A)=A$

⑤: 若$A\subset B$ 则: $\mathrm{Int}(A)\subset \mathrm{Int}(B)$ 且 $cl(A)\subset cl(B)$

⑥: $x\in cl(A) \Longleftrightarrow$ 对x的每一开邻域(或邻域) U, $U\cap A\neq\phi$

proof:

③: $x\in \mathrm{Int}(A) \Rightarrow$ 存在某个开集 U St. $x\in U\subset \mathrm{Int}(A)$ 故U为x开邻域

存在x的邻域 U st. $x\in U\subset A$ 则存在开集 O St. $x\in O\subset U\subset A$ 则.

④: According to the definition of $\mathrm{int}(A)$ and $cl(A)$

⑤ ~

⑥: "$\Leftarrow$" 若 $x\notin cl(A)$ 则必存在一闭集$K\supset A$ 但$x\notin K$

故 $x\in K^c\subset A^c$ 故K^c为x一开邻域 但$K^c\cap A=\phi$ 矛盾.

"$\Rightarrow$" 反证法: 若存在一开邻域 $U\cap A=\phi$, $x\in U$ 则 $U\subset A^c$, $U^c\supset A$

U^c为包含A闭集 但$x\notin U^c$ 矛盾.

Example 1.2.1.

①: $\mathbb{R}$为离散拓扑空间. $A=[0,1)$ 则: $Int(A)=A=cl(A)$

②: 设$\mathbb{R}$为有限补拓扑空间, $A=[0,1)$ 则 $Int\,A=\phi$ $cl(A)=\mathbb{R}$.

Example 1.2.2.

设$\mathbb{R}$为欧氏直线. $A=\mathbb{Q}$, $int(A)=\phi$.

Definition 1.2.2.

设X为一拓扑空间. $A\subset X$, 若$cl(A)=X$ 则称A为X中一稠密子集.

Thm 1.2.2.

设X为一拓扑空间. $A,B\subset X$. 则:

①: $Int(X-A)=X-cl(A)$

②: $cl(X-A)=X-int(X-A)$

③: $Int(A)\cup Int(B)\subset Int(A\cup B)$

④: $Int(A)\cap Int(B)=Int(A\cap B)$

Proof: ① $x\in Int(X-A)\iff$ 存在x一开邻域U st. $U\subset X-A$

$\iff$ ~, st. $U\cap A=\phi$

$\iff x\notin cl(A)$

$\iff x\in X-cl(A)$

②: $x\in cl(X-A)\iff\forall x$开邻域$U$. 有: $U\cap(X-A)\neq\phi$

$\iff$ ~ 有: $U\not\subset A$.

$\iff x\notin Int(A)$.

$\iff x\in X-Int(A)$.

③: $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$ 故: $Int(A)\cup Int(B)\subset Int(A\cup B)$

④: 显然 $Int(A\cap B)\subset(Int(A)\cap Int(B))$.

$\forall x\in Int(A)\cap Int(B)$ 则 存在 U_1，U_2 为 x 开邻域 s.t. $x\in U_1\subset A$

$x\in U_2\subset B$. 则 $x\in(U_1\cap U_2)\subset(A\cap B)$. $\Rightarrow x\in Int(A\cap B)$.

Note: ③中 一般无 $Int(A\cup B)\subset Int(A)\cup Int(B)$

如 R上 标准下: $A=[0,1)$ $B=[1,2)$

Definition 1.2.3:

设 X 为一拓扑空间. $A\subset X$. $x\in X$. 若对于每一(开)邻域 U_x s.t. $U_x\cap(A-\{x\})\neq\phi$.

则 x 称为 A 的 极限点. A 的所有极限点 记作 A'，叫作 A 的导集.

Note: 显然由 def 知 $x\in A'\Rightarrow x\in cl(A)$ 且 x 求不是 $\{x\}$ 的极限点.

Thm 1.2.3:

设 X 为一拓扑空间. $A\subset X$. 则 $cl(A)=A\cup A'$

proof: 显然 $A\subset cl(A)$ $A'\subset cl(A)$ 故 RHS $\subset$ LHS

设 $x\in cl(A)$ 若 $x\in A$ 证毕 若 $x\notin A$ 断言 $x\in A'$

若不然 则: 存在 x 一开邻域 U s.t. $U\cap(A-\{x\})=\phi$.

$\because x\notin A$ 故 即: $U\cap A=\phi$ 这与 $x\in cl(A)$ 矛盾.

Corollary 1.2.1:

X 为一拓扑空间. $A\subset X$ 则 A 为闭 $\Leftrightarrow A'\subset A$

proof: A 闭 $\Leftrightarrow cl(A)=A\Leftrightarrow A'\cup A=A\Leftrightarrow A'\subset A$.

Definition 1.2.4

设 X 为一拓扑空间. $\{x_1 \cdots x_n \cdots\}$ 为 X 中一点列. $x \in X$.
若 x 的任一(开)邻域 U, $\exists N > 0$ s.t. 当 n 充分大后 $x_n \in U$ 则称 $\{x_1 \cdots x_n\}$ 收敛到 x.

Example 1.2.7

例 R_{cc} 为 R 上的可数补空间. $A = R - \{0\}$ 则 $A' = R$.
但对 $0 \in R$, A 中无点列收敛到 0.
$\because$ 若一点列 $\{x_1 \sim x_n \cdots\}$ 收敛到 0. 考察 $\{x_1 \sim x_n \cdots\}$ 中去除 $x_k = 0$ 后仍是一点列. 考察 0 的一开邻域 $R - \{x_1\ x_2 - x_n \cdots\}$.
但找不到这样 $N > 0$ 当 $n > N$ $x_n \in R - \{x_1\ x_2 \cdots x_n \cdots\}$.

Example 1.2.8

设 (R, R_{fc}) 配以有限补拓扑. $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 为 R 中点列.
但知 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 收敛到 R 中任一点.

Definition 1.2.5

设 X 为一拓扑空间. $A \subset X$. $x \in X$. 若对 x 任一(开)邻域 U_x. 有 $U_x \cap A \neq \phi$ $U_x \cap (X-A) \neq \phi$
则称 x 为 A 的一边界点。A 的所有边界点 记作 ∂A. 称为 A 的边界.

Thm 1.2.4

X 为一拓扑空间. $A \subset X$. 则 ∂A 有如下性质:

①: $\partial A = cl(A) \cap cl(X-A) = cl(A) - int(A)$. ∂A 为闭

②: $\partial A \cap Int(A) = \phi$

③: $\partial A \cup Int(A) = cl(A)$

④: $\partial A \subset A \Longleftrightarrow A$ 闭

⑤ $\partial A \cap A = \phi \Longleftrightarrow A$ 开.

⑥: $\partial A = \phi \Longleftrightarrow A$ 既开又闭.

⑦: $\partial A \subset cl(A)$ 且 $\partial A = \partial(X-A)$.

⑧ $\partial(cl(A)) \subset \partial A$.

Proof:

① $x \in \partial A \Longleftrightarrow \forall U_x$ $U_x \cap A \neq \phi$ $U_x \cap (X-A) \neq \phi$.

$\Longleftrightarrow x \in cl(A)$, $x \in cl(X-A)$.

$\Longleftrightarrow x \in cl(A) \cap cl(X-A)$.

④: "$\Leftarrow$" A 若闭 $\partial A = cl(A) - int(A) = A - int(A)$ 故 $\partial A \subset A$.

"$\Rightarrow$" 若 $\partial A \subset A$ 证 $cl(A) \subset A$

Actually. $cl(A) = \partial A \cup int(A) \subset A$.

⑤: "$\Leftarrow$" 若A开 则: $\partial A = cl(A) - int(A) = cl(A) - A$ 故 $\partial A \cap int(A) = \phi$.

"$\Rightarrow$" 若 $\partial A \cap A = \phi$ 则: 下证: $A \subset Int(A)$.

$\forall x \in A$ 故 $x \in (\partial A)^c$ 故 $\exists U_x$ s.t. $U_x \cap A = \phi$ 或是 $U_x \cap (X-A) = \phi$.

但 $U_x \cap A = \phi$ 显然不可能 (因为都有 x 中元) 故 $U_x \cap (X-A) = \phi$.

故: $U_x \subset A$ 故 $x \in Int(A)$.

⑥ 显然

⑦ 显然

⑧: 利用 $\partial A = cl(A) - int(A)$ 即可.

Definition 1.2.6.

$(X, \mathcal{T})$ 一拓扑空间. $Y \subset X$ 令 $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$.

则 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 构成一拓扑空间 称为子空间拓扑. 亦称为Y上的标准拓扑.

Example 1.2.13:

① $Y=[0,1]$　$X=\mathbb{R}$ 标准拓扑　则 对 (a,b) $(0<a<b<1)$ 是 Y 中开

且 $[0,a)=(-1,a)\cap[0,1]$ 亦为开集．但 $[0,a)$ 却非 X 中开集．

Thm 1.2.5.

$(X,\mathcal{T})$ 为一拓扑空间．$Y\subset X$ 为子空间．$C\subset Y$．

则：C 在 Y 中是闭集 $\Longleftrightarrow$ 存在 X 中闭 F s.t. $C=F\cap Y$．

proof: C 在 Y 中闭 则 $Y-C$ 在 Y 中开 故 $Y-C=Y\cap U$

$\Rightarrow C=Y-Y\cap U \Rightarrow C=X\cap Y-Y\cap U=Y\cap(X-U)$

反之 若 有 X 中闭的 F s.t. $C=F\cap Y$

故 $Y-C=Y-F\cap Y=(X-F)\cap Y$ 为开　□.

Thm 1.2.6.

设 $(X,\mathcal{T})$ 上 有 $\mathcal{B}$ 为其拓扑基．$Y\subset X$．则 $\mathcal{B}_Y=\{B\cap Y \mid B\in\mathcal{B}\}$

为 $(Y,\mathcal{T}_Y)$ 上的 拓扑基．

proof: 事实上 $\forall x\in Y\subset X$ 故 $\exists B\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B\in\mathcal{B}$

进而 $x\in(Y\cap B)\in\mathcal{B}_Y$.

另外：$\forall B_1\cap Y, B_2\cap Y\in\mathcal{B}_Y$ $(B_1,B_2\in\mathcal{B})$ $x\in(B_1\cap Y)\cap(B_2\cap Y)$.

则 $x\in B_1\cap B_2$ ~~故~~，存在 $B\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B\subset B_1\cap B_2$.

故 $x\in B\cap Y\subset(B_1\cap B_2)\cap Y=(B_1\cap Y)\cap(B_2\cap Y)$.

故 $\mathcal{B}_Y$ 的确为 Y 上一组拓扑基.

而外 $\forall V$ 为 Y 中 开集 故存在 U 为 X 中 开集 s.t. $V=U\cap Y$.

$U=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ $(B_\lambda\in\mathcal{B})$ 故 $V=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B_\lambda\cap Y)$.　□.

Thm

① $A\subset B$ 则 $A'\subset B'$

② $\phi'=\phi$

③ $A'\cup B'=(A\cup B)'$

④ $A'\cap B'\subseteq (A\cap B)'$

⑤ $cl(A')=(cl(A))'$

⑥ $cl(A)\cup cl(B)=cl(A\cup B)$

⑦ $cl(A)\cap cl(B)\subseteq cl(A\cap B)$

Proof: 只需注意④中：$(A\cap B)'$ 一般不包含 $A'\cap B'$

如：$A(1,2)$ $B(2,3)$

proposition:

$cl\circ int\circ cl=cl$ （限制在开集上）

$int\circ cl\circ int=int$ （限制在闭集上）.

proof:

若A开 下证 $cl(int(cl(A)))=cl(A)$

$\because A\subset cl(A) \xRightarrow{A开} A\subset int(cl(A)) \longrightarrow cl(A)\subset cl(int(cl(A)))$.

$\because int(cl(A))\subset cl(A) \Longrightarrow cl(int(cl(A)))\subset cl(A)$.

Thm: $(X,\mathcal{T})$中. A为稠密 $\Longleftrightarrow$ $\forall U$为X中非空开, $A\cap U\neq\phi$

proof: "$\Longrightarrow$" 若 $\exists U$为开 但 $A\cap U=\phi$ $\Rightarrow A\subset U^c$ $\Rightarrow \bar{A}\subset U^c$

与$\bar{A}=X$矛盾.

"$\Longleftarrow$" 若$\bar{A}\neq X$ 则 $\exists x\notin\bar{A}$ 故存在 U_x st. $U_x\cap A=\phi$ 矛盾.

Proposition.

若$(X,\mathcal{T})$为一拓扑空间, A, B 均为X的稠密子集. 且A为开. 则$A\cap B$亦稠密.

Proof: 由题. $\forall U$为X中非空开 $U\cap A\neq\phi$ 且$U\cap A$仍开 非空 .

故 $(U\cap A)\cap B\neq\phi \Longrightarrow U\cap(A\cap B)\neq\phi \Rightarrow A\cap B$ 亦稠密.

Theorem:
设 $(X,\mathcal{T})$ 上: $U\subset X$, U 在 X 中是开的 $\Longleftrightarrow$ U 中每一点 x 都有邻域 V s.t. $U\cap V$ 在 X 中开

Proof: "$\Longrightarrow$" 显然 取 V 为 U 即可.

"$\Longleftarrow$" $U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in U}(U\cap V)\subseteq U$. 故 $U=\bigcup_{x\in U}(U\cap V)$ 为开

Note: 这个定理指出·开的性质是局部的.

但应当指出闭的性质并不是局部的.

取 $X=\mathbb{R}$ 配以标准拓扑, 令 $U=[0,1)$ U 非闭

但 $\forall x\in U$ 都有邻域 V st. $V\cap U$ 封.

Definition: 在 X 拓扑空间中. $A\subset X$ 若 $Int(Cl(A))=\phi$ 则称 A 为疏朗(无处稠密集).

Proposition: 开集与闭集的边界为无处稠密集.

Proof: ①设 A 为闭集. 证 $Int(\overline{\partial A})=\phi \Longleftrightarrow Int(\partial A)=\phi$

若 $Int(\partial A)\neq\phi$ 故 $\exists x\in\partial A$. 且有开邻域 $U_x\subset\partial A$

$\because A$ 闭 则 $\partial A\subset A$ $\Rightarrow$ $U_x\subset A$

$\because x\in\partial A$ 故 U_x 应有: $U_x\cap A\neq\phi$ $U_x\cap (X\setminus A)\neq\phi$ 与 $U_x\subset A$ 矛盾.

②: 设 A 为开 证 $Int(\partial A)=\phi$

若 $Int(\partial A)\neq\phi$ 则: 存在 $x\in\partial A$ 且 $U_x\subset A$

但 $\because A$ 开 $\Rightarrow \partial A\cap A=\phi$ 但 $x\in\partial A$ $x\in U_x\subset A$ 矛盾.

①: $\overline{A-\overline{B}} \subset \overline{A} - \mathrm{int}(\overline{B})$

一方面: $RHS = \overline{A} \cap (\mathrm{int}(\overline{B}))^c = \overline{A} \cap \overline{B^c}$

$LHS = \overline{A \cap (\overline{B})^c} \subset \overline{A} \cap \overline{(\overline{B})^c}$

1.3 连续映射．同胚.

Definition 1.3.1

X、Y 为拓扑空间. $f: X \longrightarrow Y$　$x_0 \in X$

若对 $f(x_0)$ 任一开邻域 $V_{f(x_0)}$，都有在 x_0 邻域 B_{x_0} st. $f(B_{x_0}) \subset V_{f(x_0)}$

则称 f 在 x_0 处连续，若 f 在 X 上处处连续，则称 f 为 X 到 Y 的连续映射

Theorem 1.3.1

设 f 为 $X \longrightarrow Y$ 的映射. 则下述等价

① f 连续

② 任一 V 为 Y 中开集 有 $f^{-1}(V)$ 为 X 中开

③ 任一 F 为闭集，$f^{-1}(F)$ 为 X 中闭

④ Y 中一组基 $\mathcal{B}$, $\forall B \in \mathcal{B}$ 有 $f^{-1}(B)$ 为 X 中开

⑤ $\forall A \subset X$　$f(Cl(A)) \subset Cl(f(A))$

⑥ $\forall B \subset Y$　$Cl(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl(B))$

⑦ Y 中一组拓扑子基 $\mathcal{S}$. 若 $S \in \mathcal{S}$ st. $f^{-1}(S)$ 是 X 中开

①$\Longrightarrow$②: if $f^{-1}(V) = \emptyset$, it is obvious. if $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, we only need to show that $\forall x \in f^{-1}(V)$ x is a internal point of $f^{-1}(V)$;
notice that $f(x) \in V$ and V is open in Y, because f is continuous, there exists $B_x \subset X$. st. $f(B_x) \subset V$ So $x \in B_x \subset f^{-1}(V)$

②$\Rightarrow$①: $\forall x \in X$, for every open neighborhood U of $f(x)$, we have $x \in f^{-1}(U)$ is open in X 故 $\exists B_x \subset f^{-1}(U) \longrightarrow f(B_x) \subset U$. □

②$\Longleftrightarrow$③ 利用开闭转化

②$\Longleftrightarrow$④ 利用基定义

①$\Longrightarrow$⑤ 事实上 只要 f 连续 有 $f(A') \subset (f(A))'$ 不难自行证明.

⑤$\Rightarrow$③$\Rightarrow$① 令 F 为 Y 中闭 令 $A = f^{-1}(F)$

则 $f(A) \subset F \Rightarrow cl(f(A)) \subset F$

$\Rightarrow f(cl(A)) \subset cl(f(A)) \subset F$

$\Rightarrow \underline{cl(A)} \subset f^{-1}(f(cl(A))) \subset f^{-1}(F) = \underline{A}$.

故 A 闭 即 $f^{-1}(F)$ 闭

①$\Rightarrow$⑥: $\forall x \in cl(f^{-1}(B))$ WTS: $f(x) \in cl(B)$.

任取 $f(x)$ 开邻域 $V_{f(x)}$ 则 $f^{-1}(V)$ 为 X 中包含 x 的开邻域

则 $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) \neq \phi \Rightarrow V \cap B \neq \phi$.

⑥$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①

$\forall F$ 为 Y 中闭集. 则 $cl(f^{-1}(F)) \subset f^{-1}(cl(F)) = f^{-1}(F)$.

$\Rightarrow f^{-1}(F)$ 为闭 $\square$.

Theorem:

设 $f: X \to Y$ 连续. 则 ① $f: X \to f(X)$ 亦连续. ② 若 $A \subset X$ 则 $f|_A: A \to Y$ 连续.

proof:

$\forall$ $f(X)$ 中开集 形如 $V \cap f(X)$ (V 为 Y 中开)

$f^{-1}(V \cap f(X)) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V)$ 为 X 中开 $\square$.

Theorem: 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续映射. $\Leftrightarrow$ 连续函数:

Proof: 连续函数 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}$ 给定. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.t. $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$

根据拓扑基与 开集即可.

Example 1.3.2.

① $(X,\mathcal{T})$ 上 $id: X \longrightarrow X$ $x \mapsto x$. 为连续映射.

②: assume f is a mapping from $(X,\mathcal{T}_1)$ to $(Y,\mathcal{T}_2)$ and $y_0 \in Y$.
define $C_{y_0}: X \longrightarrow Y$ $x \mapsto y_0$, then C_{y_0} is a continous mapping

③: assume $A \subset X$. the $i: (A,\mathcal{T}_A) \longrightarrow (X,\mathcal{T})$
$x \longmapsto x$.
then i is continous mapping.

Example 1.3.3.

①: 设 $id: \mathbb{R}_E \longrightarrow \mathbb{R}_{fc}$ is continous.
but $id: \mathbb{R}_{fc} \longrightarrow \mathbb{R}_E$ is not continuous

②: 设 $id: \mathbb{R}_E \longrightarrow \mathbb{R}_L$ (下极限拓扑) is not continuous.
but $id: \mathbb{R}_L \longrightarrow \mathbb{R}_E$ is continuous.

Thm 1.3.2.

$f: X \longrightarrow Y$ is continuous, $A \subset X$ if $x \in cl(A)$ then $f(x) \in cl(f(A))$

proof: We finish our prof by contradiction.
if $f(x) \notin cl(f(A))$ then there exists a open neighborhood U st.
$f(x) \in U$ but $U \cap f(A) = \phi$, 因 f is continuous So
$f^{-1}(U)$ is a open neighborhood that includes x. We can get
$f^{-1}(U) \cap A = \phi$ but it is contradicted with $x \in cl(A)$. □.

Theorem 1.3.3:

Assume $f: X \longrightarrow Y$ is continuous, and $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $x \in X$.
Then: $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ in Y converges to $f(x)$.

proof: for every open neighborhood U of $f(x)$. we know $f^{-1}(U)$ is a open neighborhood in X that includes x.
So $\exists N>0$ when $n \geq N$, $x_n \in f^{-1}(U) \Longrightarrow f(x_n) \in U$. □.

Theorem 1.3.4:

Assume $f: X \to Y$ and $g: Y \to Z$ are continuous.
Then: $g \circ f: X \to Z$ is continuous.

Lemma: 1.3.1:

Assume $A, B \subset X$ are two closed subspaces of X. and $X = A \cup B$.
$f: A \longrightarrow Y$ $g: B \longrightarrow Y$ 连续. and $\forall x \in A \cap B$. $f(x) = g(x)$.

define $h: X \longrightarrow Y$
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B. \end{cases}$$

Then f is continuous.

Proof: For every closed set F in Y. Then $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$
So $f^{-1}(F)$ is closed in A, $g^{-1}(F)$ is closed in B. , Hence there exists C and D, are closed sets in X, St. $f^{-1}(F) = C \cap A$ $g^{-1}(F) = D \cap B$
$\rightarrow$ $h^{-1}(F) = (C \cup A) \cup (D \cap B)$ is closed in X. □.

Definition: Assume X, Y are two topology spaces. $f: X \longrightarrow Y$ is a bijection.

If f and f^{-1} are all continuous mapping.

Then the f is called a Homeomorphic morphism. And we call X and Y are homeomorphic.

Theorem:

Assume f is a homeomorphic morphism from X to Y. $A \subset X$, we have the following results

①: A is open in $X \Longleftrightarrow f(A)$ is open in Y.

② A is closed in $X \Longleftrightarrow f(A)$ is closed in Y.

③: $f(Cl(A)) = Cl(f(A))$

⑦: $f(A') = (f(A))'$

④: $f(Int(A)) = Int(f(A))$

⑤: $f(\partial A) = \partial(f(A))$

⑥: A is a neighborhood of $x \longleftrightarrow f(A)$ is a neighborhood of $f(x)$.

proof

①: "$\Leftarrow$" $\because f$ is homeomorphic morphism. So $f^{-1}(f(A)) = A$ is open.

同理.

② ~

⑦: $\forall y \in f(A')$ $y = f(x)$ $x \in A'$

$\forall V_y$ 为 y 开邻域 WTS: $V_y \cap (f(A) - \{y\}) \neq \phi$.

$f^{-1}(V_y)$ 为 包含 x 的 X 中 开邻域 $\Longrightarrow f^{-1}(V_y) \cap (A - \{x\}) \neq \phi$. 编 f. □

③ 利用 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ 与 $f(A') = (f(A))'$ 即可.

④: $\forall y = f(x) \in f(Int A)$ $x \in Int A$ So WTS: $y \in Int(f(A))$.

WTS: $\exists V_y$ st. $y \in V_y \subset f(A)$.

此时. ∵ $x\in Int(A)$ 故 $\exists B_x \subset A \Longrightarrow f(B_x) \subset f(A)$.

∵ f 同胚 $\Rightarrow f(B_x)$ 是开 (利用①). $f(B_x)$ 就相当于 V_y.

另一方面 $\forall y = f(x) \in Int(f(A))$ (∵ 满射) 则 $\exists V_y$ s.t. $V_y \subset f(A)$.

$\longrightarrow f^{-1}(V_y) \subset A$ 而 $f^{-1}(V_y)$ 即 X 中包含 x 的开邻域 $\Rightarrow x \in Int(A)$.

⑤ $f(\partial A) = f(cl(A) - int(A)) \overset{∵ f\text{双射}}{=\!=} f(cl(A)) - f(int(A))$

$= cl(f(A)) - int(f(A)) = \partial(f(A))$.

⑤: 利用(1):

Proposition:

① $id: X \to X$ 为一同胚.

②: $f: X \to Y$ 为同胚, 则 $f^{-1}: Y \to X$ 亦同胚.

③: $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 为同胚 则 $g \circ f$ 同胚

④: $f: X \to Y$ 为同胚.
$f|_A: A \to f(A)$ 亦同胚.

Example 1.3.5

① $\forall (a,b) \subset \mathbb{R}$. $a<b$ 设 $f: (a,b) \longrightarrow (0,1)$, $x \longmapsto \frac{x-a}{b-a}$ 则 f 为同胚

②: $\forall (a,+\infty)$ $a\in\mathbb{R}$ 设 $f: (a,+\infty) \longrightarrow (0,1)$, $x \longmapsto e^{-(x-a)}$ 则 f 为同胚.

③ $a\in\mathbb{R}$ $(-\infty,a) \cong (-a,+\infty)$ f 为 $-x$ 映射

④ $f: \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ 同胚.

Note: Actually. 上面构造连续函数都为 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 上的. 故 $|_{定义域}$ 上仍连续·映射 再利用其仍连续. 因为平移单调函数那么就会存在双射.

Example. 1.3.7.

①: $H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$. 与 $\mathrm{Int}(D) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$.

均为 $\mathbb{R}^2$ 上的子空间. 均与 $\mathbb{R}^2$ 同胚.

令 $f: \mathbb{R}^2 \to H \quad (x,y)\mapsto(x,e^y)$ 则 f 是同胚.

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Int}(D) \quad g(x,y) = \left(\frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ 则 g 是同胚.

Definition 1.3.3:

设 $f: X\to Y$ 为一连续映射. 若: $f: X\to f(X)$ 为同胚

Then, f is called embedding mapping.

Proposition 下列区域同胚.

① $\mathbb{R}^2$ ②: $\{(x,y) \mid x,y>0\}$ ③: $\{(x,y) \mid x>y>0\}$

④: 平面中去掉一条线 l $\quad l=\{(x,y) \mid y=0,\ x\geq 0\}$.

proof: ①$\longleftrightarrow$② 构造 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{(x,y) \mid x,y>0\}$

$(x,y)\longmapsto(e^x,e^y)$.

②$\longleftrightarrow$③ 构造: $g: \{(x,y) \mid x,y>0\} \longrightarrow \{(x,y) \mid x>y>0\}$

$(x,y)\longmapsto(x+y,y)$.

Proposition: 证明: $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 与 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$ 同胚.

proof: 构造: $f: (r\cos\theta, r\sin\theta)\longmapsto(\cos\theta, \sin\theta, \ln r)$.

Theorem: 证明 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中球面 S^n - 一点 $\cong \mathbb{R}^n$ 　　A为 S^n 单点

Proof: 设北极点 $N:(0,0,0\cdots 0,1)$ 去除.

$P\in S^n:(x_1 \cdots x_{n+1})$. 　　直线 $\overrightarrow{NP}=N+t(x_1\cdots,x_n,x_{n+1}-1)$.

与超平面 $x_{n+1}=0$ 交点 $t(x_{n+1}-1)+1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{1-x_{n+1}}$

故交点为: $\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\frac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}},0\right)$.

故 $f: S^n-N \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x_1\cdots x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$.

反之: $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n-N$

$(u_1\cdots u_n) \longmapsto (x_1\cdots x_{n+1})$

注意到 $x_1=(1-x_{n+1})u_1 \cdots\cdots x_n=(1-x_{n+1})u_n$

且 $x_1^2+\cdots+x_n^2+x_{n+1}^2=1$ 　则: $(1-x_{n+1})^2\sum_{i=1}^n u_i^2+x_{n+1}^2=1$

$$\Longrightarrow x_{n+1}=\frac{\|u\|^2-1}{\|u\|^2+1}$$

$$x_1=\frac{2u_1}{\|u\|^2+1} \quad \cdots\cdots \quad x_n=\frac{2u_n}{\|u\|^2+1}.$$

Definition: $f: X\longrightarrow Y$ 　若对任一X中开集 U 有: $f(U)$ 为Y中开 则称 f 为开映射.

Example: $X=(\{a,b,c\},\mathcal{T}_1)$ 　$\mathcal{T}_1=\{\phi,X,\{a\}\ \{a,b\}\ \{b\}\}$.

$Y=(\mathbb{R},\mathcal{T}_T)$

$f: X\longrightarrow Y$

$a\longmapsto 1$

$b\longmapsto 2$

$c\longmapsto 3$

为一非同胚 但开映射.

Theorem: Assume $f: X \longrightarrow Y$ is bijective and continuous. Then the following results are equivalent.

① f is homeomorphic morphism

② f^{-1} is continuous

③: f is a open mapping.

④: f is a closed mapping.

Proof: ① $\Longrightarrow$ ②. ① $\Longleftrightarrow$ ③ - —

proposition: A bijection is a open mapping iff. is a closed mapping.

始端拓扑、终端拓扑

Definition $f:(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow(Y,\mathcal{T}_Y)$ $\mathcal{T}_Y$ 是使得 f 连续的最细的拓扑
称为 Y 关于 f 的终端拓扑.

Theorem: $f:(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow Y$ 满射，则 Y 关于 f 的终端拓扑 $\mathcal{T}$ 唯一存在.
且 $\mathcal{T}=\{A\subset Y \mid f^{-1}(A)\in\mathcal{T}_X\}$.

proof: 令 Φ 为所有使 $f:(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow Y$ 连续的 Y 上拓扑之并.

记 $\mathcal{T}_0$ 为以 Φ 为拓扑子基生成的拓扑. 故 $(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow(Y,\mathcal{T}_0)$ 为连续.
若 $\mathcal{T}'$ 是 Y 关于 f 的终端拓扑. $f:(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow(Y,\mathcal{T}')$ 连续.
则由构造知: $\mathcal{T}'\subset\mathcal{T}_0$ 但 $\mathcal{T}'$ 是最细 $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}_0$ 故 $\mathcal{T}'=\mathcal{T}_0$
这实际上给出了终端拓扑的构造与唯一性说明.
下面证 题中 $\mathcal{T}$ 的形式 显然 $(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow(Y,\mathcal{T})$ 连续
且任何严格细于 $\mathcal{T}$ 的都不能使 f 连续.

Thm: 设 $(X,\mathcal{T}_X)$ 是拓扑空间. Y 是一集合 $f:(X,\mathcal{T}_X)\longrightarrow Y$ 满射.
若给 Y 配以终端拓扑
则: 对任一 $(Z,\mathcal{T}_Z)$ 与 $g:Y\longrightarrow(Z,\mathcal{T}_Z)$ g 连续 $\Longleftrightarrow$ $g\circ f$ 连续.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}_X) \arrow[rr, "f"] \arrow[drr, "g\circ f"'] & & (Y,?) \arrow[d, "g"] \\
& & (Z,\mathcal{T}_Z)
\end{tikzcd}$$

Proof: "$\Longrightarrow$" 由于 f continuous and g is also continuous，$g\circ f$ 亦连续.

"$\Longleftarrow$" 设 V 为 Z 中开，$(g\circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ 是 X 中开.

则 $g^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Y$ 故 g 连续.

Theorem: X 为一拓扑空间，Y, Z 是集合. $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 为映射.

若为 Y 配以 f 的终端拓扑

则：Z 关于 g 的终端拓扑与 Z 关于 $g\circ f$ 的终端拓扑相同.

Proof: 令 Z 关于 g 与 $g\circ f$ 终端拓扑为 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ (Z,\mathcal{T}') & (Z,\mathcal{T}) \arrow[l, "id_Z"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ (Z,\mathcal{T}') \arrow[r, "id_Z'"] & (Z,\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

已知恒等式 $id_Z\circ g\circ f = g\circ f$

$\Longrightarrow$ ∵ $g\circ f$ 连续 故 $id_Z\circ g\circ f$ 连续 ∵ Y 配以 f 的终端拓扑 则：

$id_Z\circ g$ 连续. ∵ $\mathcal{T}$ 为 Z 上关于 g 终端拓扑 $\Longrightarrow$ id_Z 连续.

另有：$g\circ f = id_Z'\circ(g\circ f)$ $\Longrightarrow$ $id_Z'\circ(g\circ f)$ 连续.

∵ $\mathcal{T}'$ 是配以 $g\circ f$ 的终端拓扑 $\Longrightarrow$ id_Z' 连续.

由连续定义 易知 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ 且 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ 得 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$

Definition:

设 X, Y 为拓扑空间. $f: (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ 为粘合映射 当：f 满且 $\mathcal{T}_Y$ 是终端拓扑.

Theorem:

$f: X \longrightarrow Y$ 满射 则下列等价.

① f 是粘合映射　② A 为 Y 中开 $\Longleftrightarrow f^{-1}(A)$ 在 X 中开　③ A 在 Y 中闭 $\Longleftrightarrow f^{-1}(A)$ 在 X 中闭.

利用 终端 拓扑 构造 即可.

Theorem:

$f: X \longrightarrow Y$ 是连续的满射. 若 f 为 开(闭) 映射. Then: f 为粘合映射

Proof: f 为开映射 , $A \subset Y$. 则: $\because f$ 连续 $f^{-1}(A)$ 为 X 中开.

反之若 $f^{-1}(A)$ 是 X 中开 $\Rightarrow f(f^{-1}(A))$ 为 Y 中开 $\xrightarrow{\because f \text{满}}$ 即 A 为 Y 中开.

Definition:

$f: X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ 称 X上 st. f连续的最粗的拓扑是f的始端拓扑

Theorem:

$f: X \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ 则 X上关于f的始端拓扑唯一地存在. 而且

$\mathcal{T}_X = \{A \subset X \mid$ 存在 $V \in \mathcal{T}_Y$ st. $f^{-1}(V) = A\} = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{T}_Y\}$.

proof:

设 $\mathcal{T}_0$ 为 st. f连续的 $\mathcal{T}_X$ 的交. 则: $\mathcal{T}_0$ 为X上拓扑

容易验证 $\mathcal{T}_0$ st. f 连续 取其始端拓扑 $\mathcal{T}'$ 则: $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}'$ $\overset{\because 最粗}{}$ $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_0$

$\Rightarrow \mathcal{T}_0 = \mathcal{T}'$ 这给出了始端拓扑的构造. 存在, 唯一

再验证 题干中 $\mathcal{T}$ 即可.

Theorem: 始端拓扑泛性质.

设 $f: X \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ 若X配以f始端拓扑.

则: 对任一 $(Z, \mathcal{T}_Z)$ 与 $g: Z \longrightarrow X$ g连续 $\Leftrightarrow$ $f \circ g: Z \to Y$ 连续.

proof: "$\Longrightarrow$" 连续复合

"$\Longleftarrow$" $\forall U$ 为X中开 则: 存在V为Y中开 st. $f^{-1}(V) = U$

$g^{-1}(U) = g^{-1}(f^{-1}(V)) = (f \circ g)^{-1}(V) \xlongequal{\because f\circ g 连续}$ 为Z中开 □.

Theorem:

设Y是拓扑空间. X, Z 是集合. $f: X \longrightarrow Y$ $g: Z \to X$ 是映射. X配上f的始端拓扑.

则: Z关于g的始端拓扑与Z关于 $f \circ g$ 的始端拓扑相同.

Proof: 设 Z 关于 g 的始端拓扑为 $\mathcal{T}$　　Z 关于 $f\circ g$ 为 $\mathcal{T}'$

$$\begin{tikzcd}
(Z,\mathcal{T}) \arrow[r, "g"] & (X,\mathcal{T}_{f始}) \arrow[d, "f"] \\
(Z,\mathcal{T}') \arrow[u, "id_Z'"] \arrow[r, "f\circ g"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(Z,\mathcal{T}) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id_Z"] & (X,\mathcal{T}_{f始}) \arrow[d, "f"] \\
(Z,\mathcal{T}') \arrow[r, "f\circ g"] & Y
\end{tikzcd}$$

则 $f\circ g = f\circ g\circ id_Z'$　　　　$(f\circ g)\circ id_Z = f\circ g$.

f 连续, g 连续 则: $f\circ g$ 连　　　　$\mathcal{T}'$ 为 $f\circ g$ 始端　id_Z 连续.

$\because f$ 始端 故 $g\circ id_Z'$ 连续.

$\because \mathcal{T}$ 关于 g 始端 $\Rightarrow id_Z'$ 连续.

$\square$

Theorem:

设 $(Y,\mathcal{T}_Y)$　$f: X\longrightarrow(Y,\mathcal{T}_Y)$ 满射. 若给 X 配以 f 始端, 则 f 为开(闭)映射

Proof: 设 A 为 X 中开　下证 $f(A)$ 开

存在 Y 中开 V s.t. $A=f^{-1}(V)$　　$f(A)=f(f^{-1}(V))=V$ 为开

Definition:

$\{f_\lambda : X\to(Y_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)\mid \lambda\in\Lambda\}$ 为一族映射. 称 X 上 s.t. f_λ 都连续的最粗的拓扑 是 X 关于 $\{f_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 的始端拓扑.

Theorem:

设 X 为集合. $\{f_\lambda: X\to(Y_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是一族映射. 则 X 关于 $\{f_\lambda\}$ 的始端拓扑 $\mathcal{T}$ 唯一地存在. 且 $\mathcal{T}$ 是以 X 上以 $\mathcal{S}=\{f_\lambda^{-1}(V)\mid V\in\mathcal{T}_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ 为拓扑子基生成拓扑.

Proof: 显然 ϕ 中集合并为 X. Actually $f_\lambda^{-1}(Y_\lambda)=X$.

考虑以 ϕ 为拓扑子基生成的拓扑 $\mathcal{T}(\phi)$

为使每个 $f_\lambda:(X,\mathcal{T})\longrightarrow(Y_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)$ 连续. 则 $\mathcal{T}$ 应包含 ϕ 中的每一开集

$\longrightarrow$ $\mathcal{T}\supset\mathcal{T}(\phi)$

Thm: 设 X 上 $\{f_\lambda: X\longrightarrow(Y_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)\}$ 映射族的始端拓扑 $\mathcal{T}$. 则:

对任一 $(Z,\mathcal{T}_Z)$ 拓扑空间. 与 $g:(Z,\mathcal{T}_Z)\longrightarrow X$

g 连续 $\Longleftrightarrow$ $f_\lambda\circ g$ 连续.

SECTION 子空间

Thm:

利用 $i: A \hookrightarrow (X, \mathcal{T})$ 的包含映射的始端拓扑.

例:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] & (X, \mathcal{T}) \\ B \arrow[u, hook, "i"] & \end{tikzcd}$$

B 作为 A 的子集.

则由始端拓扑传递性 B 从 A 拿到的子空间拓扑与 B 从 X 中子空间拓扑一样.

Thm:

$f: X \to Y$ 连续. 则对于任一子集 A. $f|_A: A \to Y$ 连续.

Thm:

$f: X \longrightarrow Y$, B 是 Y 中包含 $f(X)$ 的子集. 则 f 连续 $\Longleftrightarrow$ $f': X \to B$ $f'(x) = f(x)$ 连续.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, hook, "i"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

由 i 始端拓扑万有性质即知.

2.1 乘积空间

Theorem: 2.1.1

设$(X_1,\mathcal{T}_1)$与$(X_2,\mathcal{T}_2)$是2个拓扑空间. $\mathcal{B}=\{U\times V \mid U\in\mathcal{T}_1,\ V\in\mathcal{T}_2\}$

则$\mathcal{B}$是$X_1\times X_2$上的拓扑基.

Proof: ① $\forall (x,y)\in X_1\times X_2$ 事实上 $(x,y)\in X_1\times X_2\in\mathcal{B}$

② 设 $U_1\times V_1,\ U_2\times V_2\in\mathcal{B}$ 且 $(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)\neq\varnothing$

$\forall (x,y)\in(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)$ 故 $x\in U_1\cap U_2$ $y\in V_1\cap V_2$

令 $U_1\cap U_2=U\in\mathcal{T}_1$ 令 $V=V_1\cap V_2\in\mathcal{T}_2$ 则 $U\times V\in\mathcal{B}$

故 $\mathcal{B}$ 是一拓扑基.

Definition: 2.1.1

$(X_1,\mathcal{T}_1)$与$(X_2,\mathcal{T}_2)$是2个拓扑空间. 则由Thm 2.1.1中$\mathcal{B}$生成的$X_1\times X_2$上的拓扑为乘积拓扑. $(X_1\times X_2,\ \mathcal{T})$为积空间.

Theorem 2.1.2

设$\mathscr{A}$是X空间的基. $\mathscr{L}$为Y空间一组基. 则: $\mathcal{H}=\{C\times D \mid C\in\mathscr{A},\ D\in\mathscr{L}\}$

是积空间一组基.

proof: 按Thm 1.1.4.

① 只需有 $X\times Y=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}K_\alpha$ $K_\alpha\in\mathcal{H}$

事实上 $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda_1}C_\alpha$ $C_\alpha\in\mathscr{A}$ $Y=\bigcup_{\beta\in\Lambda_2}D_\beta$ $D_\beta\in\mathscr{L}$.

$X\times Y=\bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda_1\\ \beta\in\Lambda_2}}\underbrace{(C_\alpha\times D_\beta)}_{\in\mathcal{H}}$ 故 $\mathcal{H}$ 为积空间一组基.

②：任取 $X\times Y$ 空间中开集 W 与 $(x,y)\in W$

WTS：$\exists\, C\in\mathscr{A}$ $D\in\mathscr{L}$ St. $(x,y)\in C\times D\subset W$

$\because$ 由定义知 $\mathscr{B}=\{U\times V \mid U\in\mathcal{T}_1,\ V\in\mathcal{T}_2\}$ 为 $X\times Y$ 基

故存在 $U\in\mathcal{T}_1$，$V\in\mathcal{T}_2$ St. $(x,y)\in U\times V\subset W$

$\Longrightarrow x\in U\quad y\in V$

又 $\mathcal{T}_1$ 基为 $\mathscr{A}$　$\mathcal{T}_2$ 基为 $\mathscr{L}$.

故存在 $C\in\mathscr{A}$　$D\in\mathscr{L}$　St. $x\in C\subset U\in\mathcal{T}_1$　$y\in D\subset V\in\mathcal{T}_2$.

故 $(x,y)\in C\times D\subset U\times V\subset W$

□.

Theorem 2.1.15:

$(X,\mathcal{T}_1)$，$(Y,\mathcal{T}_2)$ 为拓扑空间 $A\subset X$　$B\subset Y$．有子空间 $(A,\mathcal{T}_A)$，$(B,\mathcal{T}_B)$

有积空间 $(X\times Y,\mathcal{T})$

则 $A\times B$ 作为积空间子空间拓扑，与 $(A,\mathcal{T}_A)\times(B,\mathcal{T}_B)$ 构造之积空间拓扑应当一样.

proof: 设 $(A\times B,\mathcal{T}_3)$　$\mathcal{T}_3=\{U\cap(A\times B) \mid U\in\mathcal{T}\}$

$(A\times B,\mathcal{T}_4)$　$\mathcal{T}_4$ 由 $\{K_1\times K_2 \mid K_1\in\mathcal{T}_A,\ K_2\in\mathcal{T}_B\}$ 生成

$\mathcal{T}_3$ 中任一元：$\displaystyle\bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda_1\\ \beta\in\Lambda_2}}\left((O_\alpha^X\times O_\beta^Y)\cap(A\times B)\right)=\bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda_1\\ \beta\in\Lambda_2}}\left(\underbrace{(O_\alpha^X\cap A)}_{\in\mathcal{T}_A}\times\underbrace{(O_\beta^Y\cap B)}_{\in\mathcal{T}_B}\right)$

$\mathcal{T}_4$ 中任一元：$\displaystyle\bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda_1\\ \beta\in\Lambda_2}}(K_\alpha^1\times K_\beta^2)$　$\underset{\substack{\shortparallel\\ A\cap O_\alpha^1}}{K_\alpha^1}\in\mathcal{T}_A$　$\underset{\substack{\shortparallel\\ B\cap O_\beta^2}}{K_\beta^2}\in\mathcal{T}_B$

$\displaystyle=\bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda_1\\ \beta\in\Lambda_2}}\left((A\cap O_\alpha^1)\times(B\cap O_\beta^2)\right)$

$\displaystyle=\bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda_1\\ \beta\in\Lambda_2}}\left((A\times B)\cap(O_\alpha^1\times O_\beta^2)\right)=\bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda_1\\ \beta\in\Lambda_2}}\left(\overbrace{(O_\alpha^1\times O_\beta^2)}^{\in\mathcal{T}}\cap(A\times B)\right).$

Theorem 2.1.5:
设 X, Y 为拓扑空间，$A \subset X$，$B \subset Y$ 则 $\text{Int}(A\times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$
且 $\text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B) = \text{Cl}(A\times B)$

Proof: $\text{Int}(A)$ 是 X 中开含于 A，$\text{Int}(B)$ 是 Y 中开含于 B
故 $\text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$ 为 $X\times Y$ 中开且含于 $A\times B$
从而 RHS $\subseteq$ LHS
另一方面，$(a,b) \in \text{Int}(A\times B)$ 则存在 $X\times Y$ 中开集 W s.t.
$(a,b) \in W \subset A\times B \Longrightarrow$ 存 U 为 X 中开 V 为 Y 中开 s.t. $(a,b) \in U\times V \subset W \subset A\times B$
$\Longrightarrow a \in U \subset A$ $\quad b \in V \subset B$ $\quad \Rightarrow a \in \text{Int}(A)$ $\quad b \in \text{Int}(B)$
$(a,b) \in \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$

□.

此外 $\forall (x,y) \in \text{Cl}(A) \times \text{Cl}(B)$
则 $\forall U_x, U_y$ $\quad U_x \cap A \neq \phi$ $\quad U_y \cap B \neq \phi$
$\Longrightarrow$ $(U_x \times U_y) \cap (A\times B) \neq \phi$ $\quad \Rightarrow (x,y) \in \text{Cl}(A\times B)$

$\forall (x,y) \in \text{Cl}(A\times B)$ 则对 (x,y) 任一邻域 $O_x \times O_y$
$(O_x \times O_y) \cap (A\times B) \neq \phi$ $\quad \Rightarrow O_x \cap A \neq \phi$ $\quad O_y \cap B \neq \phi$ $\quad$ □.

Definition: $X = X_1 \times X_2$ $\quad p_1: X \longrightarrow X_1$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto x_1$ $\quad$ ....
易知 p_1，p_2 为连续映射

Theorem: 设 X_1, X_2 为拓扑空间，则 $X = X_1 \times X_2$ 上的乘积拓扑是使 p_1, p_2 连续的最粗糙拓扑

Proof: 设 $\mathcal{T}'$ 为 X 上拓扑 且 s.t. p_1, p_2 连续.

下证 乘积拓扑$\mathcal{T}$ 的基 $\mathcal{B}=\{U\times V \mid U$为$X_1$开, V为X_2开$\}\subset\mathcal{T}'$

设 $U\times V\in\mathcal{B}$

$p_1^{-1}(U)=U\times X_2$ $\quad$ $p_2^{-1}(V)=X_1\times V$ $\quad$ 均为 X上开

则 $p_1^{-1}(U)\cap p_2^{-1}(V)=U\times V$ 亦为 X上开. $\square$.

Theorem 2.17:

assume X_1, X_2, Y are topology spaces. $X=X_1\times X_2$

$f: Y\to X$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $p_1\circ f$ $\quad$ $p_2\circ f$ 均连续.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & X=X_1\times X_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & X_1 \\ & & X_2 \end{tikzcd}$$

proof: 只证充分性 只需证明对于 X上的基 $\{U\times V \mid U\in\mathcal{T}_1, V\in\mathcal{T}_2\}$

$(p_1\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(p_1^{-1}(U))=f^{-1}(U\times X_2)$ 为Y中开

$(p_2\circ f)^{-1}(V)=f^{-1}(p_2^{-1}(V))=f^{-1}(X_1\times V)$ 为Y中开

故 $f^{-1}(U\times X_2)\cap f^{-1}(X_1\times V)=f^{-1}(U\times V)$ 为Y中开. $\square$.

Corollary $X\times Y$下

① 乘积空间下 一般 $\partial(A\times B)\neq\partial(A)\times\partial(B)$ 反例如 $[0,1]\times[0,1]$

②: $\partial(A\times B)=(\partial A\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial B)$

③ $(A\times B)^c=(A^c\times B)\cup(A\times B^c)$

proof 2. $\partial(A\times B)=\overline{(A\times B)}-\operatorname{int}(A\times B)$

$=\overline{A}\times\overline{B}-A^\circ\times B^\circ$

$$\bar{A}\times\bar{B}-A^\circ\times B^\circ=\bar{A}\times\bar{B}\cap(A^\circ\times B^\circ)^c$$

$$=\bar{A}\times\bar{B}\cap\big((X-\mathrm{int}A)\times B^\circ\cup A^\circ\times(X-\mathrm{int}B)\big)$$

$$=\big(\bar{A}\cap(X-\mathrm{int}(A))\times\bar{B}\big)\cup\big(\bar{A}\times(\bar{B}\cap(Y-\mathrm{int}(B)))\big)$$

$$=\big(\bar{A}\cap\mathrm{cl}(X-A)\times\bar{B}\big)\cup\big(\bar{A}\times(\bar{B}\cap\mathrm{cl}(Y-B))\big)$$

$$=(\partial A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\partial B)$$

Theorem:

① $Y\xrightarrow{f}X_1$ $\quad Y\xrightarrow{g}X_2$ 则 $Y\xrightarrow{\varphi}X_1\times X_2$ $\quad y\mapsto(f(y),g(y))$

φ 连续 $\Leftrightarrow$ f与g都连续

②: X_1,X_2,Y_1,Y_2 均为拓扑空间, $f_i: X_i\to Y_i$

定义: $\varphi: X_1\times X_2\longrightarrow Y_1\times Y_2$ $\quad \varphi(x_1,x_2)=(f_1(x_1),f_2(x_2))$

则 φ 连续 $\Longleftrightarrow$ f_1 与 f_2 连续.

Proof:

①: 乘积拓扑 易知

②: f_1与f_2连续时

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr, "f_1"] & & Y_1 \\
X_1\times X_2 \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "\varphi"] & Y_1\times Y_2 \arrow[ur, "p_1^*"'] &
\end{tikzcd}$$

此时 $\Longrightarrow p_1^*\circ\varphi$ 连续 $\Longrightarrow \varphi$ 连续

当: φ连续时 固定 $x_2^0\in X_2$

定义 j_1 : $X_1\longrightarrow X_1\times X_2$ $\quad j_1$ 连续

$x_1\longmapsto(x_1,x_2^0)$

实际上: 取 $X_1\times X_2$ 拓扑基 $U\times V$ $\quad U$为X_1开 $\quad V$为X_2开

此时: $j_1^{-1}(U\times V)=\begin{cases}U & x_2^0\in V\\ \phi & x_2^0\notin V\end{cases}$ 均开

故 f_1 连续

$$X_1 \xrightarrow{j_1} X_1\times X_2 \xrightarrow{\varphi} Y_1\times Y_2 \xrightarrow{\pi_1} Y_1$$

$f_1 = \pi_1\circ\varphi\circ j_1$　　故 f_1 连续。

Theorem: 设 $(X,\mathcal{T})$ 为 $\{(X_\lambda,\mathcal{T}_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ 积空间。

(1): X 中形如 $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ (A_λ 为 X_λ 开; 且除一个 A_λ 外 其余 $A_\lambda = X_\lambda$) 为 $\mathcal{T}$ 的子基.

(2) X 中形如 $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ (A_λ 为 X_λ 开集 且除有限多个 A_λ 外 其余 $A_\lambda=X_\lambda$) 为 $\mathcal{T}$ 的基

Thm: $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda)$ 与 $\forall\lambda\in\Lambda$ $\pi_\lambda: X\longrightarrow X_\lambda$ 是连续、满射、开映射.

显然 π_λ 连续、满射. 且 π_λ 作用在 X 的自然的基上是开映射 故 π_λ 是开的

Proposition:

①: $\overline{\prod A_\lambda} = \prod\overline{A_\lambda}$　　② $\mathrm{Int}(\prod A_\lambda)\neq\prod\mathrm{Int}(A_\lambda)$

Proof: 一方面 $x\notin\overline{\prod A_\lambda}$. 故存在 $\prod V_\lambda$ 为一基本开集 包含 x 且与 $\prod A_\lambda$ 无交.

故 $\exists A_\mu\cap V_\mu=\emptyset$　$x_\mu\in V_\mu$

$\Rightarrow x_\mu\in X-\mathrm{cl}(A_\mu) = \mathrm{Int}(X-A_\mu)$　$(V_\mu\subseteq A_\mu^c = X-A_\mu \Rightarrow V_\mu\subseteq\mathrm{Int}(X-A_\mu))$

$\Rightarrow x_\mu\notin \mathrm{cl}(A_\mu)$　$\Rightarrow x\notin\prod\overline{A_\lambda}$

反之: 若 $x=(x_\lambda)\notin\prod\overline{x_\lambda}$　则 $\exists\mu$ s.t. $x_\mu\notin\overline{A_\mu}$.

$\Rightarrow x_\mu\in X-\overline{A_\mu} = \mathrm{Int}(X-A_\mu)$　故 $\exists V_\mu$ 开 s.t. $x_\mu\in V_\mu\subseteq X-A_\mu$.

$V_\mu\cap A_\mu=\emptyset$　对于 $\lambda\neq\mu$. 令 $V_\lambda=X_\lambda$. 此时 $\prod V_\lambda$ 为 X 的包含 x 的基本开集.

亦为邻域 与 $\overline{\prod A_\lambda}$ 交空　故 $x\notin\overline{A}$.

Corollary: $X = \prod(X_\lambda)$ 则 $\prod A_\lambda$ 为闭 $\Longleftrightarrow$ A_λ 为闭.

2.2 度量空间

Definition: 2.2.1

X上一度量 $d: X\times X\longrightarrow \mathbb{R}$

① $x,y\in X$ $d(x,y)\geq 0$ 且 $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

② $d(x,y)=d(y,x)$

③ $\forall x,y,z$ $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

Example 2.2.1

令 $d: X\times X\longrightarrow \mathbb{R}$ $\forall x,y\in X$ 当 $x=y$ $d(x,y)=0$，当 $x\neq y$ 时 $d(x,y)=1$

则 d 为 X 上一度量. 称之为离散度量.

定义 2.2.2

设 (X,d) 为度量空间, $\forall x\in X$. $\forall \varepsilon>0$

$B_d(x,\varepsilon)=\{p\in X \mid d(p,x)<\varepsilon\}$ $\overline{B_d}(x,\varepsilon)=\{p\in X \mid d(p,x)\leq\varepsilon\}$.

Theorem: 2.2.1

设 (X,d) 为度量空间, 则: $\mathcal{B}=\{B_d(x,\varepsilon) \mid x\in X, \varepsilon>0\}$ 是 X 上一个拓扑基.

Definition 2.2.3

设 (X,d) 为度量空间. 称由 $\mathcal{B}$ 拓扑基生成的拓扑为度量 d 诱导的拓扑.

Theorem 2.2.2.

(X,d) 为一 metric space. $U\subset X$. Then U is open $\Longleftrightarrow$ $\forall y\in U, \exists\varepsilon>0$ st. $B_d(y,\varepsilon)\subset U$

Example 2.2.4

令 $C[a,b]=\{f: f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续$\}$. $\rho(f,g)=\int_a^b |f-g|\,dx$

Theorem: 2.2.3

Assume (X,d) is a metric space. Then: $d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ is continuous.

The topology on $X\times X$ is a product topology of topology on (X,d).

proof:

对 $\forall (x,y)$ 给定. $d(x,y)=r$ $\forall \varepsilon>0$ then it only need to prove there exists a open neighborhood O which includes (x,y) and for every z, z' in O, we have $d(z,z') \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$.

待定 $\delta>0$ 考虑 包含 (x,y) 的 邻域 $B(x,\delta)\times B(y,\delta)$.

$\forall z, z' \in B(x,\delta)$ 与 $B(y,\delta)$

$$d(z,z') \le d(z,x)+d(x,y)+d(y,z') < 2\delta + d(x,y)$$

$$\Rightarrow d(z,z') - d(x,y) < 2\delta \quad (<\varepsilon)$$

故取 $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ 类似的 $d(x,y) - d(z,z') < \varepsilon$.

$$\Rightarrow |d(x,y) - d(z,z')| < \varepsilon.$$

□.

定义 2.2.4

设 (X,d) 为度量空间. $A, B \subset X$.

①: $\forall x\in X$ 给定. $d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a\in A\}$. 称为 x 到 A 距离.

② $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$. 称为 A 与 B 之间距离.

---

proposition: 2.2.1

(X,d) is a metric space. $A\subset X$ 非空. 则:

① $d(x,A)$ 在 X 上连续

②: A 为非空闭集. $d(x,A)=0 \Longleftrightarrow x\in A$.

Proof: ① $\forall x_0 \in X$. $d(x_0,A)=k$ $\quad \forall (k-\delta, k+\delta)$ 邻域

WTS: 存在 X 中开球 $B(x_0,\varepsilon)$. $\forall y\in B(x_0,\varepsilon)$ 成立 $d(y,A)\in(k-\delta,k+\delta)$.

此时: $d(y,A)\leq d(y,a)\leq d(y,x_0)+d(x_0,a)<k+2\varepsilon$.

上述由 $d(x_0,A)=k$ 定义 可取到一点 $a\in A$ st. $d(x_0,a)<k+\varepsilon$.

$\forall a\in A$ $d(y,a)\geq d(x_0,a)-d(y,x_0)\geq k-\varepsilon$

再取下确界 $d(y,A)\geq k-\varepsilon$. □.

②: 设 A 为一非空闭集. $d(x_0,A)=0 \Longleftrightarrow x_0\in A$

"$\Leftarrow$" it is obvious.

"$\Rightarrow$" $\forall x_0$ 邻域 $B(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\phi$ $\leftarrow$ 由下确界定义不断缩小得到.

Theorem: 2.2.4

设 d, d' 是X上 2个度量. $\mathcal{T},\mathcal{T}'$ 分别由 d 与 d' 诱导而来.

则: $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}' \Longleftrightarrow \forall x\in X$. $\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ St. $B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$.

Theorem: 设 $(X,d)\longrightarrow(Y,\rho)$ 是一映射. $x_0\in X$. 则:

① f在 x_0 连续. ②: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ st. $f(B_d(x_0,\delta))\subset B_\rho(f(x_0),\varepsilon)$.

③: $x_n\xrightarrow{d}x_0$ 则有 $f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(x_0)$.

Proof: ① $\Rightarrow$ ③ 若 $x_n\xrightarrow{d}x_0$ 且 f在 x_0 连续 则

WTS: $\forall\varepsilon>0$ $\exists N>0$ 当 $n\geq N$ 时 $f(x_n)\in B_\rho(f(x_0),\varepsilon)$

$\exists\delta>0$ $f(B_d(x_0,\delta))\subset B_\rho(f(x_0),\varepsilon)$.

$\because x_n\longrightarrow x_0$ 故. $\exists N>0$ 当 $n\geq N$ 时 $x_n\in B_d(x_0,\delta)$. □.

③ ⇒ ② 反证法:

若 f 在 x_0 不连续 则: $\exists \varepsilon_0$ $\forall \delta > 0$ s.t. $\exists x$ s.t. $d(x, x_0) < \delta$ 但 $\rho(f(x_0), f(x)) \geq \varepsilon_0$

取 $\delta = \frac{1}{n}$ 故有 $x_n \to x_0$ 但 $\rho(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$ 矛盾.

Proposition: 设 (X_i, d_i) 为 n 个度量空间. $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$

令 $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)\right)^{\frac{1}{2}}$

其中 $x = (x_1 \sim x_n)$ $\quad y = (y_1 \sim y_n)$ 则 (X, d) 为度量空间. 且由 d 诱导出拓扑即积空间拓扑

Proof: ① d is a metric.

note that $\underbrace{\left(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2), \cdots, d_n(x_n, y_n)\right)}^{=u} \in \mathbb{R}^n$.

则 $\forall x, y, z \in X$ WTS: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

则 得证

其次: 验由度量诱导出拓扑基 $B_d(\vec{x}, \varepsilon) = \{y \in X : \left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2(y_i, x_i)\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\}$.

与 积空间拓扑基. $B_{d_1}(x_1, \varepsilon_1) \times B_{d_2}(x_2, \varepsilon_2) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, \varepsilon_n)$ 证明 ~~相互~~ 互相包含.

Theorem: 设 (X, d) 是有限多个度量空间 $\{(X_i, d_i) \mid i = 1, 2, \cdots n\}$ 的积空间. 则 X 的序列 ϑ_k 收敛于 $p \in X \iff$ 对每个 i $(\pi_i(v_k))$ 收敛于 $\pi_i(p)$.

Definition 2.2.5

设 (X, d) 为一度量空间. $A \subset X$. 若存在 $M > 0$ 使得 $x, y \in A$ 均有 $d(x, y) \leq M$

则称 A 为一有界子集. 若 X 也为有界. 则称 d 是一有界度量

Theorem: 2.2.5

设 (X,d) is a mertic space. $d': X\times X\to\mathbb{R}$ s.t. $d'(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$. 则 d' 为一有界度量 且 d 与 d' 在 X 上诱导出相同拓扑.

Proof: d' is bounded. Next we check the definition of mertic of d' especially the triangle inequality.

①: $d(x,y)\geq 1$ 或 $d(y,z)\geq 1$ 时 $d'(x,y)+d'(y,z)\geq 1$ 但 $d'(x,z)\leq 1$

故: $d'(x,z)\leq d'(x,y)+d'(y,z)$

②: $d(x,y)\leq 1$ 且 $d(y,z)\leq 1$ 时:

$d'(x,y)+d'(y,z)=d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)\geq d'(x,z)$.

故: d' 的确为一度量. 再说明 d 与 d' 诱导出相同拓扑.

$\forall x\in X$ 和球形开邻域 $B_{d'}(x,\varepsilon)$ 若 $\varepsilon\leq 1$ 则 $B_d(x,\varepsilon)=B_{d'}(x,\varepsilon)$ 若 $\varepsilon>1$ 则 $B_{d'}(x,\varepsilon)=X$

亦有: $B_d(x,\varepsilon)\subset B_{d'}(x,\varepsilon)$ 故 $\mathcal{T}$ 比 $\mathcal{T}'$ 精细.

另一方面: $\forall x\in X$ 和球形开邻域 $B_d(x,\varepsilon)$ 若 $\varepsilon\leq 1$, $B_d(x,\varepsilon)=B_{d'}(x,\varepsilon)$

若 $\varepsilon>1$ $B_{d'}(x,1)\subset B_d(x,\varepsilon)$ 故取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$ 而有: $B_{d'}(x,\delta)\subset B_d(x,\varepsilon)$.

从而 $\mathcal{T}'$ 比 $\mathcal{T}$ 精细.

Definition: 设 (X,d_X) (Y,d_Y) 为 mertic spaces, $f: X\to Y$ 为映射. 若对于 $\forall x,x'\in X$ 均有 $d_X(x,x')=d_Y(f(x),f(x'))$ 则称 f 为~~一等距映射~~ 且 X 与 Y 同胚.

Proof: Actually we can get f is a injection.

if $f(x)=f(y)$ we claim $x=y$ if $x\neq y$ 则 $d_X(x,y)>0$.

$\Longrightarrow$ $d_Y(f(x),f(y))>0$ get contradiction!

同胚只需利用度量空间的拓扑即可.

Theorem: $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{C}$ 上是 homeomorphic

proof: $(x,y) \longrightarrow x+iy$ 可验证为一等距映射

Proposition: (X,d) 为一 mertic space $Y\subseteq X$ 则 Y 的子空间拓扑与 Y 从 X 继承的度量拓扑一样。

Proof: Y 的子空间拓扑基为: $\{B_X(x,r)\cap Y\}$

Y 度量拓扑基 $\{B_Y(y,\delta)\}$

$$\underbrace{B_X(x,r)\cap Y = \bigcup_{y\in B_X(x,r)\cap Y}\{y\} \subseteq \bigcup_{\sim} B_Y(y,\varepsilon)}_{\because y\in B_X(x,r)\text{ 故 }\exists\varepsilon\text{ s.t. }B_Y(y,\varepsilon)\subset B_X(y,\varepsilon)\subset B_X(x,r)} \subseteq \bigcup_{\sim} B_X(x,r)\cap Y$$

$\Rightarrow B_X(x,r)\cap Y = \bigcup\limits_{\sim} B_Y(y,\varepsilon)$

且 $B_Y(y,\varepsilon) = B_X(y,\varepsilon)\cap Y$

故 $T_1 \subset T_2$ $T_2 \subset T_1$. □

Theorem: (X,d) 为一 mertic space. A, B 为 X 中 2个不相交闭集. 则存在2个不交开集 U, V s.t. $A\subset U$ $B\subset V$.

proof: 定义 $f(x)=d(x,A)-d(x,B)$ 是 X 上连续函数.

则 $\forall a\in A$ $f(a)<0$ $\forall b\in B$ $f(b)>0$

$U=\{x\in X: f(x)<0\}$ $V=\{x\in X: f(x)>0\}$.

$A\subset U$ ∵ $\forall a\in A$ $d(a,A)=0$ $d(a,B)>0$. $f(a)<0$ $a\in U$.

同理 $B\subset V$.

且 $U\cap V=\phi$ 若 $U\cap V\neq\phi$ $x\in U\cap V$ 则 $f(x)<0$ $f(x)>0$ 矛盾.

例: $U=f^{-1}((-\infty,0))$ 开. $V=f^{-1}((0,+\infty))$ 开 证.

3.1 分离与可数

Definition 3.1.1

设 X 为拓扑空间，

①：$\forall x, y \in X$. x 有开邻域 U s.t. $y \notin U$ y 有开邻域 V s.t. $x \notin V$

$\Longrightarrow$ 称 X 为 T_1 空间.

②：$\forall x, y \in X$. 均有在 x 邻域 U，y 邻域 V, s.t. $U \cap V = \phi$

$\Longrightarrow$ 称 X 为 T_2 空间 (Hausdorff space).

Theorem 3.1.1

X 为 T_1 空间 $\Longleftrightarrow$ $\{x\}$ 为闭集.

proof: "$\Rightarrow$" 若 X T_1 则 要证 $\{x\}$ 闭 只需 $X-\{x\}$ 开.

$\forall y \in X-\{x\} \Rightarrow y \neq x$ 则 $\exists V_y$ s.t. $x \notin V_y$ $\Rightarrow V_y \subset X-\{x\}$.

"$\Leftarrow$" $\forall x, y \in X$, $x \neq y$ 取 $U = X-\{y\}$ $V = X-\{x\}$

则 U 开 且 $x \in U$, $y \notin U$. ... ~ □.

Corollary: 显然 T_2 为 T_1 空间.

Example 3.1.1:

①：无限集 X 上的有限补拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_{fc})$. 为 T_1 空间. 但非 T_2.

$\because x \neq y$ 若 $U_x \cap V_y = \phi$ $U_x = X - F_U$ $V_y = X - F_V$ (F_U 与 F_V 为有限集)

$U_x \cap V_y = X - (F_U \cup F_V) \neq \phi$ 矛盾.

②：$(X, \mathcal{T}_T)$ 离散拓扑空间 是 T_2 的.

③：$\mathbb{R}^n$ 与度量空间是 T_2. 只需取 $\varepsilon = \frac{1}{3} d(x,y)$ 则 $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \phi$

④：多于 1 点的平凡拓扑空间 不是 T_1 也不是 T_2

Theorem 3.1.2.

X 是一 Hausdorff 空间 $\Longleftrightarrow$ $D = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 是 $X \times X$ 上的闭集

proof: "$\Longrightarrow$" 只需证 $X \times X - D$ 是 $X \times X$ 中开. $\forall (x,y) \in X \times X - D$. $(x \neq y)$.

则 $\exists U, V$ 为 X 开 且 $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \phi$

$\Rightarrow$ $(x,y) \in U \times V$ (为 $X \times X$ 中开). 从而 证毕

"$\Longleftarrow$" 假设 $D = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 是 $X \times X$ 中闭集. $\forall x, y \in X$ $x \neq y$

则 $(x,y) \in X \times X - D$ 故由积拓扑的定义 存在 x 开邻域 U y 开邻域 V

s.t. $(x,y) \in U \times V \subset X \times X - D$ $\Rightarrow U \cap V = \phi$ □.

Definition 3.1.2.

① $\forall x \in X$ 任一点, 与不包含 x 的 闭集 B, 存在 U, V 为开 s.t. $x \in U$ $B \subset V$ $U \cap V = \phi$

$\Rightarrow$ 称 X 为 T_3 空间.

②：X 中任一对不交闭集 A, B 存在 不交开 $U, V \subset X$. s.t. $A \subset U$ $B \subset V$

$\Longrightarrow$ 称 X 为 T_4 空间.

Proposition:

显然的. 若 X 为 T_1, T_3 空间 则 X 是 T_2 空间.

Theorem 3.1.3

X为T_3空间 $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in X$，与x的任一开邻域U，都存在x的开邻域V st. $x\in V\subset cl(V)\subset U$

proof:

"$\Longrightarrow$" $\forall x\in X$ 与x的任一开邻域U。则 $X-U$ 为不包含x闭集

故存在 V_1, V_2 为不交开集 st. $x\in V_1$，$X-U\subset V_2$

$\Longrightarrow$ $V_1\subset X-V_2$ $\therefore$ $X-V_2\subset U$

$x\in V_1\subset cl(V_1)\subset cl(X-V_2)=X-V_2\subset U$ □

"$\Longleftarrow$" $\forall x\in X$ 与一不包含x闭集V ; x

则 $X-V$ 为包含x的一开邻域 故:

存在U为x开邻域 st. $x\in U\subset cl(U)\subset X-V$

则 $X-cl(U)\supset V$

故 $x\in U$ $V\subset X-cl(U)$ 且 U与$X-cl(U)$不交

Corollary 3.1.4

X为T_3 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{B}$为X一个基. $\forall x\in X$ 与x任一开邻域U，存在$B\in\mathcal{B}$ st.
$x\in B\subset cl(B)\subset U$

proof:

"$\Longrightarrow$" 由Thm 3.1.3知 存在x开邻域V st. $x\in V\subset cl(V)\subset U$.

故存在拓扑基B st. $x\in B\subset V$ 故 $x\in B\subset cl(B)\subset cl(V)\subset U$.

"$\Longleftarrow$" 即为Thm 3.1.3 $\Leftarrow$

Theorem 3.1.4.

X 为 T_4 的 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ 任一闭集 $F\subset X$，与任一包含 F 的开集 $\mathcal{U}$；都存在包含 F 开集 V

s.t. $F\subset V\subset cl(V)\subset\mathcal{U}$.

proof: "$\Longleftarrow$" 任取 X 中不交的闭集 F_1, F_2

则 $F_1\subset X-F_2$ (开) 都存在包含 F_1 的开集 $\mathcal{U}$ s.t. $F_1\subset\mathcal{U}\subset cl(\mathcal{U})\subset X-F_2$

$\Longrightarrow$ $X-\mathcal{U}\supset X-cl(\mathcal{U})\supset F_2$

故 $F_1\subset\mathcal{U}$ $F_2\subset X-cl(\mathcal{U})$ 且 $\mathcal{U}\cap X-cl(\mathcal{U})=\phi$

故 T_4

"$\Longrightarrow$" $\forall F\subset X$ F 闭 与包含 F 开集 $\mathcal{U}$ 则：$\mathcal{U}\subset F$ $X-\mathcal{U}\supset X-F$.

故 F 与 $X-\mathcal{U}$ 为 X 中 2 个不交闭集

故存在开集 O_1, O_2 s.t. $F\subset O_1$ $X-\mathcal{U}\subset O_2$ 且 $O_1\cap O_2=\phi$

$\underline{F\subset O_1}\ \underline{\subset cl(O_1)}\subset cl(X-O_2)=X-O_2\ \underline{\subset\mathcal{U}}$. □

proposition:

度量空间是 T_1 下 则 $T_4\Rightarrow T_3\Rightarrow T_2$

Example

$(X, \mathcal{T}_{fc})$ 上既不是 $T_2\sim T_4$ 的.

Proposition 3.1.1

设 (X,d) 为度量空间. A 与 B 为 X 中 2 个非空的不交闭集. 则存在连续函数

$f: X\to[0,1]$ $f(A)=\{0\}$ $f(B)=\{1\}$ $0<f(x)<1$ $x\in X-A\cup B$

proof: 构造 $f=\dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$

Theorem: Mertic space are T_i $(i=1,2,3,4)$ space.

proof: 显然 单点集为闭 故 T_1 下说明其 T_4. $\forall A,B$ 为 X 中闭.

由引理 存在 f s.t. $f(A)=\{0\}$ $f(B)=\{1\}$

令 $U=f^{-1}\{[0,\frac{1}{2})\}$ $V=f^{-1}((\frac{1}{2},1])$

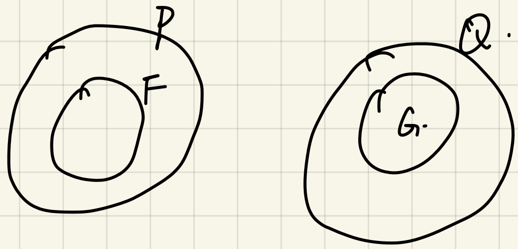
故 $A\subset U$ $B\subset V$ 且 $U\cap V=\phi$. 故 $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2$.

proposition:

F,G 为 T_4 中不交闭集. 则存在 X 中开的 U,V s.t. $F\subseteq U$, $G\subseteq V$

且 $cl(U)\cap cl(V)=\phi$.

Proof: 由 T_4 知:



P,Q 开. $F\subseteq P$ $G\subseteq Q$.

由 T_4: 存在 U,V 开 $F\subseteq U\subseteq cl(U)\subseteq P$ $G\subseteq V\subseteq cl(V)\subseteq Q$. □

Definition 3.1.3'

设 X 为拓扑空间，$x\in X$，$\mathcal{V}_x$ 是由 x 的若干(开)邻域构成的邻域族。
若对 x 的任一邻域 U，都有 $V\in\mathcal{V}_x$ s.t. $x\in V\subset U$
则称 $\mathcal{V}_x$ 为 x 的邻域基
若 $\forall x\in X$，x 均有 It 可数邻域基 则称 C_1 空间。

Theorem 3.1.5

X 为 C_1，$x\in X$，则 x 有一可数邻域基 $\{V_1, V_2, \cdots\}$ s.t. $V_n\supset V_{n+1}$.

Proof: 已知有可数邻域基 $\{U_1, U_2, \cdots U_n\}$

令 $V_k=\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ 即可

Example 3.1.6

Metric space is a C_1 space. 邻域基取为 $\mathcal{V}_x=\{B(x,\frac{1}{n})\}$.

但一般度量空间不知是否 C_2

例如：实数集上配以离散度量，离散拓扑 非 C_2.

Example 3.1.7.

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{fc})$ 有限补空间 非 C_1.

若为 C_1 则 $x_0 \in \mathbb{R}$ 上 x_0 有一可数邻域基 $\{V_n \mid V_n = \mathbb{R} - F_n,\ F_n$ 有限$\}$

(F_n 闭)

则: $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 可数 故 $\mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^{n} F_i \neq \phi$ 取 $y \in \mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^{n} F_i$

$\Longrightarrow y \in V_i \ (\forall i)$ 令 $U = \mathbb{R} - \bigcap_{n} (F_n - \{y\})$ U 为开

且: $x \in U$

但 $V_n \cap (\mathbb{R} - U) = V_n \cap \left(\bigcap_{n} (F_n \cup \{y\}) \right) \ni y$

故 $V_n \cap (\mathbb{R} - U) \neq \phi$ $V_n \not\subseteq U$ 矛盾

Thm 3.1.6

X 为 C_1 空间, $A \subset X$. $x \in \mathrm{cl}(A)$ 则 A 中有点列 x_n 收敛到 x.

proof: $x \in \mathrm{cl}(A)$ 且设 x 的一个可数邻域基 $\{V_1, \cdots V_n \cdots\}$ 且 $V_n \supset V_{n+1}$

$V_n \cap A \neq \phi$ 取 $x_n \in V_n \cap A$

则 $x_n \longrightarrow x$

Theorem 3.1.7

设 X 为 C_1 空间. $x_0 \in X$. $f: X \longrightarrow Y$

则: f 在 x_0 连续 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_n \in X$ $x_n \to x_0$ 有 $f(x_n) \to f(x_0)$.

proof: "$\Longrightarrow$" it is clear.

"$\Longleftarrow$" 反证法, 若 f 在 x_0 处不连续. 则: 存在 $f(x_0)$ 的一邻域 U

St. $f^{-1}(U)$ 开不是 x_0 的邻域 故:

对 x_0 任一邻域 V 都有: $V \nsubseteq f^{-1}(U) \Rightarrow V \cap (X - f^{-1}(U)) \neq \phi$

$\Rightarrow x_0 \in Cl(X - f^{-1}(U)) \neq \phi$

故由 Thm. 3.1.6 知. 存在点列 $\{x_n\} \subseteq X - f^{-1}(U)$ St. $x_n \to x_0$. 进而 $f(x_n) \to f(x_0)$

但 $f(x_n) \notin U$ $f(x_0) \in U$ 矛盾.

Definition 3.1.4

若 X 上有一可数拓扑基 则称为 C_2 空间.

Example 3.1.8

$\mathbb{R}$ 上是 C_2 空间, 例如 $\{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 为一可数拓扑基.

proposition:

C_2 空间是 C_1 空间, C_2 空间是可分空间 (有一稠密可数子集).

proof: Obviously: 设 $\mathcal{B}$ 为 X 上的一可数拓扑基. 则: $\mathcal{B}_1 := \{B \in \mathcal{B} \mid x_0 \in B\}$

其亦为一可数集族.

而对 x_0 任一邻域 U. 则有拓扑基中的 B_{x_0} St. $x_0 \in B_{x_0} \subseteq U$ $\in \mathcal{B}_1$.

故 $\mathcal{B}_1$ 为 x_0 的一可数邻域基.

设 $\mathcal{B}$ 是 X 一可数拓扑基 记作 $\mathcal{B} = \{B_1, B_2 \cdots\}$ 在每一 B_i 中取一点 构成子集 A

A 可数. 下证 A 稠密 即: $\overline{A} \supseteq X$

即 $\forall x_0 \in X$ x_0 的任一开邻域 U $U \cap A \neq \phi$

这是因为: 存在 $x_0 \in B_k \subset U$ 则取的 y_k 点 $\in B_k$ $y_k \in A$

故 $U \cap A \supseteq \{y_k\} \neq \phi$ □.

Thm 3.4.8.

可分的度量空间是 C_2 的.

proof: 设 (X, d) 为一可分度量空间. 设 A 是 X 一可数稠密子集

令 $\mathcal{B} := \{ B(a, \frac{1}{n}) \mid a \in A,\ n \in \mathbb{Z}^+ \}$ 则 $\mathcal{B}$ 为一可数开集族.

下列证这为一拓扑基.

① check $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

$\because \forall x \in X$. $B(x, \frac{1}{2})$ 为一包含 x 的开邻域 又 $\overline{A} \supset X$

则 $B(x, \frac{1}{2}) \cap A \neq \phi$ 故. 取 $a \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A$ 作 $B(a, 1) \in \mathcal{B}$

则 $x \in B(a, 1)$.

②: $\forall x \in X$ 与开集 $U \ni x$. 则存在 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$

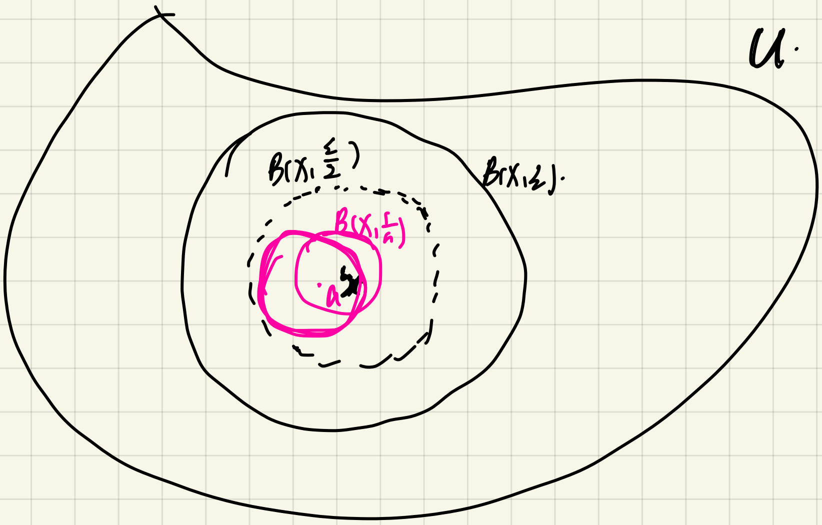
取 $n \in \mathbb{Z}^+$ s.t. $n > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ 从而 $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \frac{\varepsilon}{2})$

$\because A$ 稠密 故 $\exists a \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$

任取 $y \in B(a, \frac{1}{n})$ $d(y, x) \leq d(y, a) + d(a, x) \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$

从而 $y \in B(x, \varepsilon)$

$\Longrightarrow B(a, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \varepsilon)$ 故 $x \in B(a, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U$.



Proposition: C_1空间 X， X is $T_2 \Longleftrightarrow X$中任一序列至多有一个极限点。

proof: "$\Longrightarrow$" 若 $\{x_n\}$ 有2个极限点 $a \neq b$

$\because X$ is T_2 则 $a \in U$，$b \in V$

则当n充分大后 x_n 落于U，也落于V 矛盾

"$\Longleftarrow$" 若 X is not T_2，则 $\forall a \neq b$ a的任一邻域与b的任一邻域必交。

取a的邻域基$\{U_1\ U_2 \cdots\}$ $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$

b的邻域基$\{V_1\ V_2 \cdots\}$ $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots$

取 $x_1 \in U_1 \cap V_1$ $x_2 \in U_2 \cap V_2$ $\cdots$ 则 $x_n \to a$ 与 b 矛盾

Theorem: Lindelof Thm.

令 $\mathcal{U}$ 为一第二可数空间(拓扑基可数)的一族开覆盖，那么$\mathcal{U}$中可中取出有限开覆盖。

proof: 令 $\mathcal{B}$ 为X中一族可数拓扑基

定义集族：$\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset U\ \exists U \in \mathcal{U}\}$.

则：$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ 且$\mathcal{A}$可数。

$\forall B \in \mathcal{A}$ 则 $\exists U_B \in \mathcal{U}$ s.t. $B \subset \mathcal{U}_B$

定义 $\mathcal{V} = \{U_B \mid B \in \mathcal{A}\}$.

则：$\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ 且 $\mathcal{V}$ 可数。

下证 $\mathcal{V}$ 覆盖 X ：

$\forall x \in X$，则 $\exists O \in \mathcal{U}$ s.t. $x \in O \in \mathcal{U}$ O为开集

则 $\exists$ 某一个拓扑基 $K \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in K \subset O$

则 $K \in \mathcal{A}$， 则 $x \in U_K \in \mathcal{V}$ □

Theorem: 3.1.9.

若 X 为 C_2 与 T_3 空间，则 X 也是 T_4

proof: Assume $\mathcal{B}$ is a countable topology basic in X

and F, F' are two disjoint closed sets

$\forall x \in F$ $x \notin F'$ $x \in F \subset \underbrace{W = X - F'}_{\text{开}}$

$\because X$ T_3 空间. 存在 $B_x \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B_x \subset cl(B_x) \subset W$

故，$cl(B_x) \cap F' = \phi$

所有这样的 B_x 构成 $\mathcal{B}$ 的一个可数子集. $\mathcal{B}_1 = \{B_1, B_2, \cdots\}$

s.t. $F \subset \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_1} B \subset \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_1} cl(B) \subset W = X - F'$

故 $\bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}_1} cl(B) \cap F' = \phi$

类似地，有 $\mathcal{B}$ 一可数子集. $\mathcal{B}_2 = \{B_1', B_2', \cdots\}$

s.t. $F' \subset \bigcup\limits_{B' \in \mathcal{B}_2} B' \subset \bigcup\limits_{B' \in \mathcal{B}_1} cl(B') \subset W' = X - F$ 且 $\bigcup\limits_{B' \in \mathcal{B}_2} cl(B') \cap F = \phi$

记 $U_n = B_n - \bigcup\limits_{i=1}^{n} cl(B_i')$ $V_n = B_n' - \bigcup\limits_{i=1}^{n} cl(B_i)$

则 U_n, V_n 均开

且 $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ $U_m \cap V_n = \phi$

再定 $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. 则 U, V 开

$U \cap V = \phi$

且 $F \subset U$ $F' \subset V$ □.

Definition: 正则空间 $\Longleftarrow$ $T_1 + T_3$ 正规空间 $\Longleftarrow$ $T_2 + T_4$

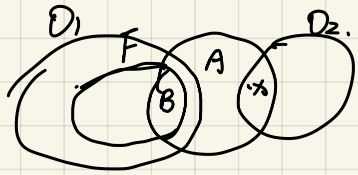
Theorem: 子空间继承性:

① T_1, T_2, T_3 空间 子空间仍是 $T_1 \sim T_3$.

② T_4 空间 闭子空间 是 T_4

③ C_1 空间 子空间 C_1

④ C_2 空间 子空间 C_2



proof: T_1 与 T_2 显然不难

设 X 为 T_3 空间. $A \subset X$ B是A闭集 $x \in A$ $x \notin B$

则存在 F为X闭 s.t. $B = F \cap A$

存在 X上开 O_1, O_2 s.t. $F \subset O_1$ $x \in O_2$ $O_1 \cap O_2 = \phi$

则 $O_2 \cap A$ 为 A上开 $O_1 \cap A$ 为 A上开. $x \in O_2 \cap A$

二者无交.

且 $B \subset B \cap F \subset A \cap O_1$. 故$A$仍为 T_3. □.

②: 易知.

③: $(A, \mathcal{T}_A)$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 子空间. X为 C_1. 此时

$\forall x \in A$. 则x在X中有一可数邻域基 设为 $\{V_1 \cdots V_n \cdots\}$

则x在A中有一可数邻域基族 $\{V_1 \cap A \cdots V_n \cap A \cdots\}$

对A上x的任一邻域 U, $x \in V_k \subset U \Rightarrow x \in V_k \cap A \subset U$.

④: $(A, \mathcal{T}_A)$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 子空间. X上一族可数拓扑基 $\{B_1 \cdots B_n\}$

则: A上一族拓扑基为 $\{B_1 \cap A \cdots B_n \cap A\}$ □.

Thm: $X = \prod(X_\lambda)$ 则

① $\prod(X_\lambda)$ 为 T_1 (T_2, T_3) 空间 $\Longleftrightarrow$ 每个 X_λ 为 T_1 (T_2, T_3) 空间.

②: $\prod(X_\lambda)$ 为 T_4 $\Longrightarrow$ X_λ 均为 T_4.

proof: ①: "$\Leftarrow$" T_1 T_2 很容易

"$\Leftarrow$" T_3: 若每个 X_λ 均 T_3 $x \in X$ 中. 邻域 U

则存在基 开集 W s.t. $x = (x_\lambda) \in W \subseteq U$

记 $W = \prod W_\lambda$ 且 W_λ 除 $\lambda_1 \sim \lambda_n$ 外 $W_\lambda = X_\lambda$.

当 $i = 1, 2 \cdots n$ 时 W_{λ_i} 是 x_{λ_i} 邻域 故存在 x_{λ_i} 邻域 V_{λ_i} s.t. $\overline{V_{\lambda_i}} \subset W_{\lambda_i}$

令 $V = \prod V_\lambda$ 其中 $\lambda = \lambda_1 - \lambda_n$ 时 $V_\lambda = V_{\lambda_i}$ 其余用 X_λ.

则: $\overline{V} = \prod \overline{V_\lambda}$

因此 $x \in V \subset \overline{V} = \prod \overline{V_\lambda} \subset W \subset U$

"$\Longrightarrow$" 方法是一样的. 以 T_3 为例.

设 X 为 T_3 下证 $\forall \lambda_0 \in \Delta$ X_{λ_0} 为 T_3

给定 $\lambda_0 \in \Delta$ $\forall \lambda \in \Delta - \{\lambda_0\}$. 在 X_λ 中固定 a_λ.

构造 $A = \prod A_\lambda$ 其中 $\lambda = \lambda_0$ 取 $A_{\lambda_0} = X_{\lambda_0}$ $\lambda \neq \lambda_0$ 时 $A_\lambda = \{a_\lambda\}$

则 $\varphi: X_{\lambda_0} \longrightarrow A$ $\quad (\varphi(x))_\lambda = \begin{cases} a_\lambda & \lambda \neq \lambda_0 \text{ 时} \\ x & \lambda = \lambda_0 \text{ 时} \end{cases}$

故为 同胚 则 X_{λ_0} 亦为 T_3.

proposition: Assume $f: X \to Y$ is continuous and injective. If Y is T_2.

$\Rightarrow X$ is T_2.

proof: $\forall x \neq y \quad x, y \in X$.

So $\exists U, V$ are open sets in Y, and $f(x) \in U \quad f(y) \in V$. $U \cap V = \phi$.

actually $f(x) \neq f(y)$ beacuse of injection.

$\Rightarrow x \in f^{-1}(U) \quad y \in f^{-1}(V)$ and $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ are open sets in X.

and $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \phi$.

Proposition:

$f, g: X \longrightarrow Y$ are continuous, Y is T_2

① $E = \{x \mid f(x) = g(x)\}$ is closed in X

②: If D is dense in X. and $f|_D = g|_D$ then $f = g$

proof: ①只证 $\{x \mid f \neq g\}$ is open in X. 若 $f(x_0) \neq g(x_0)$.

则 $\exists U, V$ 开集 st. $f(x_0) \in U$, $g(x_0) \in V$.

令 $O = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U)$ $\quad x_0 \in O$ and $f|_O \neq g|_O$. □.

②: 只证 若 $f(x_0) \neq g(x_0)$ 则 $\exists B_{x_0}$ S.t $f|_{B_{x_0}} \neq g|_{B_{x_0}}$

但 D is dense 与 $f|_D = g|_D$ 矛盾.

proposition:

$f: X \longrightarrow X$ $\quad X$ is T_2, f 连续 则其不动点集为闭.

proposition

X 可分空间. X中任一两两不相交开集族 C 是可数族.

Definition: Completely regular ($T_{3\frac{1}{2}}$ space) X

① T_1 ② $\forall x_0 \in A^c$, A 闭集, 存在 f 连续 : $X \to [0,1]$

(可推知 $T_{3\frac{1}{2}}$ is regular ($T_1 + T_3$)

3.2 URYSohn 引理

Thm 3.2.1 Urysohn 引理

若 X 为 T_4 空间，则对于 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 有界闭区间 $\Longleftrightarrow$ 对 X 中不相交非空闭集 A, B. 均存在连续映射 $f: X\longrightarrow[a,b]$ st. $f(A)=a$ 且 $f(B)=b$

proof: $\because [a,b]\cong[0,1]$ 不妨令 $[a,b]$

"$\Longleftarrow$" $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ 与 $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ 分离了 A, B.

"$\Longrightarrow$" 记 $C=X-B$ 则 C 是 A 的邻域 则由 T_4 的等价说法可知：

存在 A 邻域 $U_{\frac{1}{2}}$(开) st.

$$A\subset U_{\frac{1}{2}}\subset\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subset C$$

同理

$$A\subset U_{\frac{1}{4}}\subset\overline{U_{\frac{1}{4}}}\subset U_{\frac{1}{2}}\subset\overline{U_{\frac{1}{2}}}\subset U_{\frac{3}{4}}\subset\overline{U_{\frac{3}{4}}}\subset C$$

递归下去 形如 $t=\frac{m}{2^n}$ $m,n\in\mathbb{Z}^+$ $m=1,2,\cdots,2^n-1$ 有理数 t

存在开集 U_t st. $t_1<t_2$ 时

$$A\subset U_{t_1}\subset\overline{U_{t_1}}\subset U_{t_2}\subset\overline{U_{t_2}}\subset C.$$

注意到 $\Lambda=\left\{t=\frac{m}{2^n}\ \middle|\ n\in\mathbb{Z}_+,\ m=1,2,\cdots,2^n-1\right\}$

是 $[0,1]$ 稠密子集. 定义映射 $f: X\longrightarrow[0,1]$ 若 x 在某一 U_t 中 则 $f(x)=0$

若不然, $f(x)=\sup\{t\mid x\notin U_t\}$

显然 $0\le f(x)\le 1$. 且 $f(A)=0$ $f(B)=1$

下证 f 连续. 对于 $0<a<1$ $[0,a)$ 与 $(a,1]$ 构成 $[0,1]$ 的拓扑子基.

故只需说明: $f^{-1}([0,a))$ 与 $f^{-1}((a,1])$ 是开集即可

而实际上：$f^{-1}([0,a)) = \{x \mid f(x)<a\} = \bigcup_{t<a} U_t$ 开.

一方面若 $x_0 \in U_{t_0}$ 则 $f(x_0)=0 < a \Rightarrow x_0 \in f^{-1}([0,a))$.

另一方面：设 $f(x) = s < a$ 由稠密性 $\exists t_0$；$s < t_0 < a$ t_0 形如 $\frac{m}{2^n}$.

则 $x \in U_{t_0}$ ∵若 $x \notin U_{t_0}$ 则由定义：$f(x) = \sup \cdots \geq t_0$ 矛盾

$f^{-1}((a,1]) = \{x \mid f(x)>a\} = \bigcup_{t>a} (X - \overline{U_t})$. ~~容易~~ 易证.

Theorem 3.2.2, Tietze 定理

若 X 为 T_4 空间，则定义在 X的一个闭子集上的连续函数 $f: F \longrightarrow \mathbb{R}$. 可以连续~~到~~ 扩张至 X.

proof：① 先证 F 上有界连续函数. $f(F) \subset [a,b] \cong [-1,1]$

故不妨设 $f(F) \subset [-1,1]$ $f_0 := f$.

记 $A_0 = f_0^{-1}([-1,-\frac{1}{3}])$ $B_0 = f_0^{-1}([\frac{1}{3},1])$.

则 A_0 与 B_0 是F的不交闭集. 则由 Urysohn 引理 存在 X上的连续函数 g_0.

$g_0 : X \longrightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ $g_0(A_0) = -\frac{1}{3}$ $g_0(B_0) = \frac{1}{3}$.

定义：$f_1 : F \longrightarrow [-1,1]$ $f_1 = f_0 - g_0$ f_1 为 F上的连续.

$\Longrightarrow |f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$

同样地：对闭集 $A_1 = \{x \in F \mid f_1(x) \leq (-\frac{1}{3})(\frac{2}{3})\}$ $B_1 = \{x \in F : f_1(x) \geq (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})\}$.

$\longrightarrow$ 存在连续映射 $g_1 : X \longrightarrow [(-\frac{1}{3})(\frac{2}{3}), (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})]$

s.t. $g_1(A_1) = (-\frac{1}{3})(\frac{2}{3})$ $g_1(B_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$.

继续定义：$f_2 : F \longrightarrow [-1,1]$ $f_2 = f_1 - g_1 = f_0 - (g_0 + g_1)$.

且 $|f_2| \leq (\frac{2}{3})^2$

……

故得到两个连续映射序列 f_n 定义在 F 且 $|f_n(x)| \le (\frac{2}{3})^n$　g_n 定义在 X 上 s.t. $|g_n(x)| \le \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$

在 F 上有：$f_n = f_0 - (g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-1})$　$|f_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_k| \le (\frac{2}{3})^n$ $\forall x \in F$

$\because \{\sum_{k=0}^{n} g_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备度量空间 $C(X, [-1,1])$ 上序列 配以一致度量.

故知：$\{\sum_{k=0}^{n} g_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西列　故其收敛到一个连续映射 $\tilde{f}: X \to [-1,1]$

且 $|f - \sum_{k=0}^{n-1} g_k| \le (\frac{2}{3})^n$　$\forall x \in F$　令 $n \to \infty$　故 $\tilde{f}(x) = f(x)$

故 $\tilde{f}$ 是 f 延拓.

②：设 $f: F \to \mathbb{R}$　令 $f' = \frac{2}{\pi}\arctan(f)$　$x \in F$

故 $f'(F) \subset (-1,1)$　故存在连续延拓 $\tilde{f'}: X \to \mathbb{R}$

$\tilde{f'}(X) \subset [-1,1]$　$E = \tilde{f'}^{-1}(\{-1,1\})$　E 为 X 中闭.

$E \cap F = \phi$　由 Uryshon 引理　存在连续函数 $h(x)$ s.t.

$h(X) \subset [0,1]$　$h(E) = 0$　$h(F) = 1$

$\forall x \in X$　$h(x) \cdot \tilde{f'}(x) \in (-1,1)$

则定义 $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$　$x \mapsto \tan(\frac{\pi}{2} h(x) \cdot \tilde{f'}(x))$.　□

Definition 3.2.1

$(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间. 若存在 X 上一度量 d. 使得 d 诱导的拓扑即 X. 则称 X 为可度量化空间.

Example 3.2.2.

X 上离散度量诱导了 X 上的离散拓扑. 故 $(X, \mathcal{T}_\tau)$ 为是可度量化空间. 若 X 有限, 则 X 上的每个度量都诱导 X 上离散拓扑.

Theorem：　Urysohn 可度量化定理.

若 X 满足 T_1, T_4 与 C_2 定理. 则 X 可嵌入希尔伯特空间 E^ω. 从而可度量化.

proof: 设 $\mathscr{B}$ 为一可数基. $\mathscr{B}$ 中2个成员 B 与 B' 若 $\overline{B} \subset B'$ 则称一典型对.

把 $\mathscr{B}$ 中所有典型对（可数）的排列出来. 记作 $\pi_1, \cdots, \pi_n, \cdots$

其中 $\pi_n = (B_n, B_n')$ $\quad \overline{B_n} \subset B_n'$

又 X T_4 则由 Urysohn 引理. 存在连续函数 $f_n: X \to \mathbb{R}$ s.t.

f_n 在 $\overline{B_n}$ 取值为0 $\quad f_n$ 在 $B_n'^{\,c}$ 取值为1

若典型对只有 m 对 则当 $n > m$ 时 $f_n \equiv 0$

令 $f: X \longrightarrow E^\omega \qquad x \longmapsto \left(f_1(x), \frac{1}{2} f_2(x), \cdots \frac{1}{n} f_n(x), \cdots\right)$

（易验 该映射到 E^ω）

单射: $\forall x, y \in X$ $x \neq y$ 又 X 为 T_1 故存在 $B^* \in \mathscr{B}$ s.t. $x \in B^*$, $y \notin B^*$

又 T_4: 存在 $B^\# \in \mathscr{B}$ s.t. $\{x\} \subset B^\# \subset \overline{B^\#} \subset B^*$

故不妨设 $\pi_n = (B^\#, B^*)$ 则 $f_n(x) = 0$ $\quad f_n(y) = 1$ $\quad$ 从而 $f_n(x) \neq f_n(y)$

$\Longrightarrow$ f 单射.

因为 X 与 E^ω 均为 C_1 空间. 故映射连续性可由序列描述.

下证 f 为嵌入: 只需证: $\{x_k\} \in X$ $\quad x_k \to x \Longleftrightarrow f(x_k) \to f(x)$

"$\Longrightarrow$" $\forall \varepsilon > 0$ 取充分大 N s.t. $\quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$

由 $f_1 \sim f_N$ 连续性 可知: $\exists K > 0$ 当 $k > K$ 时 $|f_i(x_k) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}$ $(\forall i)$

故 $d(f(x_k), f(x)) \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2N} \cdot N + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$.

$\Longrightarrow$ $f(x_k) \to f(x)$

"$\Longleftarrow$" 若 $x_k \not\to x$ 说明 $f(x_k) \not\to f(x)$

取 x 的开邻域 $B' \in \mathscr{B}$ 由于 $x_k \not\to x$ 故存在无穷多个 $x_k \notin B'$

$\because X$ T_4 则 取 $B \in \mathscr{B}$ st $\{x\} \subset B \subset \overline{B} \subset B'$ $\qquad \pi_n = (B, B')$

故对无穷多个 k $\quad f_n(x_k) - f_n(x) = 1$ $\quad d(f(x_k), f(x)) \geq \frac{1}{n}$

因而 $f(x_k) \not\to f(x)$.

4.1 连通空间

Definition 4.1.1 连通定义

假设 X 为一拓扑空间.

①: 若 X 中存在 2 个非空不交开集 U, V s.t. $X = U \cup V$ 则称 X 不连通.

称这样的 $\{U, V\}$ 为 X 的一个分离对 或一对分离子集.

②: 若 X 不是不连通 则称 X 是连通的.

Theorem 4.1.1

X 为一拓扑空间. 则下列叙述等价:

① X 连通 ② X 中不存在 2 个非空不交闭集 U, V 使得 $X = U \cup V$

③ X 中不存在一个既开又闭的非空真子集 ④: $f: X \to \{0, 1\}$ 连续映射, f 为常值映射.

Corollary: A 连通 $\Rightarrow$ A^c 连通.

Example 4.1.3

(1): 设 X 为多于 1 点的离散空间, 则 X 不连通

(2): X 平凡拓扑空间, 则 X 连通

Example 4.1.4

直线的下极限拓扑空间 (即 $[a, b)$ $a < b$ 为拓扑基生成的) 为不连通.

(因为 $[a, b)$ 既开又闭).

Definition 4.1.2

设 X 为拓扑空间. $A \subset X$. 若 A 作为子空间, A 连通, 则称 A 为 X 中的一个连通子集.

否则 A 为 X 一不连通子集.

Theorem 4.1.2.

X 为拓扑空间. $A\subset X$. A不连通 $\Longleftrightarrow$ 存在X中开集U,V s.t.

$$A\subset U\cup V \qquad U\cap A\neq\phi \qquad V\cap A\neq\phi$$
$$U\cap V\cap A=\phi$$

proof:

"$\Longrightarrow$" 设A不连通. 则: 存在A中非空不交开集P,Q s.t. $P\cup Q=A$

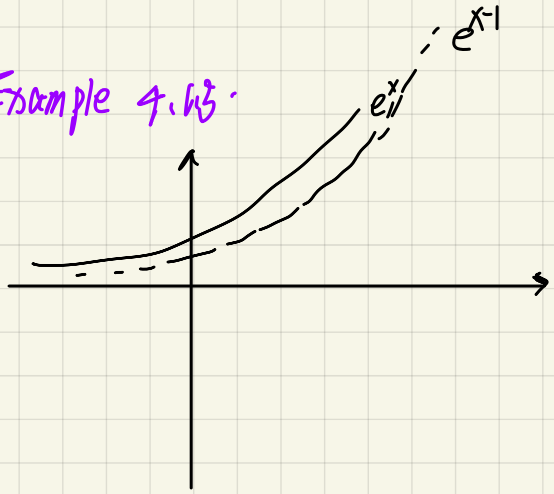
X中开集U,V 且 $U\cap A=P$ $\quad V\cap A=Q$.

则 $A\subset U\cup V \qquad U\cap A=P\neq\phi \qquad V\cap A=Q\neq\phi$

$U\cap V\cap A=P\cap Q=\phi$

"$\Longleftarrow$" 令$P=U\cap A \qquad Q=V\cap A$ $\qquad$ 则P,Q为A的一对分离.

Example 4.1.5.



A为e^x曲线与x轴构成的子空间.

A不连通

$\because$ e^{x-1}两侧构成了包含e^x与x轴的不交开集.

Example 4.1.6.

设A为$\mathbb{R}$上多于一点的子集. 则A是连通子集 $\Longleftrightarrow$ A为一区间.

proof: 设A连通. $\forall a,b\in A$ 说明$[a,b]\subset A$ 若有$c\in(a,b)$ $\quad c\notin A$

则$A=((-\infty,c)\cap A)\cup((c,+\infty)\cap A)$ $\qquad$ 则A不连通 矛盾.

反之, 若A为一区间. 若A不连通 则存在A中非空不交的开(闭)集U,V s.t.

$A=U\cup V$ 取$u\in U$ $\quad v\in V$, 不妨设$u<v$ $\quad$ 则 $[u,v]\subset A$

令 $c=\sup\{x\in[u,v]\mid x\in U\}$

若 $c=v$ 则 在 v 充分近的邻域内有 U 中点 ∵ V 开 $c=v\in V$ 故 v 的一小邻域球已含于 V 得之 $U\cap V\neq\phi$ 矛盾

$\Rightarrow c<v$

若 $c=u$ 同样由 U 开 则 u 一小邻域已含于 U 这与 $c=u$ 为 sup 矛盾

$\Rightarrow c>u$

得 $u<c<v$ 又 $[u,v]\subset A=U\cup V \Rightarrow c\in U\cup V$

若 $c\in U$ 则: $(c,v]\subset V$ 但 V 为闭 故 $c\in V \Rightarrow c\in U\cap V \Rightarrow$ 矛盾.

若 $c\in V$ 则 $c\in U'$ (U 聚点) 但 U 闭 故 $c\in U \Rightarrow c\in U\cap V \Rightarrow$ 矛盾.

Theorem 4.1.3

设 X、Y 为拓扑空间. X 连通; $f: X\to Y$ 连续 则 $f(X)$ 是 Y 的连通子集.

proof: $f: X\to f(X)$ 连续. 若 $f(X)$ 不连通.

则设 $\{P, Q\}$ 分离 $f(X)$ 则 $\{f^{-1}(P), f^{-1}(Q)\}$ 为 X 上两个开集 且 $X=f^{-1}(P)\cup f^{-1}(Q)$.

$f^{-1}(P)\cap f^{-1}(Q)=\phi \Rightarrow X$ 不连通 矛盾

Corollary 4.1.1:

连通性为拓扑性质.

Example 4.1.7.

设 $X=\mathbb{R}$ $Y=S^1$ $f: X\to Y$ $x\mapsto e^{2\pi i x}$ 则 f 连续. $f(X)=Y$.

X 连通, Y 连通. 但 X 与 Y 不同胚. 否则: g 为 $X\to Y$ 同胚 则:

$g|_{X-\{0\}}: X-\{0\}\longrightarrow Y-\{g(0)\}$ 亦为同胚 $X-\{0\}$ 不连通 但 $Y-\{g(0)\}\cong\mathbb{R}$ 还是连通 · 这与已知的连通为一拓扑性质矛盾.

Lemma 4.1.1

设 $C \subseteq D \subseteq X$　C为连通子集，D为不连通子集，则对D的一对分离集$\{U, V\}$，
都有 $C \subseteq U$ 或 $C \subseteq V$

proof: 若 $C\cap U \neq \phi$　$C \cap V \neq \phi$　则 $C\cap U$ 与 $C \cap V$ 为 C的开集。
且 $C = (C\cap U) \cup (C \cap V)$ 且 $(C\cap U) \cap (C\cap V) = \phi$　故 C不连通，矛盾。

Theorem: 4.1.4

C为X的连通子集，且 $C \subseteq A \subseteq cl(C)$　则A也为X连通子集　特别地$cl(C)$也连通

proof: 假设 A不是连通的　设A的一对分离子集为 $\{P, Q\}$　则 X中有一对开集$\{U, V\}$ st.
X中开集$\{P, Q\}$ st.

$A \subset U \cup V$　　$P = U \cap A \neq \phi$　　$Q = V \cap A \neq \phi$　　$U \cap V \cap A = \phi$

由Lemma 4.1.1 知 不妨设　$C \subseteq P$　则　$C \cap Q = \phi$　又 $Q \subseteq A \subseteq cl(C) = C \cup C'$

$\Longrightarrow Q \subseteq C'$

$\forall x \in Q$.　$x \in C'$　故　$V \cap (C - \{x\}) \neq \phi$

$\phi = U \cap V \cap A = (U \cap A) \cap (V \cap A) = P \cap (V \cap A) \supseteq C \cap (V \cap C)$

$= C \cap V \supset V \cap (C - \{x\}) \neq \phi$　　　　矛盾

□.

NOTE: 上述性质表明　连通子集增加一些它自己的聚点，仍是连通子集。

Theorem 4.1.5

设 $\{C_\lambda \mid \lambda \in A\}$ 为X中一族连通子集；且 $\bigcap_{\lambda} C_\lambda \neq \phi$　则 $\bigcup_{\lambda \in A} C_\lambda$ 亦为X连通集。

proof: 记 $A = \bigcup_{\lambda \in A} C_\lambda$　若A非连通　设其一对分离集 $\{P, Q\}$.
则由lemma 知 $C_\lambda \subseteq P$ 或 $C_\lambda \subseteq Q$.

但 $P\cap Q=\phi$ 又 $C_\alpha\neq\phi$ $\Rightarrow$ C_α 都完全落在 P 或 Q 中

设 $C_\alpha\subseteq P\ (\forall\alpha)$ 则 因为:

$A=P\cup Q$ $A\subseteq P$ $\Rightarrow Q=\phi$ 矛盾.

Theorem 4.1.6

X, Y 连通. 则 $X\times Y$ 连通.

proof: 设 $x_0\in X$. $\forall y\in Y$

令 $C_y=(X\times\{y\})\cup(\{x_0\}\times Y)$

则: $X\times\{y\}\cong X$ 连通 $\{x_0\}\times Y\cong Y$ 连通 且 二者交至少含有 $\{x_0\}\{y\}$

则由 Thm 4.1.5 知 C_y 连通 (为 $X\times Y$ 中)

且 $X\times Y=\bigcup\limits_{y\in Y}C_y$ $\bigcap\limits_{y\in Y}C_y=\{x_0\}\times Y\neq\phi$ 故 $X\times Y$ 连通.

Example 4.1.9.

S^2 连通. $\because$ $S^2-N\cong\mathbb{R}^2$ 故 S^2-N 连通 而 N 为 S^2-N 的一聚点, 则 S^2 连通.

Definition: 4.1.3

X 有一 连通子集 C 若 $x,y\in C\Leftrightarrow x\sim y$ 称为等价关系,

每个等价类为 连通分支。

Theorem 4.1.7.

设 X 为一拓扑空间. 则:

① C 为 X 中一连通分支 则 C 连通

②: A 是 X 中一 连通子集 则 A 包含于 X 中某个连通分支

③: C 为一连通分支 则 C 为闭集

proof:

①. C为X中一连通分支 $c\in C$ 则$\forall x\in C$ 则$C\sim x$

故有一连通集C_x s.t. $x\in C_x$ $c\in C_x$ 且 $c\in\bigcap_{x\in C} C_x\neq\emptyset$

易知$C=\bigcup_{x\in C} C_x$ C连通

②: 任取 $x\in A$ 则 C_x为包含x的连通分支. 则$C_x\supseteq A$.

③ $cl(C)$亦连通 且$C\subseteq cl(C)$ ∵C为连通分支 $cl(C)\subseteq C$

$\Rightarrow C$为闭

Theorem 4.1.8

$f: X\to Y$ 同胚 C为X一连通分支. 则$f(C)$也Y的连通分支。

proof:

$f(C)$为Y中一连通子集 令D为包含$f(C)$的连通分支. D也是连通的

$f^{-1}(D)$为包含C的连通子集. $\Rightarrow f^{-1}(D)=C$ $\Rightarrow f(C)=D$ □.

Example 4.1.10:

$(\mathbb{R}, \mathcal{R}_{fc})$ 有限补空间上 闭集为一有限集. 则无任何分离对(从任意两个开相交非空也可看出) 故$(\mathbb{R}, \mathcal{R}_{fc})$连通 只有一个连通分支.

Example 4.1.11:

设A为下极限拓扑空间$(\mathbb{R}, \mathcal{R}_l)$中多于1点的子集. 设$a,b\in A$ $a<b$

取$c\in(a,b)$ 则$A=\big((-\infty,c)\cap A\big)\cup\big([c,+\infty)\cap A\big)$ 为A的一分离对

$\Rightarrow A$不连通.

$\Rightarrow \mathcal{R}_l$中每个连通分支仅是单点集.

Definition: X 拓扑空间中，连通分支都是单点集 则 称为完全不连通空间.

Example:

多于1点的离散空间 也是完全不连通.

Definition 4.1.4

X 为连通空间. $S \subset X$. 若 $X-S$ 不连通. 则称 S 为 X 一个分割子集.

Theorem 4.1.9.

设 $f: X \to Y$ 同胚 若 C 为 X 一分割子集 则: $f(C)$ 也是 Y 的一分割子集.

proof: 设 $P \cup Q = X-C$ 则 $f(P)$ 与 $f(Q)$ 为 $Y-f(C)$ 的 2 开集

$\hookrightarrow$ $f(P) \cup f(Q) = Y - f(C)$

Example: 4.1.14

$\mathbb{R}$ 上每一点均为分割点, $\mathbb{R}^2$ 上挖去一点 同胚于 $S^1 \times \mathbb{R}$ 从而连通

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚

Example 4.1.15

设 g 为 S^1 上一点。 $S^1 - \{g\} \cong \mathbb{R}$ 连通 故 g 非分割点

但 $\mathbb{R}$ 上每一点 均分割点 $\Rightarrow S^1 \ncong \mathbb{R}$ 类似地 $S^2 \ncong \mathbb{R}$

Example 4.1.16

对 S^1 上 2点集 $A = \{p, p'\}$ $S^1 - A \cong \mathbb{R} - \{g\}$ 不连通

S^2 上 挖去一个双点集 $S^2 - A \cong \mathbb{R}^2 - \{g\}$ 连通

从而 $S^1 \ncong S^2$

Theorem 4.6.10

X 连通. $f: X \to \mathbb{R}$ 连续. 则 $\forall p, q \in f(X)$ 设 s 为介于 p, q 之间值 $\Longrightarrow$ 存在 $c \in X$ s.t. $f(c) = s$

Proof:

$f(X)$ 为 $\mathbb{R}$ 中连通集 从而为区间 ...

Theorem: The product of the connected spaces

Assume $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ is a collection of nonempty topological spaces.

X is their product space. $\Longrightarrow$ X is connected $\Longleftrightarrow$ every X_λ is connected.

Proof: "$\Longrightarrow$": $\pi_\lambda: X \to X_\lambda$ is continuous and surjective.

So X_λ is connected.

"$\Longleftarrow$": Actually through the induction we can get the conclusion is proper for finite spaces.

Then $X = \prod_\lambda X_\lambda$ and fix a point $\{a_\lambda\}$ in X.

For any finite subset of Λ which is denoted by $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

We define subspaces:

$$X(\lambda_1 \cdots \lambda_n) \triangleq \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \qquad A_\lambda = \begin{cases} \{a_\lambda\} & \lambda \neq \lambda_1 \cdots \lambda_n \\ X_\lambda & \lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_n \end{cases}$$

So $X(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ is homeomorphic to $X_{\lambda_1} \times X_{\lambda_2} \times \cdots \times X_{\lambda_n}$

therefore. $X(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ is connected, and all subspaces include the same point $\{a_\lambda\}$.

So $A = \bigcup X(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ is connected.

Finally, we show that A is dense in X. So the X is connected

So $\forall \{x_\lambda\}\in X$. we need to show $\forall \mathcal{U}$ is $\{x_\lambda\}$ neighborhood. it should be that $\mathcal{U}\cap A\neq\phi$.

and it is enough to show that $\forall \mathcal{U}$ is a topological base that includes $\{x_\lambda\}$. $\mathcal{U}\cap A\neq\phi$.

now. $\mathcal{U}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{U}_\lambda$ and only finite indexs $\{\lambda_1 - \lambda_n\}$ such that $\mathcal{U}_\lambda\neq X_\lambda$.

Construct the point $\{y_\lambda\}$ in X :
$$y_\lambda :\triangleq \begin{cases} x_\lambda & \lambda=\lambda_1\cdots\lambda_n \\ a_\lambda & \lambda\neq\lambda_1\cdots\lambda_n \end{cases}$$

So $\{y_\lambda\}\in X(\lambda_1 - \lambda_n)\subseteq A$. and $\{y_\lambda\}\in\mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathcal{U}\cap A\neq\phi$. $\square$

Proposition:

$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中一列连通子集，且 $C_j\cap C_{j+1}\neq\phi$ 则 $\bigcup_n C_n$ 为 X 连通集.

Proof:

设 $\bigcup_n C_n$ 不连通 P, Q 为非空开集的分离对. $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = P\cup Q$.

则由 Lemma 4.1.1 $C_1\subseteq P$ (不妨) 但 $\because C_1\cap C_2\neq\phi \Longrightarrow \forall n\ C_n\subseteq P$.

$\Longrightarrow \bigcup_n C_n = P \Rightarrow Q=\phi$ 矛盾

proposition

设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中一可数集. $\mathbb{R}^n - A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中路径连通集. $(n\geq 2)$.

Proof: $\forall p, q\in(\mathbb{R}^n - A)$

定义 $L_p = \{p$ 出发 过 A 中某点 射线$\}$

$L_q = \{$从 q 出发 过 A 中某点 射线$\}$

则 $L = L_p\cup L_q\cup A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中零测集.

取 $r\in\mathbb{R}^2\setminus L$ 则 $p\to r\to q$ 就避开了 C.

Proposition:

X连通 $\Longleftrightarrow$ X的每个非空真子集有非空边界.

Proof: "$\Longrightarrow$" 若A真子集非空 该边界为空.

$$X = Int(A) \cup \partial A \cup Int(A^c) = Int A \cup Int(A^c)$$ 与X连通矛盾.

"$\Longleftarrow$" 反证: 若X不连通 $X = P \cup Q$ P既开又闭

$\partial P = cl(A) - int(A) = A - A = \phi$ 矛盾

Proposition:

① X拓扑空间. A为X连通子集, B既开又闭. 若$A \cap B \neq \phi$ 则 $A \subset B$

② $M \subset X$ M连通. $A \subset X$ A既开又闭 证: $M \subset A$ 或 $M \subset X - A$

Proof: ①: 若X连通 $\begin{cases} B = \phi \\ B = X \end{cases}$ easy

若X不连通 $X = B \cup C$ 分离集. 则 Lemma 4.1.1

$A \subseteq B$ 或 $A \subseteq C$ □

② 同上.

Proposition:

A, B 2个连通子集. $A \cap cl(B) \neq \phi$ 证: $A \cup B$也连通.

Proof: 反证: 若$A \cup B$不连通

$A \cup B = P \cup Q$. $P = U \cap (A \cup B)$ $Q = V \cap (A \cup B)$ 且U, V为X中开

不妨设 $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ $\Rightarrow A \cap B = \phi$

取$x \in A \cap cl(B)$ $\Rightarrow x \in A$ $x \in B'$ $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow x \in U$.

又$B \subseteq V \Longrightarrow \bar{B} \subseteq \bar{V} = V \Rightarrow x \in V$

$\Longrightarrow U \cap V \neq \phi$ 矛盾.

Proposition:

设A.B均开(或闭)，$A\cup B$与$A\cap B$均连通，则A与B均连通

proof: 不妨设A.B均开，

若A不连通 $A=P\cup Q$ (P.Q为A上的开集)

不妨设 $A\cap B \subseteq P \Rightarrow B\cap Q=\varnothing$ 则$A\cup B$有分割$\{B\cup P, Q\}$.

Proposition:

① T_1空间多于一点的连通子集必为无限集.

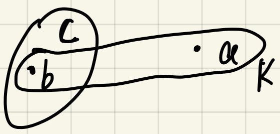
②: $f: \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}$ 连续. 则 f单调$\Longleftrightarrow$ $\forall y\in f(\mathbb{R})$ $\{f^{-1}(y)\}$是$\mathbb{R}$的连通集.

Proposition:

① X中既开又闭的连通子集都是X的连通分支.

②: 若X只有有限个连通分支. 则X每个连通分支都是既开又闭的；但若X有无限个连通分支则不成立.

Proof: ① 设C为X中既开又闭的连通子集，若C不是一个X中的连通分支. 则在C之外仍有一点a 与C中某一点b 处于某个连通分支中(K)



则 $K=(K\cap C)\cup(K-C)=\underbrace{(K\cap C)}_{\text{为K上开}}\cup\underbrace{(K\cap(X-C))}_{\text{为K上开}}$

与K连通性矛盾.

②: 因每个连通分支均闭 与 $X=C_1\cup C_2\cdots\cup C_m$.

Proposition: 连通的度量空间(X,d)有无限个点. 固定$x.y\in X$

则存在连续函数 $f: z\longmapsto \dfrac{d(x,z)}{d(x,z)+d(y,z)}$ 则f值域为$[0,1]$.

连通集连续映像仍为连通集.

4.2 道路连通

Definition:

X上的一个从单位区间到X的连续映射称为X上的一条道路. $\alpha: [0,1] \longrightarrow X$

记 $x_0 = \alpha(0)$ $x_1 = \alpha(1)$ 称 x_0, x_1 为 α 的起、终点, 也记做: $\alpha: (I, 0, 1) \longrightarrow (X, x_0, x_1)$

定 $\alpha^{-1}: I \longrightarrow X$ $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ 则 α^{-1} 为 α_1 到 α_0 道路. 称为 α 逆道路.

当 $x_0 = x_1$ 时. 则称 α 为X上从 x_0 为基点的闭路.

Definition 4.2.1

(1) 若X为拓扑空间. 若对 $\forall x_0, x_1 \in X$, 都存在 x_0 到 x_1 的道路 则称X为一道路连通.

(2) $A \subseteq X$ 且A作为子空间是道路连通 则称A为X的一道路连通子集.

Example 4.2.1

R^n 是道路连通的. 因 $\forall x_0, x_1 \in R^n$. 做 $\alpha: [0,1] \longrightarrow R^n$

$\alpha(t) = (1-t)x_0 + t x_1$

Thm 4.2-1:

道路连通空间是连通空间.

proof: 取定 $x_0 \in X$ $\forall x \in X$ 则有道路 $\alpha_x: (I, 0, 1) \longrightarrow (X, x_0, x)$

$\because I = [0,1]$ 连通 则 $\alpha_x(I)$ 为 X中包含 x_0 与 x 的连通子集

且 $X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x(I)$ 且 $\bigcap_{x \in X} \alpha_x(I) \supseteq \{x_0\} \neq \phi$ $\rightarrow$ X 连通空间.

Theorem 4.2.2. 道路连通拓扑性质.

设 X 为道路连通空间. $f: X \to Y$ 连续 则 $f(X)$ 是 Y 的道路连通子集.

Proof:

$\forall y_0 = f(x_0)$ $y_1 = f(x_1) \in f(X)$ 则: $\alpha: (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$.

$f \circ \alpha: I \to Y$ 是 Y 中从 y_0 到 y_1 一条道路.

Definition 4.2.2.

设 X 为拓扑空间. $x, y, z \in X$. $\alpha: (I, 0, 1) \to (X, x, y)$ $\beta: (I, 0, 1) \to (X, y, z)$

定 $\alpha\beta(t)$: $\begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

由粘接引理知 $\alpha\beta(t)$ 连续. 为 $x \to z$ 道路 称为 α 与 β 乘积.

Example 4.2.3 S^2 是道路连通的.

$\forall x, y \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ 若 x, y 不为对径点, $(x \ne -y)$ 则

$\alpha: (I, 0, 1) \to (S^2, x, y)$ $\alpha(t) = \dfrac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}$

若 $x = -y$ 为对径点, 取 $z \in S^2$ $z \ne x$ $z \ne -x$ 如上有 α: 从 x 到 z 的道路.

β: 从 y 到 z 的弧道路.

Example ~~4.2.4~~ 4.2.5 离散, 平凡拓扑空间连通.

① X 平凡拓扑 则 任意 $\alpha: (I, 0, 1) \to (X, x, y)$ 连续 故 X 是道路连通的

②: X 为多于一点离散拓扑: 则因 X 非连通 故其不是道路连通.

Example 4.2.6 拓扑学家正弦曲线

$X=\{(x,\sin\frac{1}{x})\in\mathbb{R}^2 \mid x\in(0,1]\}$　　$Y=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[-1,1]\}$.

$Z=X\cup Y$

① 显然 X 为道路连通 $\Rightarrow X$ 连通，　且 $Y\subseteq X'$

② $X\subseteq Z=X\cup Y\subseteq X\cup X'=cl(X)$　　则 Z 连通

③ Z 非道路连通. 只需证明：Y 上的点到 X 上点，无道路

假设有原点 $\in(Y)$ 到 X 上一点 p 有道路 $\alpha:(I,\tau)\to(Z,\tau)$

记 $S=\alpha^{-1}(Y)=\{t\in I \mid \alpha(t)\in Y\}$　　令 $\sup S=s$　　$0\le s<1$

$\because Y$ 闭 $\Rightarrow S$ 也闭 $\Longrightarrow s\in S$

设 $\alpha(s)=(u(s),v(s))$　　$u(s)=0$

不妨设 $v(s)\le 0$　任取 $0<\delta\le 1-\delta$ 则有 $s<\delta+s\in I$　则 $u(s+\delta)>0$

则可取 $n\in\mathbb{N}_+$ s.t.　$u(s)=0<\frac{2}{(4n+1)\pi}<u(s+\delta)$.

由介值定理 存在 $t\in(s,s+\delta)$，使得 $u(t)=\frac{2}{(4n+1)\pi}\Longrightarrow v(t)=1$

$\underline{v(t)-v(s)\ge 1.}$

则：$|t-s|<\delta$ 由 δ 任取的　则 v 在 s 处不连续. 矛盾

Definition 4.2.7

拓扑空间 X 在等价关系 $\sim_p$，(存在道路). 则每一等价类为道路连通分支.

Proposition:

我们知道连通分支是闭集. 但道路连通分支不一定是闭集. 例如：拓扑正弦曲线中

$Z=X\cup Y$　　X 与 Y 均为道路连通分支. Y 是闭. 但 X 不是闭.

Definition 4.2.4.

X为拓扑空间.

①若X中任一点x，其所有连通邻域构成了x的邻域基，则称X是局部连通的.

②：若X中任一点x，其所有道路连通邻域构成了x的邻域基，则称X是局部道路连通.

Proposition:

X是局部连通的(局部道路连通的) $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in X$ 与 x 任一邻域 U，存在 x的一个连通的(道路连通的)邻域 V s.t. $V\subseteq U$.

Note: 一般而言 连通性与局部连通性并无什么必要关联.

设 $X=(0,1)\cup(2,3)$，是局部(道路)连通的，但非(道路)连通的。

Theorem 4.2.5.

设X为拓扑空间. 则:

①：局部连通空间中的连通分支是开集.

②：局部道路连通空间中的道路连通分支是开集。

proof: 只证① 其余类似.

设X为局部连通空间. C为X中的一个连通分支. $\forall x\in C$.

则存在 U_x 为x的连通邻域 则 $U_x\subseteq C$. 从而C为开集.

Theorem 4.2.4

设X为局部道路连通空间，且为连通空间 $\longrightarrow$ 则X为道路连通的.

proof: 若X非道路连通，则X道路连通分支多于1个
令C为X中一个道路连通分支，D为其余道路连通分支之并
则C, D构成X一对分离集. 矛盾.

Corollary: 4.2.2/4.2.3

① 设U为$\mathbb{R}^n$中一开集，则U连通 $\Longleftrightarrow$ U为道路连通.

②: X为$\mathbb{R}^n$中一真闭子空间. $Y=\mathbb{R}^n-X$为连通 $\Longrightarrow$ Y为道路连通

Proof: ① $\Longleftarrow$ it is clear.

$\Longrightarrow$ 显然U为局部连通的。则由Thm 4.2.4知. 其是道路连通的.

Theorem: The product space of path-connected spaces.

Assume $\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ is a collection of nonempty topological spaces. X is their product space. $\longrightarrow$ X is path-connected space $\Leftrightarrow$ $\forall\lambda\in\Lambda$, X_λ is path-connected space.

proof: "$\Longrightarrow$" it is enough to notice that $\pi_\lambda: X\to X_\lambda$ is continuous and surjective.

"$\Longleftarrow$" suppose $\{a_\lambda\}$ and $\{b_\lambda\}\in X$.

and there exists path $\alpha_\lambda:(I,0,1)\longrightarrow(X_\lambda, a_\lambda, b_\lambda)$.

$\alpha=(\alpha_\lambda):[0,1]\to X$ $\quad \alpha(t)=(\alpha_\lambda(t))$ and $\pi_\lambda\circ\alpha=\alpha_\lambda$. $\Rightarrow \alpha$ is continuous

Theorem:

Suppose X is locally connected. $\iff$ $\forall \mathcal{U} \subseteq X$, $\mathcal{U}$ is open, we have every connected component of $\mathcal{U}$ is open in X.

Proof: "$\Longrightarrow$" $\mathcal{U} \subseteq X$ $\mathcal{U}$ is open. and assume C is a connected component of $\mathcal{U}$.

Let $x \in C$. $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ is a open neighborhood of x

then there exists a connected neighborhood V of x. then $V \subseteq C$

$\Longrightarrow$ C is open.

"$\Longleftarrow$"

$\forall x \in X$ and the open neighborhood $\mathcal{U}$ of x. and denote the C is a connected component of $\mathcal{U}$ that includes x. And C is open, so C is required.

Theorem

拓扑空间X是局部连通的 $\iff$ $\forall X$的一开集$\mathcal{U}$，$\mathcal{U}$的每一路径连通分支是开的

Theorem:

X is locally path-connected space. Then the connected components and path-connected components in X are same.

proof: Suppose C is a connected component, $x \in C$

P is a path-connected component includes x.

we already have $P \subseteq C$. if $P \neq C$

Construct $Q = \bigcup \{ P_i \mid P_i$ 是 X 的 path-connected component, $P_i \neq P$, $P_i \cap C \neq \phi \}$.

$\Rightarrow Q \neq \phi$ and we know $Q \subseteq C$ $\Longrightarrow$ $C = P \cup Q$.

and $P \cap Q = \phi$. and we know P, Q are open (from Thm 4.2.3) So they are a paration of C so C is not connected! Contradiction!

Corollary:

If X is locally path-connected. X is connected $\Longleftrightarrow$ X is path-connected.

Theorem: (局部)连通，(局部)道路连通都不具有继承性.

①: $\mathbb{R}$,标准拓扑下子空间 $A=[0,1]\cup[2,3]$

② $\mathbb{R}^2$ 下的 子空间 拓扑正弦曲线 (非道路连通)

③ $\mathbb{R}$下的$\mathbb{Q}$. 非局部(道路)连通

Proposition:

$\mathbb{R}^n$ 的连通子集A的每个邻域$\mathcal{U}$包含A的一个连通邻域(甚至是道路连通邻域).

proof: 设A为$\mathbb{R}^n$中一连通子集. $\mathcal{U}$为A的任一邻域. 存在开集G s.t. $A\subseteq G\subseteq \mathcal{U}$

$\because \mathbb{R}^n$ 局部道路连通 则: G的连通分支是开的 且亦是道路连通的.

$\because A$连通 故其必包含于G的某一连通分支中. □.

Theorem: $X_1 \sim X_m$ are finite locally (path) connected spaces.

Then $X=\prod_{i=1}^{m} X_i$ is also locally (path) connected space.

Theorem: $X \xrightarrow{f} Y$ f is continuous. 则 若X为局部(道路)连通. $f(X)$亦为局部(道路)连通.

Proposition:

设X为拓扑空间. A与B均为X的开(闭)集. 且$A\cup B$与$A\cap B$均道路连通.

① $\forall a\in A$ $\forall b\in B$ 则在$A\cup B$任一道路α连接a与b 证明α必经过$A\cap B$中的点,

② A. B均道路连通.

Proof: 不妨设 A, B 均开.

$\alpha: [0,1] \longrightarrow A \cup B \quad \alpha(0)=a \quad \alpha(1)=b.$

$U = \alpha^{-1}(A) \quad V = \alpha^{-1}(B)$ 均 $[0,1]$ 中开.

$U \cup V = [0,1]$ $\quad \because [0,1]$ 连通 $\Longrightarrow U \cap V \neq \phi$ (不然, 不连通)

$\longrightarrow$ α 必经过 $A \cap B$ 中点.

Proposition:

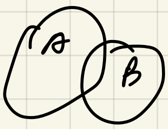
Suppose X is a topological space that has finite connected components. Then prove that $A \subset X$ is a connected component $\Longleftrightarrow$ A is open and closed. and A is connected.

Proof: $\Longrightarrow$ it has been proved.

$\Longleftarrow$ 反证法, 若 A 不是连通分支 即: 存在 $A \subsetneq B$, $A \neq B$. B 亦连通.

此时 $B \cap A$ 为 B 中开亦闭

$$B = (B \cap A) \cup (B - A) = \underbrace{(B \cap A)}_{开} \cup \underbrace{(B \cap A^c)}_{开}$$ 矛盾与 B 连通.



Proposition:

$\mathbb{R}^n$ 中, A 为一非空真子集, $x \in A$, $y \in A^c$ $\quad L: \{x + t(y-x) \mid t \in [0,1]\}$ 则 $L \cap \partial A \neq \phi$

Proof: 若 $L \cap \partial A = \phi$ $\quad X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(A^c)$

又 $x \in A \Rightarrow x \in \mathrm{int} A$ 同理 $y \in \mathrm{int} A^c$

因 $t \in [0,1]$ 连通 则 L 亦连通 但 $(L \cap \mathrm{int}(A)) \cup (L \cap \mathrm{int}(A^c)) = L$ 为分离子集

4.3 Compact space.

Definition 4.3.1:

设 X 为一拓扑空间. $A\subset X$. $\mathcal{C}$ 是由 X 的若干子集构成的 X 子集族

① 若 $A\subset\bigcup_{C\in\mathcal{C}}C$ 则称 $\mathcal{C}$ 为 A 的一族覆盖

②: 若 $\mathcal{C}$ 子集族都是开集，则称为一族开覆盖.

Definition. 4.3.2

① 若 X 是拓扑空间. 若 X 的每个开覆盖都有有限子覆盖 则称 X 是紧致空间.

②: $A\subset X$，若 A 作为 X 子空间紧致 则称 A 为紧子集.

Theorem:

设 X 为拓扑空间，$A\subset X$. 则 A 是紧致子集 $\Longleftrightarrow$ A 的每个由 X 的开集构成开覆盖有有限子覆盖.

Proof: 设 A 为紧致子集. ，A 有一族 X 中开集构成的开覆盖. $\mathcal{C}$.

$C_A=\{C\cap A\mid C\in\mathcal{C}\}$ 为 A 的一个由 A 中开集构成的开覆盖.

$\Longrightarrow$ 有有限个 $C_1\cap A$ ---- $C_m\cap A$ 覆盖 A

则 C_1 ---- C_m 覆盖 A

设 $\mathcal{C}$ 为 A 的一个由 A 中开集构成的开覆盖 则 $\forall C\in\mathcal{C}$ $\exists$ X 中开 U_C s.t.

$C=U_C\cap A$. 则 $\mathcal{C}'=\{U_C\mid C\in\mathcal{C}\}$ 为 A 的一个由 X 中开集构成的开覆盖.

由假设，$\mathcal{C}'$ 有有限子覆盖. $\{U_{C_1}\ ---\ U_{C_m}\}$ 从而 $\underbrace{\{C_1 - C_m\}}_{\subset\mathcal{C}}$ 构成 A 的覆盖

A 为紧致子集。

Theorem: 4.3.2 (4.3.3/4.3.4/4.3.5):

① 设 X 为紧空间; $f: X \longrightarrow Y$ 连续 则 $f(X)$ 是 Y 的紧子集.

② X 中若干个紧子集并仍然紧子集.

③: X 为拓扑空间. K 是 X 紧子集. $F \subset K$ 且 F 是 X 上的闭集 ,则 F 是 X 上的紧集.

④: X 为拓扑空间. K 是 X 上紧子集 而 $K \subset A$ 则 K 是 (A, τ_A) 上的紧子集.
进一步 紧性也不随空间的扩大而改变 即 K 为 A 上紧子集 则亦为 X 上紧集.

⑤: X 是 T_2 空间, K 是紧子集, $p \in K^c$. then 存在 开集 U and W st. $p \in U$, $K \subset W$
且 $U \cap W = \phi$.

⑥: X 是 T_2 空间, K 是 紧子集, 则 K 为 闭集.

⑦: X 是 T_2 空间, K 紧, F 闭 则 $K \cap F$ 为 X 上紧集.

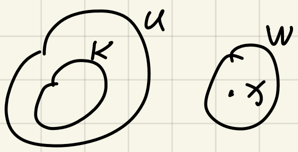
Proof: ①: 易证 ②: 易证

③: 设 $\{V_\alpha\}$ is a open cover of F.
then $F^c \cup V_\alpha$ is a open cover of X also of K.
then $K \subseteq F^c \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n$. $\because F \subseteq K$
$\Longrightarrow F \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n$. □

④ 易证

⑤: $\forall x \in K$ 则 $x \neq p$ 则 存在 对应的 不相交开集 B_x 与 U_x 分别 包含 分离 x. p
$\{B_x\}$ 为 K 上一族开覆盖. 则 取出有限个 $B_1 \sim B_m$
令 开集 $W = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ 覆盖 K
开集 $U = U_1 \cap \cdots \cap U_2$ 覆盖 $\{p\}$
且 $W \cap U = \phi$ □

⑥: 若 K 紧集. 则 $\forall x \in K^c$ 则



$\exists W \ni x$, $U \supseteq K$ $W \cap U = \phi$ $W \subseteq K^c$ 故. K^c 开 $\Rightarrow K$ 闭

⑦: 易证.

Corollary.

① X is a compact and Hausdorff space. and $\{C_\lambda\}$ 为一族紧子集 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ 也是 X 紧子集.

②: X is a compact and Hausdorff space. So A is compact iff A is closed.

③: $f: X \longrightarrow Y$ X is compact. , Y is T_2 and f is bijective and continuous. Then f is a homeomorphic morphism.

proof: 证 $g^{-1}: Y \longrightarrow X$ 连续即可 任取 X 的闭集 F 故 F 为 X 紧集

$g^{-1}(F) = f(F)$ 为 Y 中紧集 $f(F)$ 为 Y 中闭集 □.

Corollary:

从紧空间 $X \longrightarrow Y\ (T_2)$ 空间的 连续单射为 嵌入映射

Lemma: 4.3.1 Tube lemma.

X, Y 拓扑空间. X 紧致, 取 $x\in X$. 设 $\mathcal{U}$ 是 $X\times Y$ 是包含 $\{x\}\times Y$ 开集. 则在 x 于 X 中存在开邻域 W st. $W\times Y \subset \mathcal{U}$.

proof: $\forall y \in Y$ $(x,y) \in \{x\}\times Y \subseteq \mathcal{U}$ (开)

故可取 x 的开邻域 W_x, y 在 Y 中一个开邻域 V_y. St. $W_x \times V_y \subseteq \mathcal{U}$

$\because Y$ 紧致 则 $\{V_y\}_{y\in Y}$ 为 Y 一开覆盖 故 其有限子覆盖 $V_{y_1} \cdots V_{y_m}$

令 $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_{y_i}$ W 为 x 在 X 中一开邻域

且 $\{x\}\times Y \subset W \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{m}(W_{y_i} \times V_{y_i}) \subset \mathcal{U}$

Theorem 4.2.6

设 X, Y 紧致 则 $X\times Y$ 亦为紧空间.

Prf: 设 $\mathcal{C}$ 为 $X\times Y$ 的开覆盖. $\forall x\in X$, $\mathcal{C}$ 为紧致子集 纤$\{x\}\times Y$ 的一个开覆盖.

有有限子覆盖 $\mathcal{C}_x$. 令 U_x 为 $\mathcal{C}_x$ 的成员之并

U_x 为 $X\times Y$ 中开 且包含 纤$\{x\}\times Y$.

由 Tube Lemma. $\exists$ x 于 X 中开邻域 W_x st. $W_x\times Y\subset U_x$.

注意: $\mathcal{C}_x$ 也是 $W_x\times Y$ 覆盖.

令 $W=\{W_x \mid x\in X\}$ 为 X 一覆盖 有有限子覆盖 $W_{x_1}\cdots W_{x_m}$

从而 $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}_{x_1}\cup\cdots\cup\mathcal{C}_{x_m}$ 覆盖 $X\times Y$ $\mathcal{C}^*$ 有限. 故 $X\times Y$ 紧致.

Corollary:

①: $A\subset B$ 且 B 紧 则 $\bar{A}$ 紧

②: X 为 T_2 与紧空间 则 X 为 T_3 空间

③: X 为 T_2 与紧空间, 则 X 为 T_4 空间

④: X 为 T_2 空间. $\{K_\alpha\}$ 为一族紧集. 且 $\bigcap_\alpha K_\alpha=\phi$ 则 存在有限个 $\alpha_1\sim\alpha_n$

st. $\bigcap_{k=1}^{n} K_{\alpha_k}=\phi$

Proof:

① $\bar{A}\subset\bar{B}$ $\bar{A}$ 闭, $\bar{B}$ 紧 则 $\bar{A}$ 紧

②: 任取 $x\in X$ 与闭集 F $x\notin F$ $\because X$ T_2 且紧 则 F 为紧集.

则 由 Thm 知 $\exists$ 互不相交开集 U, V st. $x\in U$ $F\subseteq V$. $U\cap V=\phi$ □.

③: 任意 2 个不相交闭集 F_1, F_2 . $\because X$ T_2 且紧 则 F_1, F_2 均紧.

此时: 考察 $\forall x\in F_1$ x 与 F_2 利用 T_3 可知 存在 U_x, V_x 为 X 上开

St. $x\in U_x$ $F_2\subset V_x$ $U_x\cap V_x=\phi$

则 这样的 $\{U_x\}$ 构成 F_1 覆盖 选取 有限个 $U_{x_1} \cdots U_{x_m}$ 与 $V_{x_1} \cdots V_{x_m}$

作: $U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cdots \cup U_{x_m}$ $V = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cdots \cap V_{x_m}$.

则 $F_1 \subset U$ $F_2 \subset V$. 且 $U \cap V = \varphi$. □

④: 令 $V_\alpha = K_\alpha^c$ 则 V_α 均开 $\bigcup_\alpha V_\alpha = X$.

$\longrightarrow K_1 \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$ 又 K_1 紧

则 $\exists V_{\alpha_1} \cdots V_{\alpha_m}$ s.t. $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^m V_{\alpha_i}$

$K_1 \cap \left(\bigcup_{i=1}^m V_{\alpha_i}\right)^c = K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \cdots \cap K_{\alpha_m} = \varphi$.

Definition:

$(X, \mathcal{T})$ is locally compact $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$ 存在 x 的开邻域 U, $\overline{U}$ 是紧的

$(X, \mathcal{T})$ is σ-compact $\Longleftrightarrow$ $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ A_n is compact.

Lemma: X 为 T_2 空间. 若 K, L 为 X 中互不相交紧集. 则存在不相交开集 U, V s.t. $K \subseteq U$, $L \subseteq V$

proof: 不妨设 二者均非空.

给定一 $x \in K$ 则 $\forall y \in L$. $\because T_2$ 则 $\exists U_y$ 与 V_y s.t. $x \in U_y$. $V_y \ni y$.

$\{V_y \mid y \in L\}$ is a open cover of L, we can choose finite $V_{y_1} \cdots V_{y_m}$.

令. $V_y' = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$ $U_x' = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m}$

故事实上 U_x' 与 V_y' 均开 均互不相交. $L \subseteq V_y'$

再对 $\{U_x' \mid x \in K\}$ 利用紧性. 即可 类似证.

Lemma:

X 是Ｔ₂且局部紧空间. U开集, $\forall x\in U$ 都有在 x开邻域 V

s.t. $\overline{V}$ 紧且 $\overline{V}\subset U$

proof: $\because X$ is locally compact 固定 $x\in U$

then W is a open neighborhood of x and $\overline{W}$ is compact.

令 $G=U\cap W$ G开集

$\Longrightarrow$ $\overline{G}\subset\overline{W}$ 故$\overline{G}$紧

$\Longrightarrow$ $\partial G\subset\overline{G}$ 且 ∂G闭 $\longrightarrow$ ∂G紧

则 $x\notin\partial G\Longleftrightarrow x\in G^{\circ}$

($\because x\in U$ 则$x\in G$ 而 $G=G^{\circ}\cup\partial G$ 且$G^{\circ}\cap\partial G=\phi$).

则 $x\notin\partial G$ 则存互不~~相交开集~~ $\tilde{V}$, H s.t. $x\in\tilde{V}$ 且 $\partial G\subset H$ 且 $\tilde{V}\cap H=\phi$

令 $V=G\cap\tilde{V}$

则 $x\in V$ 且 $\overline{V}\subset\overline{G}$ 且 $V\cap H=\phi$

故 $V\subset H^{c}$ 且 $\overline{V}\subset\overline{H^{c}}=H^{c}\subset(\partial G)^{c}$

则: $\overline{V}\subset\overline{G}\cap(\partial G)^{c}=(G^{\circ}\cup\partial G)\cap(\partial G)^{c}$

$=G^{\circ}\cap(\partial G)^{c}$

$=G^{\circ}\cap\left(G^{\circ}\cup\mathrm{Int}(G^{c})\right)$

$=G^{\circ}\subset G\subset U$ □.

又 $\overline{V}\subset\overline{G}$ $\overline{G}$紧 $\overline{V}$闭 故$\overline{V}$紧.

Proof2: $\forall x\in U$ 则 存在x开邻域 W $\overline{W}$ 紧 且$W\subseteq U$ (不然 利用$W\cap U$代替)

利用 V_1, 与V_2 分离 紧集 $\{x\}$, 与 $\overline{W}-W$

则 $V_1\cap W$ 为x开邻域 且 $V_1\cap W\subseteq U$ 且 $\underbrace{\overline{V_1\cap W}}_{紧}\subseteq\overline{W}$ (紧) □.

Theorem:
X 为 T_2 空间 且局部紧，U 为一开集. $K\subset U$ K为紧
则 存在开集 V 且 $\bar V$ 紧 s.t. $K\subset V\subset \bar V\subset U$

proof: $\forall x\in K$ 则 存在 V_x 开邻域 $\bar V_x$ 紧 且 $\bar V_x \subset U$.

则 $\{V_x\}$ 为 K的一族覆盖 $\Longrightarrow$ 取出 有限个 $V_{x_1} \cdots V_{x_m}$.

则 $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i} \triangleq V$

令 $V=\bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$ V开 且 因有限个紧集之并 仍紧.

$\bar V = \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}\right)} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar V_{x_i}$

故 $K\subset V\subset \bar V\subset U$

proposition:
X 为一局部紧的T_2 空间 且 X 为 C_2空间 有可数拓扑基. 则 此时 一开集U
为一 F_σ 集. 且为一系列 紧集之并, 类似地 每一闭集为 G_δ 集.

proof: 令 $\mathcal{B}$ 为 可数拓扑基族. 令 U 为 X上一开集, 为可数拓扑基的并.

令 $\mathcal{B}_U \triangleq \{B\in\mathcal{B} \mid \bar B \text{ 紧. 且 } B\subseteq U\}$

此时: $U=\bigcup_{x\in U}\{x\} \subseteq \bigcup_{x\in U} \bar V_x \subseteq U$ (由Lemma)

$\Longrightarrow U=\bigcup_{x\in U} \bar V_x$ $V_x\subseteq U$ $\bar V_x$ 紧 (闭) ($\because T_2$) (由 U可写为 可数个拓扑基并)

$\Longrightarrow U=\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar V_x$ $\bar V_x$ 紧(闭) $V_x\subseteq U$. □

Proposition: 每一局部紧且 T_2 空间且为 C_2，则为 σ-compact.

Theorem: $A\subset X$，$B\subset Y$ 紧致。W 是 $X\times Y$ 开集。$A\times B\subset W$

则存在 X 中开 U，Y 中开 V s.t. $A\times B\subset U\times V\subset W$

暂把 $b\in B$ 固定　考察 $A\times\{b\}\subseteq W$　$\forall a\in A$

则 $\exists U_a$ 与 V_a s.t. $(a,b)\in U_a\times V_a\subseteq W$

$\underbrace{\{U_a\}}$ 为 A 开覆盖　选出 $a_1\sim a_n$ 有限个　$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}$

定义 $U_b=\bigcup_{i=1}^{n}U_{a_i}$　$V_b=\bigcap_{i=1}^{n}V_{a_i}$　$A\subseteq U_b$ 开　V_b 开 且包含 b

则 $\forall(s,t)\in U_b\times V_b$　则不妨设 $s\in U_{a_2}$ 且 $t\in V_{a_2}$　$(s,t)\in U_{a_2}\times V_{a_2}\subseteq W$

$\Rightarrow U_b\times V_b\subseteq W$

$\underbrace{\{V_b\}}$ 亦为 B 开覆盖。取有限个 $V_{b_1}\sim V_{b_m}$

令 $U=\bigcap_{j=1}^{m}U_{b_j}$　$V=\bigcup_{j=1}^{m}V_{b_j}$　U,V 亦为开 且 $U\supseteq A$

$V\supseteq B$

且 $U\times V\subseteq W$　□.

4.4 Mertic space compact

Definition 4.4.1:

设 X 为拓扑空间，若 X 中每个点列均有收敛子列，则 X 称为列紧。

Theorem 4.4.1

设 X 为紧致的 C_1 空间，则 X 是列紧的

Proof:

① Claim: $\exists a \in X$. s.t. $\forall a$ 的一个邻域，都包含 x_n 无穷多项。

若反之：$\forall x \in X$ 都存在 U_x，U_x 中仅含有 x_n 有限多项。

显然 $\{U_x \mid x \in X\}$ 为紧致空间 X 的开覆盖，则可取取 $U_{x_1} \cdots U_{x_m}$

$\Longrightarrow$ $\{x_n\}$ 仅有有限多项 矛盾

②：取这样的 $a \in X$，s.t. a 的每一个邻域都包含 $\{x_n\}$ 的无限多项。

设 X 为 C_1，取 a 的可数邻域基 $\{V_n \mid n = 1, 2 \cdots\}$ 且 $V_n \supset V_{n+1}$

$\forall i \in \mathbb{N}_+$ 取 x_{n_i} 为属于 V_i 中的 $\{x_n\}$ 项的第 i 个 $\Longrightarrow n_{i+1} > n_i$

则 $\{x_{n_i}\}$ 子列 $\longrightarrow a$.

Corollary: 紧致度量空间是列紧的。

Definition:

(X, d) 为度量空间，$A \subset X$，$\delta > 0$，若 $\bigcup_{a \in A} B(a, \delta) = X$，则称 A 是 X 的一 δ 网。

显然，A 是 X 的一个 δ 网 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$ $d(x, A) < \delta$.

Theorem 4.4.2

(X,d) 为列紧度量空间，则 $\forall \delta>0$，X 都有一个有限的 δ 网.

proof: 反证：若 $\exists \delta_0>0$ 对任一有限集 $A\subset X$，总存在 $x\in X$ s.t. $d(x,A)\geq \delta_0$.

取 $\{x_1\}\in X$ 则有在 x_2 s.t. $d(x_1,x_2)\geq \delta_0$

假设取好 $A_n=\{x_1,\cdots x_n\}$ 则 $\exists x_{n+1}$ s.t. $d(x_{n+1},A)\geq\delta_0$.

即：$d(x_{n+1},x_k)\geq\delta_0$ $k=1,2\cdots n$

故得到点列 $\{x_n\}$，s.t. $\forall i<j$ $d(x_j,x_i)\geq\delta_0$

故 x_n 无任何收敛子列 矛盾.

Theorem: 4.4.3

设 (X,d) 为列紧度量空间. 则 X 有界.

proof: 设 $A=\{a_1\cdots a_n\}$ 为 X 上的有限一1网. 即：$\bigcup_{i=1}^{n}B(a_i,1)=X$

记：$M=\max\{d(a_i,a_j)\}$

则 $\forall x,y\in X$ 则设 $x\in B(a_1,1)$ $y\in B(a_2,1)$

$d(x,y)\leq d(x,a_1)+d(a_1,a_2)+d(a_2,y)\leq 2+M$ □.

Theorem: 4.4.4

(X,d) 为紧致度量空间，则 X 有界.

Lemma 4.4.1 勒贝格引理

设 (X,d) 为列紧度量空间，$\mathcal{U}$ 为 X 一开覆盖. $X\notin\mathcal{U}$.

则 $\exists\delta>0$，$\forall x\in X$，有一 $U\in\mathcal{U}$. s.t. $B(x,\delta)\subset U$

proof: 反证法：若 $\forall n \in N_+$ 均有 $x_n \in X$ st. $B(x_n, \frac{1}{n})$ 不能居于 $\mathcal{U}$ 中任一元，由 X 列紧性 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_i}\}$ $x_{n_i} \to a$.

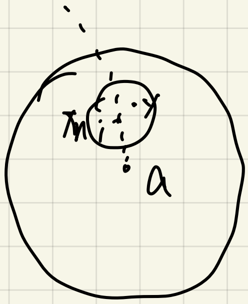
则 $\exists \varepsilon > 0$ 与 $U \in \mathcal{U}$ st. $B(a, \varepsilon) \subset U \in \mathcal{U}$

则当 i 充分大后 $d(x_{n_i}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\frac{1}{n_i} < \frac{\varepsilon}{2}$

此时 $\forall y \in B(x_{n_i}, \frac{1}{n_i})$ $d(y, a) \le d(y, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, a) \le \varepsilon$.

$\Rightarrow y \in B(a, \varepsilon) \Rightarrow B(x_{n_i}, \frac{1}{n_i}) \subseteq B(a, \varepsilon) \subset U$.

与 x_{n_i} 选取矛盾.



$\square$.

Definition 4.4.3.

设 (X, d) 为列紧度量空间. $\mathcal{U}$ 为 X 上的一开覆盖. $X \notin \mathcal{U}$. 设 $L(\mathcal{U})$ 是勒贝格引理中 δ 的上确界. 称为开覆盖 $\mathcal{U}$ 的勒贝格数.

Theorem 4.4.5.

列紧的度量空间是紧致的.

proof: (X, d) 为列紧 mertic space. $\mathcal{U}$ 为 X 一开覆盖. 不妨设 $X \notin \mathcal{U}$.

设 $0 < \delta < L(\mathcal{U})$.

则 X 有一个有限的 δ 网. $A = \{x_1 \cdots x_n\}$ 且 $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta) = X$.

对每个 i 都存在 $U_i \in \mathcal{U}$. 使得 $B(x_i, \delta) \subset U_i$

故. $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$ 从而是一有限子覆盖.

Theorem: 4.4.6.

X为度量空间. 则X是紧致$\Longleftrightarrow$ X列紧.

Theorem 4.4.7

设$A\subset\mathbb{R}^n$, 则A是紧致子集$\Longleftrightarrow$ A为有界闭集.

"$\Rightarrow$" $\mathbb{R}^n$为度量空间, 则A紧 $\Rightarrow A$有界 又$\mathbb{R}^n$ T_2 则A闭

"$\Leftarrow$" 若A有界闭 则 $A\subset X=[a,b]^n$. $[a,b]^n$紧致(紧集笛卡尔积).

故A为紧空间中闭子集为紧致.

Proposition: 4.4.8.

① 设A为直线$\mathbb{R}$上的紧致集. 则$\exists m, M\in A$ s.t. $\forall a\in A$ $m\le a\le M$

②: X紧空间: $f: X\to\mathbb{R}$连续. 则存在$a,b\in X$ 使得对任一$x\in X$有$f(a)\le f(x)\le f(b)$

③: X为一度量空间上的紧集。 $f: X\to\mathbb{R}$ 连续则一致连续.

Proof: ① $\because A$紧致 故A有界闭 设$M=\sup A$ 下证明$M\in A$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists a_\varepsilon\in A$ s.t. $M-\varepsilon<a_\varepsilon<M$ 则 $M\in A'\subset A$

② X紧 则$f(X)$为$\mathbb{R}$上紧致集. 则$\exists m, M\in f(X)$ s.t. $m\le f(x)\le M$.

$\Rightarrow f(a)\le f(x)\le f(b)$.

③: $\forall\varepsilon>0$

$f: X\to\mathbb{R}$ 连续 $\forall x\in X$ $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$为$\mathbb{R}$中开

$f^{-1}((f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon))$为$X$上包含$x$的开邻域 则存在$B(x,\delta_x)$

s.t. $f(B(x,\delta_x))\subset(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$

这样的$\{B(x,\frac{\delta_x}{2})\mid x\in X\}$覆盖了$X$. 则$\because X$紧集. 故$B(x_1,\frac{\delta_{x_1}}{2})\sim B(x_m,\frac{\delta_{x_m}}{2})$

覆盖了X.

令 $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \cdots, \frac{\delta_m}{2}\}$

此时: $\forall s,t \in X$ $d(s,t) < \delta$ 时 此时 s,t 就必落于同一个某一 $B(x_k, \delta_k)$ 中 故 $|f(s)-f(t)| < \varepsilon$ □.

Theorem: 紧致度量空间 不可由可数个 非空互不相交的闭集 覆盖.

proof: 若 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 由于 X 为 T_4 则 存在一列互不交的开集 U_n s.t. $F_n \subseteq U_n$.

则 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一族 开覆盖 则 设 X 被 $\bigcup_{n=1}^{N} U_n$ 覆盖

$\forall m > N$ 时 $F_m \subseteq U_m$ $U_m \cap (\bigcup_{n=1}^{N} U_n) = \phi$.

$F_m \subseteq X - \bigcup_{n=1}^{N} U_n = \phi$ 与 非空 F_m 矛盾.

Theorem: 1. 紧致度量空间完备. 2. 紧致度量空间 可分

1. 列紧性

2. 紧⇒有限的 ε 网 故 取 $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$

ε 网取为 A_n $\underline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$. 可数子集 且稠密

Important Examples.

Example: $\mathbb{R}$上标准拓扑下的子空间 $\mathbb{Q}$

①: $\mathbb{Q}$ 是 T_1, T_2, T_3 的 继承; 但不是 T_4

②: 单点集为闭集.

③: $\mathbb{Q}$是 C_1, C_2 的 继承, $\mathbb{Q}$ 有 Lindelöf 性

④: $\mathbb{Q}$是可分的, 其本身作为可数稠密子集.

⑤: $\mathbb{Q}$ 是完全不连通的.

⑥: $\mathbb{Q}$ 不是局部连通, 不是道路连通, 不是局部道路连通.

⑦ $\mathbb{Q}$ 不紧致.

Proof: ①: $\mathbb{Q}$非T_4. 设α为一无理数: $\mathbb{Q} \xrightarrow{i} \mathbb{R}$ 连续

则 $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r\leq\alpha\}$ 与 $\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r\geq\alpha\}$ 为$\mathbb{Q}$上闭集.

即: $\underbrace{\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r<\alpha\}}_{A}$ 与 $\underbrace{\{r \mid r\in\mathbb{Q}, r>\alpha\}}_{B}$ 为$\mathbb{Q}$上闭集

则: $A\cap B=\emptyset$

则 任2个 包含A与B开集 U 与 V 必定相交.

⑤: 事实上, 任取$\mathbb{Q}$多于2点的子集A, $a,b\in A$ $a<b$.

则取无理数 $\alpha\in(a,b)$ 则: $\{r\in A \mid r<\alpha\}$ 与 $\{r\in A \mid r>\alpha\}$ 为A的一个分离

故A不连通 且连通分支均为单点集. $\mathbb{Q}$也不是道路连通的 自然.

⑥: 取定一点 $r\in\mathbb{Q}$, 对r的一个任意邻域 $(a,b)\cap\mathbb{Q}$. 则由⑤可知其必不是连通.

故$\mathbb{Q}$ 不是局部连通, 自然也不是局部道路连通.

⑦ 取其一族开覆盖 $\{(-n,n)\cap\mathbb{Q}\}_{n=1}^{\infty}$ 则 不能取出有限个覆盖$\mathbb{Q}$.

Example: $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{fc})$ 拓扑性质:

①: 闭集: ϕ $\mathbb{R}$. 有限集.   ②: 是 T_1 但非 T_2, T_3, T_4.

③: 非 C_1, 非 C_2.   ④: 为紧空间, 甚至任一子集都为紧集.

⑤: 是连通且局部连通, 是道路连通且局部道路连通

Proof: ②: T_1 因单点为闭集. 但非 T_2: 若能找到存在 U and V st.

~~$x\in$~~ $x\in U$ and $y\in V$ $U=X-F_1$ $V=X-F_2$ $U\cap V\neq\phi$ 矛盾.

自然不会是 T_3、T_4 否则推出一定为 T_2

③: 非 C_1 若对 x 有可数邻域基 $\{B_n\}$

令 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}-B_n) \Longrightarrow A$ 可数

取 $y\in\mathbb{R}-A$ 且 $y\neq x$ 则 $y\in B_n$ $(\forall n)$

但 $U=\mathbb{R}-\{y\}$ 是一个包含 x 的开集. 但 $\forall n$ $B_n\not\subset U$ 矛盾.

自然非 C_2.

④ 紧致的. 设 X 被一族 $\{U_\lambda\}$ 覆盖.

则 $\mathbb{R}-U_1$ 有限点 则 $\forall x\in\mathbb{R}-U_1$ 找 $\{U_\lambda\}$ 中某一个覆盖 $\{x\}$

则 $\mathbb{R}$ 可由 U_1 与 $U_{\lambda_1},\cdots U_{\lambda_s}$ 有限个覆盖.

若 A 为有限集. $A\subseteq\bigcup_\lambda O_\lambda$ 则对 $x_1\in A$ 一定 $\exists O_1$ st. $x_1\in O_1$ 有限步得若干个 O_n. 这些并起来即可

若 A 为无限集 断言可以被有限覆盖

$A\subseteq\bigcup_\lambda O_\lambda$ 若 $A\subseteq O_1$ 证毕 若 $A\not\subseteq O_1$ 则那些不被 O_1 包含的 A 中的元素 $x\in\mathbb{R}-O_1 \Rightarrow x\in F_1$

而 F_1 有限集 故又可根据 step1 挑出有限个与 O_1 并即可

⑤ 是道路连通的: $\forall x,y\in\mathbb{R}$ 定义 $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ $f(t)=(1-t)x+ty$

则 f 为单射. 下证 f 连续.

$\forall(\mathbb{R},\mathcal{T}_{fc})$ 上闭集 F (有限集) $f^{-1}(F)$ 亦有限 故为 $[0,1]$ 中闭集 □

或 $(\mathbb{R},\mathcal{T}) \xrightarrow{id} (\mathbb{R},\mathcal{T}_{fc})$ id 为连续映射

则 将 $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ 性质 继承.

Example $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_l)$ 下极限拓扑性质.

① $[a,b)$ $a<b$ 既开又闭，且单点集闭

②: 是 T_1, T_2, T_3, T_4

③: 完全不连通

④: 不紧致.

⑤: 可分

proof: ① $[a,b)^c = (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \bigcup_{n=N}^{\infty} [-n, a) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [b, b+n)$ 为开

$\Longrightarrow [a,b)$ 为闭

且 $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x, x+\frac{1}{n})$ 为闭

② 单点闭 故 T_1，下证 T_4 设 A 与 B 为 $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_l)$ 中 2 个不交闭集

$\forall a\in A$ 则 $a \notin B$ 故存在 $[a, r_a) \cap B = \phi$ 同理 $\forall b\in B$ $[b, r_b) \cap A = \phi$.

令 $U = \bigcup_{a\in A} [a, r_a)$ $V = \bigcup_{b\in B} [b, r_b)$ 为开 $A \subseteq U$ $b \subseteq V$

若 $U\cap V \neq \phi$ 设存 $x\in U\cap V$ 则 $x \in [a, r_a)$ $x\in [b, r_b)$

step 1 若 $a=b$ 则 $a\in A\cap B$ 矛盾

step 2 若 $a<b$ 有: $b \le x < r_a$ $\Rightarrow b\in [a, r_a)$ 与 $[a, r_a) \cap B = \phi$ 矛盾.

step 3 同理 $b<a$ 矛盾

$\Rightarrow U\cap V = \phi$ T_4 自然 $T_3 \cdot T_2$

③ 对任何多于 2 点子集 A $(a<b)$ 其中 $[a,b)\cap A$ 与 $[a,b)\cap A$ 既开又闭

故 A 不连通 $\Rightarrow$ 连通分支仅能为单点集.

④: 考虑 $C = \{[n, n+1) \mid n\in \mathbb{Z}\}$ 开覆盖.

⑤: $\mathbb{Q}$ 作为子集稠密的. $\forall$ 开集 U 与 $x\in U$. 故存在 拓扑基 $U = [a, b) \ni x$

从而 $\mathbb{Q} \cap U \neq \phi$

Proposition:

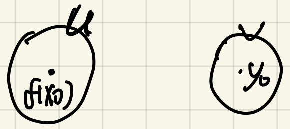
① X, Y are topological spaces. $f: X\to Y$ 连续. $G=\{(x,f(x)) \mid x\in X\}\subset X\times Y$ 称为 f 的图. 若 Y is T_2 则 G 为 $X\times Y$ 上闭集.

② X, Y. $f: X\to Y$ $G=\{(x,f(x)) \mid x\in X\}\subset X\times Y$ 若 Y 紧且 G 闭集 则 f 连续.

Lemma: $X\times Y \xrightarrow{\pi_X} X$ 若 Y 紧 则 π_X 为闭映射.

Proof: ① 下证其补集为开. (x_0, y_0) $f(x_0)\neq y_0$ 则有 Y 中开集 U, V 分离.

如



则存在 x_0 邻域 W s.t. $f(W)\subseteq U$

$W\times V$ 为 $X\times Y$ 开集. 即 G^c 为开 $\Rightarrow G$ 闭

17

Lemma proof:

$\forall A\subseteq X\times Y$ 为闭 下证 $\pi_X(A)$ 闭 即 $X-\pi_X(A)$ 开.

$\forall x\in X-\pi_X(A) \Rightarrow \forall y\in Y$ $(x,y)\notin A$ 又 A 为闭, A^c 为开.

故 $\exists U_x, V_y$ 为 x, y 开邻域 s.t. $U_x\times V_y\subseteq A^c$ $(U_x\times V_y\cap A=\emptyset)$.

now $\{V_y\}$ is a collection open cover of Y. 故挑出有限个 $V_{y_1}\cdots V_{y_m}$

令 $U=U_{x_1}\cap U_{x_2}\cap\cdots\cap U_{x_m}$ 作为 x 开邻域

说明 $U\cap\pi_X(A)=\emptyset$ 即可

若 $\exists x_0\in U\cap\pi_X(A)$ 则 $\exists y_0\in A$ s.t. $(x_0,y_0)\in A$

而 $\{V_{y_1}\cdots V_{y_m}\}$ 覆盖 Y 不妨记 $y_0\in V_{y_1}$ 且 $x_0\in U\Rightarrow x_0\in U_{x_1}$.

则 $(x_0,y_0)\in U_{x_1}\times V_{y_1}$ 但 $U_{x_1}\times V_{y_1}$ 应与 A 无交 矛盾.

②: $\forall F$ 为 Y 闭 要证: $f^{-1}(F)$ 为 X 闭

考察 $G\cap(X\times F)$ 为 $X\times Y$ 中闭 (note that $X\times F$ 为 $X\times Y$ 中闭).

故 $\pi_X(G\cap(X\times F))$ 为 X 中闭 即:

$\{x\in X \mid \exists y\in Y ; (x,y)\in G\cap(X\times F)\} = \{x\in X \mid f(x)\in F\} = f^{-1}(F)$ 为闭.