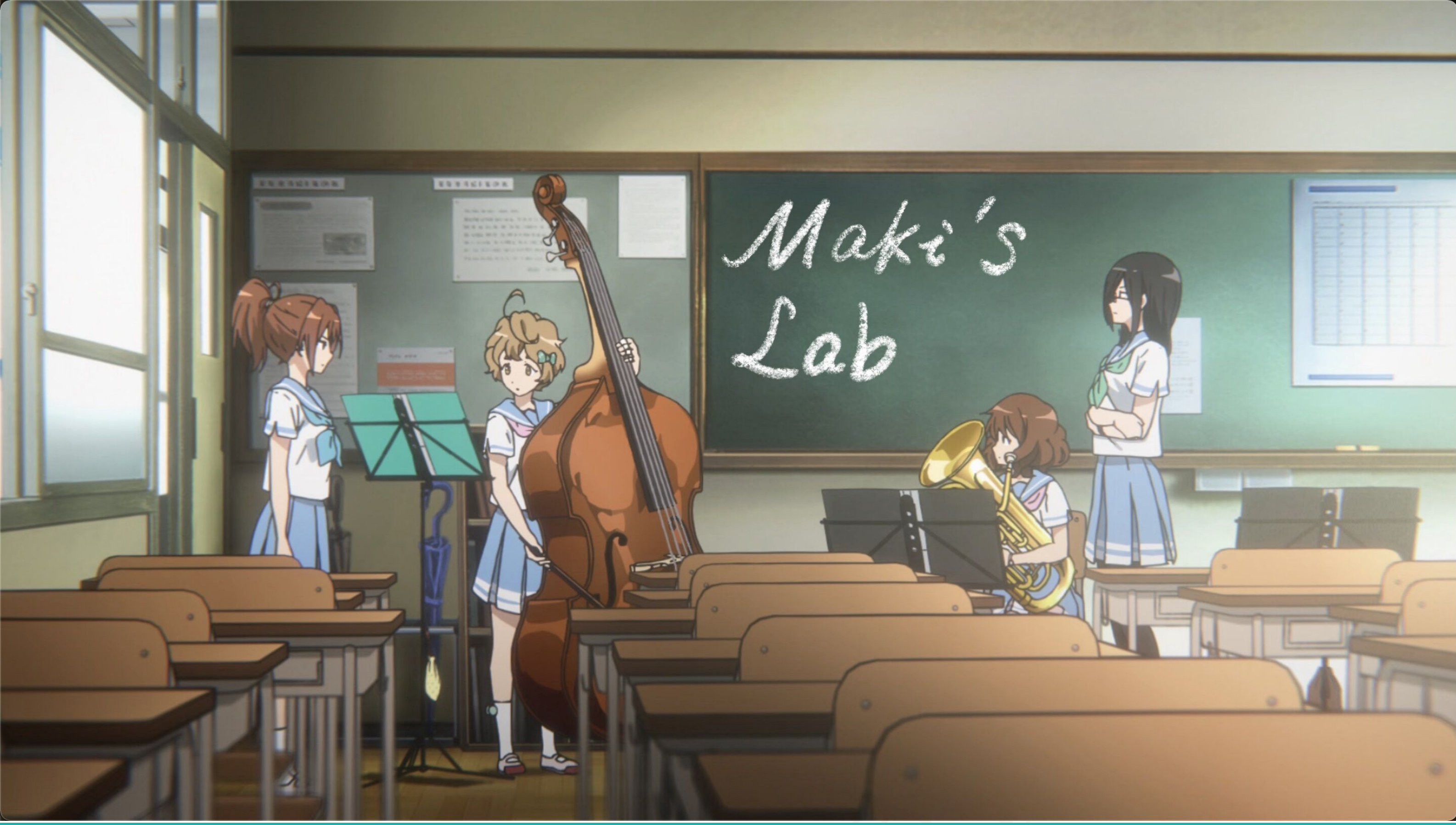
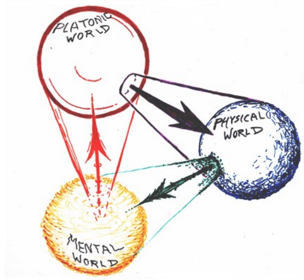


数学分析习题讲义

作者：Hongxin Yang 南风

时间：August 14, 2024



目录

第 1 章 相关定理环境等的标识

proof 使用方法:begin+ proof+ end

注 使用方法:begin+ remark+ end

例题 1.1 使用方法；begin+ example + end

exercise 1.1 使用方法:begin+ exercise +end

性质 使用方法:begin+ property + end

问题 1.1 使用方法:begin + problem +end

结论 使用方法:begin+ conclusion +end

笔记 使用方法；begin + note + end

定义 1.1
使用方法:begin+ definition+ end

命题 1.1
使用方法:begin+ proposition+ end

引理 1.1
使用方法:begin+ lemma+ end

推论 1.1
使用方法:begin + corollary + end

公理 1.1
使用方法:begin+ axiom + end

公设 1.1
使用方法:begin + postulate + end

第 2 章 2025 每日一题

exercise 2.1

(华东师范大学, 2024).

设 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a(-\infty<a<+\infty)$.

(1)判断 $\lim_{n\to\infty}a_n$是否存在, 若存在, 请给出严格证明; 若不存在, 请举例并详细说明.

(2)若 $\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$或 $\{a_n\}$ 单调递增, 判断 $\lim_{n\to\infty}a_n$是否存在, 若存在, 请给出严格证明; 若不存在, 请举例并给出详细证明.

proof (1) $\lim_{n\to\infty}a_n$不一定存在, 例如$a_n=(-1)^n$, 此时 $|a_1+a_2+\cdots+a_n|\le 1$, 因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$.但是 $\{a_n\}$ 却是发散的.

(2)(*i*)若 $\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n$存在, 原因如下:

注意到$a_n=\frac{na_n-a_1-a_2-\cdots-a_n}{n}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

而由阿贝尔变换公式可知

$$na_n-a_1-a_2-\cdots-a_n=\sum_{k=1}^{n-1}k(a_{k+1}-a_k).$$

于是结合$Stolz$公式可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n-a_1-a_2-\cdots-a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}k(a_{k+1}-a_k)}{n}=\lim_{n\to\infty}(n-1)(a_n-a_{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0.$$

于是$a_n=\frac{na_n-a_1-a_2-\cdots-a_n}{n}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.式关于$n\to\infty$取极限, 有 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(*ii*)若 $\{a_n\}$ 单调递增, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n$也存在, 否则必有 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$

那么对任意的$M>0$, 存在正整数N, 使得$n>N$时, 有$a_n>2(M+1)$.

对于上述固定的N, 明显 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n-N}{n}=1$.

所以存在正整数N', 使得$n>N'$时, 有$\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}>-1,\quad \frac{n-N}{n}>\frac{1}{2}$.那么$n>\max\{N,N'\}$时, 有

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}&=\frac{a_1+\cdots+a_N}{n}+\frac{a_{N+1}+\cdots+a_n}{n}\\&>-1+\frac{n-N}{n}\cdot 2(M+1)\\&>-1+\frac{1}{2}\cdot 2(M+1)=M.\end{aligned}$$

这说明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$, 矛盾.

exercise 2.2

(中国科学院大学, 2024).

设非负数列 $\{a_n\}$ 满足$a_{n+m}\le a_n+a_m$

证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf_{n\ge1}\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$. (中国科学院大学, 2024).

设非负数列 $\{a_n\}$ 满足$a_{n+m}\le a_n+a_m$

证明: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf_{n\ge1}\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$.

proof

首先注意到$\frac{a_n}{n}\ge 0$, 因此 $\inf_{n\ge1}\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 存在, 设为α

那么对任意的正整数n, 有$\alpha\le\inf_{k\ge n}\left\{\frac{a_k}{k}\right\}$, 取极限可得$\alpha\le\lim_{n\to\infty}\inf_{k\ge n}\left\{\frac{a_k}{k}\right\}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$.

另外, 根据下确界的定义, 对任意的$\varepsilon>0$, 存在正整数N, 使得$\frac{a_N}{N}<\alpha+\varepsilon$.

对于这个固定的N, 对任意的正整数n, 根据带余除法可设$n=mN+k$, 其中$0\le k<N$

再结合已知,有$a_n = a_{mN+k} \le a_{mN} + a_k \le a_N + a_{(m-1)N} + a_k \le \cdots \le ma_N + a_k$.

因此$\dfrac{a_n}{n} \le \dfrac{m}{n}a_N + \dfrac{a_k}{n}$.

注意到$1 = \dfrac{m}{n}N + \dfrac{k}{n}$, 让$n \to \infty$可得$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{N}$

因此上式关于$n \to \infty$取上极限,有$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{m}{n}a_N + \dfrac{a_k}{n}\right) = \dfrac{a_N}{N} < \alpha + \varepsilon$.

再结合ε的任意性可知$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} \le \alpha$, 也就是$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} \le \alpha \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$.那么$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \alpha$

也就是$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \inf\limits_{n\ge 1}\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$.

exercise 2.3 (华东师范大学, 2024; 上海交通大学, 2024).

设f是定义在$(-\infty,+\infty)$上的非常数函数,请判断下列说法是否正确.若正确,请给出严格证明;若不正确,请举例并给出详细说明.

(1)若f是处处不连续的周期函数,则f必有最小正周期.

(2)若f是处处不连续的周期函数,则f必没有最小正周期.

(3)若f是周期函数但没有最小正周期,则f必有一列趋于0的周期.

(4)若f是连续的周期函数,则f必有最小正周期.

proof

(1)错误.例如$f(x) = D(x)$为狄利克雷函数,显然$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处不连续,

同时对任意的正有理数k及$x \in (-\infty,+\infty)$,当x为有理数时,$x+k$依旧为有理数,因此$f(x) = 1 = f(x+k)$

当x为无理数时,$x+k$也是无理数,因此$f(x) = 0 = f(x+k)$.

总而言之,$f(x+k) = f(x)$对任意的$x \in (-\infty,+\infty)$成立,也就是说任意正有理数k均为$f(x)$的周期,那么$f(x)$没有最小正周期.

(2)错误.例如$f(x) = D(x) + x - [x]$,其中$D(x)$为狄利克雷函数,$[x]$为取整函数.

显然$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处不连续,同时1是$D(x)$与$x-[x]$的周期,因此1也是$f(x)$的周期.

而对于任意的$T \in (0,1)$,若T是f的周期,那么$f(T) = f(0)$,即$D(T)+T = D(0) = 1$,也就是$D(T) = 1-T \in (0,1)$,这显然是矛盾的.

因此T不是f的周期,那么1就是f的最小正周期.

(3)正确.因为f没有最小正周期,所以存在严格递减的正数列$\{a_n\}$,满足每一个$a_n(n = 1,2,\cdots)$均为f的周期.

根据单调有界原理可知$\{a_n\}$收玫

记$b_n = a_{n+1} - a_n$,那么$\{b_n\}$就是以0为极限的正数列,同时对任意的正整数n及$x \in (-\infty,+\infty)$

也有$f(x+b_n) = f(x + a_{n+1} - a_n) = f(x + a_{n+1}) = f(x)$.

这说明$\{b_n\}$就是f的一列趋于0的周期.

(4)正确.若f没有最小正周期,根据(3)可知存在趋于0的正数列$\{T_n\}$,使得每一个$T_n(n = 1,2,\cdots)$都是f的周期.

对任意的$x \in (-\infty,+\infty)$,考虑整数$\left[\dfrac{x}{T_n}\right]$,利用取整函数的性质有$x - T_n = \left(\dfrac{x}{T_n} - 1\right)T_n < \left[\dfrac{x}{T_n}\right]T_n \le \dfrac{x}{T_n}\cdot T_n = x$.

由$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$可知$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{x}{T_n}\right]T_n = x$

于是根据f的连续性可知$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(0 + \left[\dfrac{x}{T_n}\right]T_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(0) = f(0)$.

这说明$f(x)$为常数函数,与已知矛盾.因此命题成立.

exercise 2.4 (浙江大学, 2024).

设函数f, g在$[0,1]$上连续,且存在包含于$[0,1]$的数列$\{x_n\}$,使得对于任意$n \ge 1$,有$f(x_n) = g(x_{n+1})$.

请证明：存在$\xi \in [0,1]$，使得$f(\xi)=g(\xi)$.

proof 反证法.记$F(x)=f(x)-g(x)$，显然$F(x)$是$[0,1]$上的连续函数.
若对任意的$x\in[0,1]$，都有$f(x)\neq g(x)$，由连续函数的介值定理可知$F(x)$在$[0,1]$上恒大于零或恒小于零，这里不妨设前者成立
那么$m=\min_{x\in[0,1]}F(x)>0$.同时对任意的正整数k，还有$g\left(x_{k+1}\right)-g\left(x_k\right)=f\left(x_k\right)-g\left(x_k\right)=F\left(x_k\right)\geq m$.
上式关于$k=1,2,\cdots,n$求和，就有$g\left(x_{n+1}\right)-g\left(x_1\right)\geq mn\to+\infty(n\to\infty)$.
这说明$\lim\limits_{n\to\infty}g\left(x_{n+1}\right)=+\infty$，因此$g(x)$在$[0,1]$上无界，这与$g(x)$在$[0,1]$连续从而有界的性质相矛盾.
因此，必然存在$\xi\in[0,1]$，使得$f(\xi)=g(\xi)$.

exercise 2.5 (华中师范大学, 2024; 哈尔滨工业大学, 2024).
设(a,b)为有界区间，证明：函数$f(x)$在(a,b)上一致连续$\Longleftrightarrow$对于(a,b)上的任意柯西列$\{x_n\}$，函数值数列$\{f\left(x_n\right)\}$也是柯西列.

proof 必要性.已知$f(x)$在(a,b)上一致连续，所以对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对任意的$x',x''\in(a,b)$，只要$|x'-x''|<\delta$，就有$|f\left(x'\right)-f$
ε.
那么对于(a,b)上的任意柯西列$\{x_n\}$，显然存在正整数N，当$n,m>N$时，有$|x_n-x_m|<\delta$，进而$|f\left(x_n\right)-f\left(x_m\right)|<\varepsilon$.
这说明$\{f\left(x_n\right)\}$也是柯西列.

充分性.已知当$\{x_n\}$是(a,b)上的任意柯西列时，$\{f\left(x_n\right)\}$也是柯西列.
若$f(x)$在有界区间(a,b)上不一致连续，那么
存在$\varepsilon_0>0$，对任意的$\delta>0$，总存在$x',x''\in(a,b)$，虽满足$|x'-x''|<\delta$，但$|f\left(x'\right)-f\left(x''\right)|\geq\varepsilon_0$.
现在依次取$\delta=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，则存在$a_n,b_n\in(a,b)$，满足$|a_n-b_n|<\dfrac{1}{n}$，但是$|f\left(a_n\right)-f\left(b_n\right)|\geq\varepsilon_0$.
由于(a,b)为有界区间，所以$\{a_n\}$为有界数列，那么存在收敛子列，为了方便，不妨就设$\{a_n\}$收敛，此时
$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\left(a_n-b_n\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
即$\{b_n\}$也收敛，且与$\{a_n\}$极限相同.
现在作数列$\{x_n\}$为$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots$则$\{x_n\}$为收敛数列，从而也是$(a,b)$上的柯西列
而$|f\left(a_n\right)-f\left(b_n\right)|\geq\varepsilon_0$.式说明$|f\left(x_{2n-1}\right)-f\left(x_{2n}\right)|\geq\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$.
即$\{f\left(x_n\right)\}$不是柯西列，这与已知矛盾.所以$f(x)$在有界区间(a,b)上一致连续.
注.本题充分性也可以通过归结原则说明$f(a+0)$与$f(b-0)$存在进行证明.

exercise 2.6 (南开大学, 2024).
设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)<f(b)$，证明：存在$[c,d]\subseteq[a,b]$，使得$f(x)$在$[c,d]$上的最小值为$f(a)$，最大值为$f(b)$.

proof 首先记$E=\{x\in[a,b]\mid f(x)=f(a)\}$.
由于$a\in E$，所以E是非空有界数集，进而有上确界，记$c=\sup E$则$a\leq c$，并且存在数列$\{c_n\}\subset E$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$
那么结合f的连续性，有$f(c)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}c_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(c_n\right)=f(a)$.
进而$c\neq b$，因此$c<b$.下面再考虑数集$F=\{x\in[c,b]\mid f(x)=f(b)\}$.
由于$b\in F$，所以F也是非空有界数集，进而有下确界，记$d=\inf F$，则$d\geq c$，并且存在数列$\{d_n\}\subset F$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=d$
那么结合f的连续性，有$f(d)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty}d_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(d_n\right)=f(b)$.这说明$d\neq c$

因此必有$c<d$.任取$x_0\in(c,d)$，若$f\left(x_0\right)<f(a)$，那么$f\left(x_0\right)<f(a)<f(b)$

由连续函数的介值定理, 存在$\xi \in (x_0,b)$, 满足$f(\xi)=f(a)$, 因此$\xi \in E$, 但是$\xi > x_0 > c = \sup E$, 这显然是矛盾的
于是$f(x_0) \geq f(a)$.
同理, 若$f(x_0) > f(b)$, 那么$f(c) < f(b) < f(x_0)$
由连续函数的介值定理, 存在$\eta \in (c,x_0)$, 使得$f(\eta)=f(b)$, 因此$\eta \in F$, 同时$\eta < x_0 < d = \inf F$, 这依旧是矛盾的, 所以$f(x_0) \leq f(b)$.
综上, 对任意的$x_0 \in (c,d)$, 有$f(a) \leq f(x_0) \leq f(b)$, 同时$f(c)=f(a), f(d)=f(b)$, 因此$f(x)$在$[c,d]$上的最小值为$f(a)$, 最大值为$f(b)$.

exercise 2.7
$f \in C^2[1,+\infty)$ 且$f(x)>0$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=+\infty$
证明 : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$收敛

proof $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=+\infty \Longrightarrow \forall M>0, \exists x_0>0$使得当$x \geqslant x_0$时有$f''(x_0)>M$
因此$f'(x) > f'(x_0) + M(x-x_0)\ (x>x_0)$
$\Longrightarrow \exists x_1 > x_0$使得$f'(x_1)>0$
由泰勒定理存在$\xi \in (x_1,x)$ 使得
$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_1)^2$
因为$f(x)>0$与$f'(x_1)>0 \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{2}$
$\Longrightarrow \frac{1}{f} < \frac{2}{f''(\xi)(x-x_1)^2}$ 由$\frac{2}{f''(\xi)(x-x_1)^2}$作反常积分收敛故$\int_1^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$收敛

exercise 2.8 (华中师范大学, 2024; 哈尔滨工业大学, 2024; 同济大学, 2024).
设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可微, 设$M_i = \sup\limits_{-\infty<x<+\infty}\left|f^{(i)}(x)\right| < +\infty (i=0,1,2)$.证明 : $M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

proof 若$M_2=0$, 那么$f''(x)\equiv 0$, 进而存在常数c, 使得$f'(x)\equiv c$, 还存在常数d, 使得$f(x)=cx+d$
而已知$M_0<+\infty$, 因此必有$c=0$, 自然$M_1=0$, 即$M_1^2=2M_0M_2=0$, 结论成立.

若$M_2>0$, 对任意的$x\in\mathbb{R}, h>0$由泰勒定理可知存在$\xi\in(x,x+h), \eta\in(x-h,x)$, 使得
$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$;
$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\eta)}{2}h^2$.
上述两式相减可得$f(x+h)-f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^2}{2}\left[f''(\xi)-f''(\eta)\right]$.从而
$|f'(x)| \leq \frac{1}{2h}\left[|f(x+h)|+|f(x-h)|\right] + \frac{h}{4}\left[|f''(\xi)|+|f''(\eta)|\right] \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.
由平均值不等式可知$\frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} \geq \sqrt{2M_0M_2}$, 仅当$h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$ 时取等号.
所以将$h=\sqrt{2M}$代入到(8)式, 就有$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$, 进而$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$, 也就是$M_1^2 \leq 2M_0M_2$.

exercise 2.9
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n \cos\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.

proof 由于$\cos(1+x^2)$在$x=1$处连续, 因此$\forall\varepsilon>0$, 存在$c\in(0,1)$, 使得$x\in[c,1]$时, 有$\left|\cos(1+x^2)-\cos 2\right| < \varepsilon$.

而明显 $\lim\limits_{n\to\infty} c^{n+1}=0$, 因此存在正整数$N$, 使得$n>N$时, 有$c^{n+1}<\varepsilon$, 进而

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n\left[\cos\left(1+x^2\right)-\cos 2\right]\mathrm{d}x\right| &\le n\int_0^c x^n\left|\cos\left(1+x^2\right)-\cos 2\right|\mathrm{d}x+n\int_c^1 x^n\left|\cos\left(1+x^2\right)-\cos 2\right|\mathrm{d}x\\ &< 2n\int_0^c x^n\mathrm{d}x+n\varepsilon\int_0^1 x^n\mathrm{d}x\\ &=\frac{2n}{n+1}c^{n+1}+\frac{n}{n+1}\varepsilon\\ &<2c^{n+1}+\varepsilon<2\varepsilon+\varepsilon\\ &=3\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\left[\cos\left(1+x^2\right)-\cos 2\right]\mathrm{d}x=0$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\cos\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n\cos 2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cos 2=\cos 2.$$

✍ **exercise 2.10**

设$f(x)$在 $[a,b]$上可积, 且在$x=b$处连续

证明 : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n f(x)\mathrm{d}x=f(b)$.

proof 首先注意到$\dfrac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n f(b)\mathrm{d}x=f(b)\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}\Big|_a^b=f(b)$, 因此所求证式等价于

求证 : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n[f(x)-f(b)]\mathrm{d}x=0$.

$\forall\varepsilon>0$, 由于f在$x=b$处连续, 因此存在$c\in(a,b)$, 使得$x\in[c,b]$时, 有$|f(x)-f(b)|<\varepsilon$.

同时, 由于f在 $[a,b]$上可积, 从而有界, 那么$f(x)-f(b)$在 $[a,b]$上也有界, 不妨设正整数M满足$|f(x)-f(b)|\le M$.

那么

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b(x-a)^n[f(x)-f(b)]\mathrm{d}x\right| &\le\int_a^c(x-a)^n|f(x)-f(b)|\mathrm{d}x+\int_c^b(x-a)^n|f(x)-f(b)|\mathrm{d}x\\ &<\int_a^c(x-a)^n M\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)^n\varepsilon\mathrm{d}x\\ &<\frac{M(c-a)^{n+1}}{n+1}+\frac{\varepsilon(b-a)^{n+1}}{n+1}.\end{aligned}$$

另外, 注意到$0<\dfrac{c-a}{b-a}<1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{n+1}=0$, 进而存在正整数$N$, 使得$n>N$时, 有$\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)^{n+1}<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

因此当$n>N$时, 有

$$\left|\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n[f(x)-f(b)]\mathrm{d}x\right|<M\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^{n+1}+\varepsilon<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

这就说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n[f(x)-f(b)]\mathrm{d}x=0$式成立.

✍ **exercise 2.11**

$f\in C[0,1]$, 求极限 : $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x$

proof 我们的思路很简单如果极限号能够放在里面去就有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty} f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x=f(1)$$

那么我们现在就来估计 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(\sqrt[n]{x}\right)\mathrm{d}x=f(1)\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\left(f\left(\sqrt[n]{x}\right)-f(1)\right)\mathrm{d}x=0$

$\forall\varepsilon>0,\exists c>0$, 当$x\in(c,1)$ 时有 $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$

此时

$$\left|\int_0^1 \left(f\left(\sqrt[n]{x}\right)-f(1)\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_\delta^1 \left(f\left(\sqrt[n]{x}\right)-f(1)\right)\mathrm{d}x + \int_0^\delta \left(f\left(\sqrt[n]{x}\right)-f(1)\right)\mathrm{d}x\right|$$

取 $\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2M},\dfrac{1}{2}\right\} \Longrightarrow \exists N_1>0$, 当 $n\geqslant N_1$ 时对 $x\in[\delta,1]$ 有 $\sqrt[n]{x}\in\left[\sqrt[n]{\delta},1\right]\subset[c,1]$

此时那么就有：

$$\left|\int_\delta^1 \left(f\left(\sqrt[n]{x}\right)-f(1)\right)\mathrm{d}x + \int_0^\delta \left(f\left(\sqrt[n]{x}\right)-f(1)\right)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon(1-\delta)+2M\delta<\varepsilon$$

证毕

exercise 2.12

(1)证明：$\forall\delta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}=0$

(2)设$f(x)\in C\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，证明：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

proof (1)对任意的$\delta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，注意到

$$0\le\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}\le\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}\le\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)}{\frac{\delta}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\delta}{2}\right)}=\left(\frac{\pi}{\delta}-2\right)\left(\frac{\cos\delta}{\cos\frac{\delta}{2}}\right)^n.$$

而明显$0\le\dfrac{\cos\delta}{\cos\frac{\delta}{2}}<1$，所以$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\delta}{\cos\frac{\delta}{2}}\right)^n=0$，由迫敛性便有$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}=0$

(2)由于$f(x)\in C\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以$f(x)$有界，那么$f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$也有界，不妨设正数$M$满足$\left|f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le M,\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

同时根据连续性，对$\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$(限制$\delta<\dfrac{\pi}{2}$)，当$x\in\left[\dfrac{\pi}{2}-\delta,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，有$\left|f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

另外，对于上述的$\delta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，由(1)又知$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}=0$

所以存在正整数N，当$n>N$时，有$\displaystyle\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}<\frac{\varepsilon}{2M}$.

于是当$n>N$时，有

$$\left|\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=\left|\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}\right|\le\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\left|f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}+\frac{\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\sin^n x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x}$$

$$< M \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x \mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x} < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证毕了

exercise 2.13 1.设$f(x) \in C^2[0,1]$, 证明 $\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \le 8\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$

proof 1.记 $|f(x_1)| = \min\limits_{x\in\left[0,\frac{1}{k}\right]} |f(x)|, |f(x_2)| = \min\limits_{x\in\left[1-\frac{1}{k},1\right]} |f(x)|$, 则$x_2 - x_1 \ge 1 - \frac{2}{k}$, 且

$|f(x_1)| = 3\int_0^{1/k} |f(x_1)|\mathrm{d}x \le 3\int_0^{1/k} |f(x)|\mathrm{d}x;$

$|f(x_2)| = 3\int_{1-1/k}^{1} |f(x_2)|\mathrm{d}x \le 3\int_{1-1/k}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x.$

结合拉格朗日中值定理可知, 存在$\xi \in (0,1)$, 使得

$$|f'(\xi)| = \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \le \frac{|f(x_1)|+|f(x_2)|}{1-\frac{2}{k}} \le \frac{k^2}{k-2}\left(\int_0^{1/k}|f(x)|\mathrm{d}x + \int_{1-1/k}^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right) \le \frac{k^2}{k-2}\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$$

于是对任意的$x \in [0,1]$, 有 $|f'(x)| = \left|f'(\xi) + \int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \le |f'(\xi)| + \left|\int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \le \frac{k^2}{k-2}\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$

上式两端关于x在$[0,1]$积分可得

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{k^2}{k-2}\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x. \leqslant 8\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$$

此时是因为$\frac{k^2}{k-2} = (k-2) + \frac{4}{k-2} + 4 \geqslant 8$当$k = 4$取等

命题 2.1

已知函数$f(x) \in C^2[0,1]$, 且满足$f(0)f(1) \ge 0$.

证明:

1.若$f(0)f(1) \ge 0$, 那么存在$\xi \in [0,1]$, 使得$|f'(\xi)| \le 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$成立.

2. $\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \le 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$

3.记$|f'(x_0)| = \min\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$进而$|f'(x_0)| \le 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \le 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$

此外我们还有如下结果:

4.如果条件是$f(0)f(1) < 0$的情况, 记$|f'(x_0)| = \min\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$同样有$|f'(x_0)| \le 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$

proof 1.断言: 存在$\xi \in [0,1]$, 使得$|f'(\xi)| \le 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$

如果断言成立; 则$\forall x \in [0,1]$, 有 $|f'(x)| = \left|f'(\xi) + \int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \le |f'(\xi)| + \left|\int_\xi^x f''(t)\mathrm{d}t\right| \le 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x.$

上式两边积分可得所要求证明的2.式子成立.

下面说明断言成立:

记$k = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \ge 0$

若$|f'(x)| > 2k, x \in [0,1]$, 根据导数介值定理, 可设$f'(x) > 2k$

(这是因为如果一会$f'(x) > 2k > 0$一会$f'(x) < -2k < 0$那么根据导数介值定理则存在$f'(x_0) = 0$则与$|f'(x)| > 2k$矛盾)

$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t > 2kx;$

$f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t > 2k(1-x).$

上述两式再次关于x在$[0,1]$上积分可得

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - f(0) > k \geq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$f(1) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > k \geq -\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

因此$f(0) < 0, f(1) > 0$, 这与$f(0)f(1) \geq 0$相矛盾.

所以存在$\xi \in [0,1]$, 使得$|f'(\xi)| \leq 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$式成立.

3.记$|f'(x_0)| = \min\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$, 根据上述证明过程我们知道：

若$f(0)f(1) \geq 0$, 那么存在$\xi \in [0,1]$, 使得$|f'(\xi)| \leq 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$成立.进而$|f'(x_0)| \leq 2\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$

4.如果是$f(0)f(1) < 0$的情况, 此时根据介值定理可知存在$c \in (0,1)$, 使得$f(c) = 0$,
那么$\forall x \in [0,1]$, 根据拉格朗日中值定理, 存在$\eta \in [0,1]$, 使得
$|f(x)| = |f(x) - f(c)| = |f'(\eta)(x-c)| \geq |f'(x_0)|\,|x-c|$.因此

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x &\geq |f'(x_0)| \int_0^1 |x-c|\mathrm{d}x \\
&= |f'(x_0)| \left[\frac{c^2}{2} + \frac{(1-c)^2}{2}\right] \\
&= |f'(x_0)| \left[\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \\
&\geq \frac{1}{4}|f'(x_0)|.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 记$|f'(x_0)| = \min\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$ 同样有$|f'(x_0)| \leq 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x.$

推论 2.1

设$f(x) \in C^2[0,1]$, 证明$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \leq 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$.且证明4为最佳系数

proof 由上个命题可以知道

$f(x) \in C^2[0,1]$, 记$|f'(x_0)| = \min_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$ 我们都有$|f'(x_0)| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$

此时$\forall x \in [0,1]$有

$|f'(x)| = \left|f'(x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)\,dt\right| \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{x_0}^x |f''(t)|\,dt \leqslant 4\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(t)|\,dt$

两边对x从0到1做积分即可

且$f(x) = x - \frac{1}{2}$可以取到等号

exercise 2.14

判别 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x$的敛散性.

proof 首先考虑 $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x$, 显然被积函数在 $(0,1)$上非负, 且仅以$x=0$为瑕点
同时结合洛必达法则可知

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1/6}\ln x}{\sqrt[3]{x^3-1}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1/6}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^{-1}}{-\frac{1}{6}x^{-7/6}}=6\lim_{x\to0^+}x^{\frac{1}{6}}=0.$$

由比较原则可知瑕积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x$收敛.

接下来考虑无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x$, 显然被积函数在 $(1,+\infty)$上非负, 同时结合洛必达法则可知

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{6}}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/6}\sqrt[3]{1-x^{-3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\frac{1}{6}x^{-5/6}}=6\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1/6}}=0.$$

由比较原则可知无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x$收敛.综上可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^4-x}}\mathrm{d}x$收敛 (绝对收敛).

exercise 2.15

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x(p\geq0)$的条件收敛和绝对收敛性

proof 首先注意到被积函数在 $(0,+\infty)$上没有瑕点, 于是 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$与 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$有相同的收敛性.

来研究 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$的收敛性.

当$p>2$时, 由于 $\left|\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\right|<\left|\frac{\sin x}{x^{p-1}}\right|<\frac{1}{x^{p-1}}, x\in[1,+\infty)$.且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$收敛, 因此 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$绝对收敛.

当$1<p\leq2$时, 首先对任意的$M>1$, 有 $\left|\int_1^M\sin x\mathrm{d}x\right|<2$.

另外, 记函数$f(x)=x^{p-1}+\frac{1}{x}$, 那么$f'(x)=(p-1)x^{p-2}-x^{-2}=\left[(p-1)x^p-1\right]x^{-2}\geq0, x\in\left[(p-1)^{-\frac{1}{p}},+\infty\right)$.

因此$f(x)$在 $\left[(p-1)^{-\frac{1}{p}},+\infty\right)$上单调递增, 进而 $\frac{1}{f(x)}$在 $\left[(p-1)^{-\frac{1}{p}},+\infty\right)$上单调递减, 且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$

由狄利克雷判别法可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$收玫.

与此同时, 注意到 $\left|\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\right|\geq\frac{\sin^2 x}{2x^{p-1}}=\frac{1}{4x^{p-1}}-\frac{\cos 2x}{4x^{p-1}}$.

其中 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{4x^{p-1}}\mathrm{d}x$发散, 而由狄利克雷判别法易知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{4x^{p-1}}\mathrm{d}x$收敛 $\Longrightarrow$ 因此 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\right|\mathrm{d}x$发散.

当$p\leq1$时, 对任意的正整数n, 有 $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{\sin x}{x^{p-1}+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\sin x\mathrm{d}x=1.$

由柯西准则可知 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^{p-1}+\dfrac{1}{x}}\mathrm{d}x$发散.

综上可知 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^{p-1}+\dfrac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$在$0 \le p \le 1$时发散, 在$1 < p \le 2$时条件收敛, 在$p > 2$时绝对收敛.

exercise 2.16

无穷积分 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$在$p>1$时绝对收敛, $0<p\le 1$时条件收敛

proof (i)首先当$p>1$时, 有$\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\right| < \dfrac{1}{x^p}, x\in[1,+\infty)$.且 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$收敛, 因此 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$绝对收敛.

(ii)当$0<p\le 1$时, 对任意的$M>1$, 有$\left|\int_1^M \sin x\,\mathrm{d}x\right| < 2$.同时$\dfrac{1}{x^p}$在 $[1,+\infty)$上单调递减, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p}=0$

由狄利克雷判别法可知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛.而 $\cos\dfrac{1}{x}$在 $[1,+\infty)$上单调有界, 再由阿贝尔判别法可知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$收敛.

另外, 注意到$\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\right| \ge \dfrac{\sin^2 x}{x^p}\cos 1 = \dfrac{\cos 1}{2}\left(\dfrac{1}{x^p}-\dfrac{\cos 2x}{x^p}\right)$.其中 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x$发散

同上, 由狄利克雷判别法可知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x^p}\,\mathrm{d}x$收敛, 因此 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\right|\mathrm{d}x$发散.

综上可知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\cos\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$在$p>1$时绝对收敛, $0<p\le 1$时条件收敛.

exercise 2.17

计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_0^{n\pi}\dfrac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

proof 首先对任意的正整数n,k, 有

$$
\begin{aligned}
\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x+n^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+(n^2+1)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{n^2+1}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}.
\end{aligned}
$$

那么

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{k\pi}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{k\pi^2}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{(n+1)\pi^2}{2\sqrt{n^2+1}} \to \frac{\pi^2}{2}(n\to\infty) \\
\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \ge \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{(k-1)\pi}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{(k-1)\pi^2}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{(n-1)\pi^2}{2\sqrt{n^2+1}} \to \frac{\pi^2}{2}(n\to\infty).
\end{aligned}
$$

于是由迫敛性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_0^{n\pi}\dfrac{x}{1+n^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{2}$.

exercise 2.18

设$f(x)$在 $[a,b]$上连续, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n\mathrm{d}x}=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

proof 显然$|f(x)|$也在 $[a,b]$上连续, 那么存在$c\in[a,b]$, 使得$|f(c)|=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

若$|f(c)|=0$, 那么$f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$, 此时结论显然成立.

下面考虑$|f(c)|>0$的情况：

首先注意到$\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n}\le\sqrt[n]{\int_a^b |f(c)|^n}=|f(c)|(b-a)^{1/n}$.

另外, 对任意的$\varepsilon>0$(限制$\varepsilon<|f(c)|$), 存在包含c的区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 满足$|f(x)|\ge|f(c)|-\varepsilon, x\in[\alpha,\beta]$.

那么$\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n}\ge\sqrt[n]{\int_\alpha^\beta |f(x)|^n}\ge\sqrt[n]{\int_\alpha^\beta (|f(c)|-\varepsilon)^n}=(|f(c)|-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{1/n}$.

明显

$$\lim_{n\to\infty}|f(c)|(b-a)^{\frac{1}{n}}=|f(c)|<|f(c)|+2\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}(|f(c)|-\varepsilon)(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}=|f(c)|-\varepsilon>|f(c)|-2\varepsilon.$$

因此存在公共的$N>0$, 使得$n>N$时, 有$|f(c)|-2\varepsilon<\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n\mathrm{d}x}<|f(c)|+2\varepsilon$.

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b |f(x)|^n}=|f(c)|$.

exercise 2.19

如果$f(x)$在 $[0,1]$上二次可微, $f''(x)$有界且黎曼可积.

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right]=\frac{f'(1)-f'(0)}{24}$.

proof 对任意的正整数n, 记$x_i=\frac{i}{n}(i=0,1,\cdots,n), c_i=\frac{2i-1}{2n}(i=1,2,\cdots,n)$, 那么

$$n^2\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right]=n^2\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(c_i)]\mathrm{d}x.$$

当$x\in[x_{i-1},x_i]$ 时, 由泰勒定理, 存在$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 使得

$$f(x)-f(c_i)=f'(c_i)(x-c_i)+\frac{1}{2}f''(\xi_i)(x-c_i)^2.$$

设$f''(x)$在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界与下确界分别为M_i,m_i, 那么结合上式可知

$$f'(c_i)(x-c_i)+\frac{1}{2}m_i(x-c_i)^2\le f(x)-f(c_i)\le f'(c_i)(x-c_i)+\frac{1}{2}M_i(x-c_i)^2, x\in[x_{i-1},x_i].$$

容易发现 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-c_i)\mathrm{d}x=0$, 同时 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-c_i)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12n^3}$

因此上式关于x积分可得

$\frac{m_i}{24n^3}\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(c_i)]\mathrm{d}x\le\frac{M_i}{24n^3}, i=1,2,\cdots,n$.将此代入, 有

$$\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^n m_i\le n^2\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right]\le\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^n M_i.$$

由于$f''(x)$在 $[0,1]$上黎曼可积, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^n m_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^n M_i=\frac{1}{24}\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x=\frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

由迫敛性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right]=\frac{f'(1)-f'(0)}{24}$.

exercise 2.20

设$f(x)$为$[0,+\infty)$上正值单调减少函数, 且$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.证明 : $\lim\limits_{h\to 0^+} h\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

proof 根据已知, 对固定$h>0$及正整数k, 有 $\int_{kh}^{(k+1)h} f(x)\mathrm{d}x \le hf(kh) \le \int_{(k-1)h}^{kh} f(x)\mathrm{d}x$.

上式关于$k=1,2,\cdots,n$求和就有

$\int_h^{(n+1)h} f(x)\mathrm{d}x \le h\sum\limits_{k=1}^{n} f(kh) \le \int_0^{nh} f(x)\mathrm{d}x$.

上式关于$n\to+\infty$取极限可得

$\int_h^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \le h\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(kh) \le \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

再令$h\to 0^+$就有 $\lim\limits_{h\to 0^+} h\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

✍ **exercise 2.21**

假设$f(x)\in C^\infty([0,1])$且满足下列条件 :

(1)$f(x)\not\equiv 0$.(2)$f^{(n)}(0)=0, n=0,1,2,\cdots$(3)对于实数序列$\{a_n\}$, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f^{(n)}(x)$在$[0,1]$上一致收敛.

证明 : $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n = 0$.

proof 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f^{(n)}(x)$在$[0,1]$上一致收敛, 所以$\left\{a_n f^{(n)}(x)\right\}$在$[0,1]$上一致收敛于0, 也就是

$\forall\varepsilon>0$, 存在$N>0$, 当$n>N$时, 对任意的$x\in[0,1]$, 有$\left|a_n f^{(n)}(x)\right|<\varepsilon$.

另外, 因为$f(x)\not\equiv 0$且$f(0)=0$, 所以存在$x_0\in(0,1]$, 使得$f(x_0)\ne 0$.

根据泰勒定理, 对任意的正整数n, 存在相应的$\xi_n\in(0,x_0)$, 使得

$f(x_0) = f(0) + f'(0)x_0 + \cdots + \dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x_0^{n-1} + \dfrac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}x_0^n = \dfrac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}x_0^n$.

因此, 当$n>N$时, 有$|n!a_n f(x_0)| = \left|a_n f^{(n)}(\xi_n)x_0^n\right| \le \left|a_n f^{(n)}(\xi_n)\right| < \varepsilon$.也就是$|n!a_n| < \dfrac{\varepsilon}{|f(x_0)|}$, 这说明$\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n = 0$.

✍ **exercise 2.22**

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是一个收敛的正项级数, 令$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n|\sin nx|$

已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上满足利普希茨条件, 即存在常数$L>0$, 使得对任意的$x,y\in(-\infty,+\infty)$, 均有$|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$

证明 : 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$收敛.

proof $\forall x\ne 0$, 有$f(x)=|f(x)-f(0)|\le L|x|$

进而对任意的正整数n, 有$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k|\sin kx| \le f(x) \le L|x|$那么

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\left|\dfrac{\sin kx}{x}\right| \le L$, 现在令$x\to 0$, 便有$\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k \le L$即正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$的部分和有上界, 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$收敛.

✍ **exercise 2.23**

proof

✍ **exercise 2.24**

求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ 的条件收敛域, 绝对收敛域, 以及一致收敛域.

proof 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$

由于$\forall x$给定此时我们有 $\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\le\frac{|x|}{n^2}$.其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2}$ 在$\mathbb{R}$上收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$ 在$\mathbb{R}$上绝对收敛.

另外, 对于$\forall$有限区间 $[a,b]$, 存在正数$M>0$, 使得 $[a,b]\subseteq[-M,M]$

对任意的正整数n及$x\in[-M,M]$ 使得 $\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\le\frac{M}{n^2}$ 其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛

由优级数判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$ 在 $[-M,M]$上一致收敛, 自然在 $[a,b]$上也一致收敛.

最后, 取$\varepsilon_0=\frac{1}{5}$, 对任意的正整数$N$, 取$m_0=N+1, n_0=2m_0$, 有$n_0>m_0>N$, 取$x_0=m_0\in(-\infty,+\infty)$, 那么

$$\left|\frac{x_0}{(m_0+1)^2+x_0^2}+\frac{x_0}{(m_0+2)^2+x_0^2}+\cdots+\frac{x_0}{n_0^2+x_0^2}\right|=\frac{m_0}{(m_0+1)^2+m_0^2}+\frac{m_0}{(m_0+2)^2+m_0^2}+\cdots+\frac{m_0}{(2m_0)^2+m_0^2}$$
$$\ge m_0\cdot\frac{m_0}{(2m_0)^2+m_0^2}=\frac{1}{5}=\varepsilon_0.$$

由柯西准则可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{x^2+n^2}$

由于$\forall x$给定对于级数 $\left|\frac{n(-1)^n}{x^2+n^2}\right|=\frac{n}{x^2+n^2}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$ 由比较原则可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n(-1)^n}{x^2+n^2}\right|$ 在$\mathbb{R}$上处处发散.

另外, 明显 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛 (故关于x是一致收敛) .

同时 $\left\{\frac{n^2}{x^2+n^2}\right\}$ 关于n单调递增, 且对任意的正整数n及$x\in\mathbb{R}$, 还有$0<\frac{n^2}{x^2+n^2}\le 1$

由阿贝尔判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{x^2+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{n^2}{x^2+n^2}\right)$ 关于$x\in(-\infty,+\infty)$收敛 (条件收敛) 且一致收敛.

综上可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{x^2+n^2}$ 的

条件收敛域为$\mathbb{R}$, 绝对收敛域为$\emptyset$, 一致收敛域为任取的有限区间 $[a,b]$.

✍ **exercise 2.25**

证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $[0,1)$上一致收敛.

proof 任取$a\in(0,1)$, 下面分区间 $[0,a]$与 $[a,1)$进行讨论 :

(i) 当$x\in[0,a]$时, 有 $\left|(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx\right|\le\frac{a^n}{1-a^{2n}}\sim a^n(n\to\infty)$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\frac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$ 在 $[0,a]$上一致收敛.

(ii) 当$x\in[a,1)$时, 由可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和在 $[a,1)$上一致有界.

有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right| \le \dfrac{1}{\sin\dfrac{a}{2}}$.

(因为如果不分段直接使用狄利克雷判别法就会发现当$a\to 0$时是无界的因而不是一致有界)

明显 $\left\{\dfrac{x^n}{1-x^{2n}}(1-x)\right\}$ 关于n单调递减 (分子递减, 分母递增)

另外, 对任意的$x\in[a,1)$, 由于

$0<(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^{2n}} = \dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}} < \dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}} < \dfrac{x^n}{nx^{n-1}} < \dfrac{1}{n}$.关于$x\in[a,1)$一致收敛于零

于是由狄利克雷判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$在 $[a,1)$上一致收敛.

综合 $(i),(ii)$可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\dfrac{x^n}{1-x^{2n}}\sin nx$在 $[0,1)$上一致收敛.

exercise 2.26

给定n为正整数, 设函数$T_n(x)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$, 其中$\alpha_0,\alpha_k,\beta_k$为常数, $1\le k\le n$.

证明: $\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|T_n'(x)\right| \le n^2\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}|T_n(x)|$.

e

proof 首先对任意不全为零的$a,b\in\mathbb{R}$及$t\in[-\pi,\pi]$, 设 $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 那么$a\cos t+b\sin t=\sqrt{a^2+b^2}\sin(t+\varphi)$.

由此可知$a\cos t+b\sin t$在 $[-\pi,\pi]$上的最小值与最大值分别 $-\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, 这对于$a=b=0$也成立.

特别地$n=1$, 有

$\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}|T_1(x)| = \max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|\dfrac{\alpha_0}{2}+\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x\right| = \dfrac{|\alpha_0|}{2}+\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}$;

$\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|T_1'(x)\right| = \max\limits_{-\pi\le x\le\pi}|-\alpha_1\sin x+\beta_1\cos x| = \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}$.

因此 $\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|T_1'(x)\right| \le \max\limits_{-\pi\le x\le\pi}|T_1(x)|$.

而当$n\ge 2$, 结合柯西不等式和帕塞瓦尔等式, 有

$$
\begin{aligned}
\left|T_n'(x)\right| &\le \sum_{k=1}^{n}|-k\alpha_k\sin kx+k\beta_k\cos kx| \le \sum_{k=1}^{n}k\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}\\
&\underbrace{\le n\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2} \le n\sqrt{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{柯西不等式}}\\
&\le n\sqrt{n}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le n\sqrt{n}\left(2\max_{-\pi\le x\le\pi}T_n^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= n\sqrt{2n}\max_{-\pi\le x\le\pi}|T_n(x)|\\
&\le n^2\max_{-\pi\le x\le\pi}|T_n(x)|.
\end{aligned}
$$

因此对任意的正整数n, 均有 $\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left|T_n'(x)\right| \le n^2\max\limits_{-\pi\le x\le\pi}|T_n(x)|$.

✍ **exercise 2.27**

proof

✍ **exercise 2.28**

proof

✍ **exercise 2.29**

proof

✍ **exercise 2.30**

proof

✍ **exercise 2.31**

proof

✍ **exercise 2.32**

proof

第 3 章 数列与极限理论习题

exercise 3.1

设$x_n \to a$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$是什么?若存在 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$具有什么性质

proof

应设$x_n \neq 0(n=1,2,\cdots)$.若$a\neq 0$, 则显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\dfrac{a}{a}=1.$

若$a=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能不存在, 例如, 若 $\{x_n\}$ 为 : $1,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^2},\dfrac{1}{2^3},\dfrac{1}{2^3},\cdots$ 则$x_n\to 0$, 但显然$\dfrac{x_{2m}}{x_{2m-1}}\to 1,\dfrac{x_{2m+1}}{x_{2m}}\to\dfrac{1}{2}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$不存在.

下面我们证明, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在, 设为$b$, 则必有 $-1\leqslant b\leqslant 1$

用反证法.若$|b|>1$.取r, 使$|b|>r>1$.知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=|b|$.于是, 存在正整数$N$, 使当$n\geqslant N$时, 恒有$\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}>r$.从而

当$n>N$时, $|x_n|=|x_N|\cdot\left|\dfrac{x_{N+1}}{x_N}\right|\cdot\left|\dfrac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\right|\cdots\left|\dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right|>|x_N|\cdot r^{n-N}$, 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$

此与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$矛盾, 故必有 $-1\leqslant b\leqslant 1$.

总结起来, 若$a\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$; 若$a=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$可能存在也可能不存在, 当存在时, 它必属于 $[-1,1]$.

exercise 3.2

设已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 问 : 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)=0$?又问 : 反之如何?

proof 若已知 $|a_1\cdots a_n|=|a_1\cdots a_N|\,|a_{N+1}\cdots a_n|<|a_1\cdots a_N|\,\varepsilon^{n-N}\to 0$

但反之不对, 例如$a_n=\dfrac{n}{n+1}$此时 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$但是$a_n\to 1\,(n\to\infty)$

exercise 3.3

若数列 $\{a_n\}$ 收玫, 则在此数列中一定有最大数或最小数, 但不一定同时有最大数和最小数.

proof 设此数列的极限为a.若此数列的每一项等于a, 则不必再说.

否则, 设数列的某一项$a_m\neq a$.若有$a_m>a$, 则可取$\varepsilon=a_m-a$.从收玫数列的定义知道,

$\exists N$, 使得当$n>N$时, $|a_n-a|<\varepsilon$.由于有$a_m-a=\varepsilon$, 显然$m\leqslant N$.

可见, 在 $[a_m,+\infty)$ 中至少含有 $\{a_n\}$ 中的一项a_m, 但至多含有该数列中的N项.

令$M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$, 则在$n>N$时, 有$a_n<a+\varepsilon=a+(a_m-a)=a_m\leqslant M$, 可见$M$是数列 $\{a_n\}$ 的最大数.

同样可证在$a_m<a$时, 数列 $\{a_n\}$ 有最小数.

很容易举出不同时存在最大数和最小数的收玫数列的例子.例如数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 收玫于0, 它有最大数, 但没有最小数.

exercise 3.4 数列 $\{a_n\}$ 没有最大值, 没有最小值, 证明 : $\{a_n\}$ 发散.

proof 反证法.若 $\{a_n\}$ 收玫, 设其极限为a, 由于 $\{a_n\}$ 没有最大值和最小值, 所以必定存在正整数k, 使得$a_k\neq a$.

若$a_k>a$, 那么由保号性, 存在正整数$N>k$, 当$n>N$时, 有$a_n<a_k$.

再设$a_s=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$, 显然$a_k\leq a_s$, 因此对任意的正整数$n$, 当$n\leq N$时, 有$a_n\leq a_s$; 当$n>N$时, 有$a_n<a_k\leq a_s$.

也就是说a_s为$\{a_n\}$的最大值,这与已知矛盾.同理可证:若$a_k < a$,则$\{a_n\}$必定存在最小值,这依旧与已知矛盾.综上可知结论成立.

exercise 3.5

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a_k = a$.

proof 证明在特普利茨定理中取$t_{nk} = \binom{n}{k}/2^n$即可.

proof 利用$2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$,可以估计如下:

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k - a\right| = \left|\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - a)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a_k - a|.$$

$\forall\varepsilon > 0$,存在N,当$k > N$时成立$|a_k - a| < \varepsilon$.

作分拆:$\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k - a| + \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k - a|$.

对其中的第二部分的估计是容易的:$\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k - a| < \varepsilon\cdot\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k} < \varepsilon$.

对第一部分:$\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k - a|$

一方面我们知道$|a_k - a|$有界M,

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}|a_k - a| \leqslant \underbrace{M\frac{C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^N}{2^n} \leqslant M\frac{(N+1)\,C_n^N}{2^n}}_{\text{利用二项式系数的单调性}} = M\frac{(N+1)\,n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-N+1)}{2^n N!} \leqslant M_1\cdot\frac{n^N}{2^n}$$

显然当$n\to\infty$时是趋于零的

exercise 3.6

设$\{a_n\}$是一个正数数列.如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n} = +\infty$,那么$\{a_n\}$必为无界数列.

proof 证明因为存在$N > 0$使得当$n \geqslant N$时有$(a_{n+1} + a_{n+2})/a_n > 4$,或者$a_{n+1} + a_{n+2} > 4a_n$

所以a_{n+1}和a_{n+2}中至少有一个大于$2a_n$,于是$N+1, N+2, ..., N+2m$中至少有一个数$N+i_m$使得$a_{N+i_m} > 2^m a_N$

由此可见$\{a_n\}$是无界的.

exercise 3.7

1.设$c > 0, a_1 = c/2, a_{n+1} = c/2 + a_n^2/2 (n = 1, 2, \cdots)$.证明:$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 1-\sqrt{1-c}, & 0 < c \leqslant 1, \\ +\infty, & c > 1. \end{cases}$

proof

当$c > 1$时$a_{n+1} = \frac{c + a_n^2}{2} \geqslant \sqrt{c}a_n \geqslant c^{n/2}a_0 \to \infty (n\to\infty)$.

当$0 < c \leqslant 1$时,可以验证$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant 1-\sqrt{1-c}$.

记$f(x) = c/2 + x^2/2$,那么$0 \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 1-\sqrt{1-c}$蕴含着$f(0) \leqslant f(a_{n-1}) \leqslant f(a_n) \leqslant f(1-\sqrt{1-c})$

亦即$0 \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 1-\sqrt{1-c}$.

因此普遍有$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 1-\sqrt{1-c}$, 从而由单调有界原理知$\{a_n\}$收玫.
设其极限为A, 那么$A = c/2 + A^2/2$, 因此$A = 1-\sqrt{1-c} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

exercise 3.8

2.设数列$\{u_n\}$定义如下：$u_1 = b, \quad u_{n+1} = u_n^2 + (1-2a)u_n + a^2 \quad (n = 1, 2, \cdots)$.
问a, b为何值时$\{u_n\}$收玫?极限值是什么?

proof

令$v_n = u_n - a$, 那么$v_1 = b - a$而$v_{n+1} = v_n^2 + v_n$.
易见$\{v_n\}$若收玫则必收玫到0, 于是由$\{v_n\}$递增知$v_n \leqslant 0$
从而由$v_2 = v_1^2 + v_1 \leqslant 0$得到$-1 \leqslant b - a \leqslant 0$.
当$-1 \leqslant b - a = v_1 \leqslant 0$时, 因为$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$蕴含着$-1 \leqslant v_n^2 + v_n = v_{n+1} \leqslant 0$
所以普遍有$-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.于是由单调有界原理知$\{v_n\}$收玫.
因此当$-1 \leqslant b - a \leqslant 0$时$\{v_n\}$收敛, 也即$\{u_n\}$收玫, 且$\{u_n\}$的极限是$a$.

exercise 3.9

3.设$A > 0, 0 < y_0 < A^{-1}$, 且$y_{n+1} = y_n(2 - Ay_n) \quad (n = 0, 1, \cdots)$.证明：$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A^{-1}$.

proof 设$f(x) = x(2-Ax)$, 那么$f(x)$在$[0, 1/A]$上是递增的, 所以$f(0) < f(y_0) < f(1/A)$, 即$0 < y_1 < 1/A$.
又$y_1 = y_0 + y_0(1 - Ay_0) > y_0$, 所以$0 < y_0 < y_1 < 1/A$.
另一方面, 由于$0 < y_{n-1} < y_n < 1/A$蕴含着$f(0) < f(y_{n-1}) < f(y_n) < f(1/A)$, 亦即$0 < y_n < y_{n+1} < 1/A$
所以普遍有$0 < y_n < y_{n+1} < 1/A$, 于是根据单调有界原理知$\{y_n\}$收玫.
设其极限为Y, 那么有$Y = Y(2 - AY)$.显然$Y \neq 0$, 所以$Y = 1/A = \lim_{n\to\infty} y_n$.

exercise 3.10

求证：数列$\left\{(1+1/n)^{n+1}\right\}$是严格递减数列.

proof 我们来证明$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}^{n+1}$数列严格递增即可
(提示：$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 1 \cdot \underbrace{\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \cdots \left(\dfrac{n}{n+1}\right)}_{n+1\text{个}} < \left(\dfrac{1+(n+1)n/(n+1)}{n+2}\right)^{n+2}$).

exercise 3.11

设$a_n > 0$.求证：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\dfrac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \geqslant 1$.

proof 若不然, 存在$N > 0$使得当$n \geqslant N$时$n\left((1+a_{n+1})/a_n - 1\right) < 1$, 或者$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{a_n}{n} - \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$
从而$\dfrac{1}{N+1} + \dfrac{1}{N+2} + \cdots + \dfrac{1}{N+p} < \dfrac{a_N}{N} - \dfrac{a_{N+p}}{N+p} < \dfrac{a_N}{N}$.
当$p \to \infty$时上式左边是一个无穷大量而右边是一个有限数, 矛盾!

✍ **exercise 3.12**

1.设$0<x_1<1/q(0<q\leqslant 1)$, 并且$x_{n+1}=x_n\left(1-qx_n\right)\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$.求证：$\lim_{n\to\infty} nx_n=1/q$.

proof 1.证明因为$0<x_n<1/q$蕴含了$0<x_{n+1}<1/q$而$0<x_1<1/q$, 所以普遍有$0<x_n<1/q$.
又$x_{n+1}-x_n=-qx_n^2<0$, 所以根据单调有界原理知$\{x_n\}$收玫.
设其极限是A, 那么有$A=A(1-qA)$, 所以$A=0$, 从而$\{1/x_n\}$是严格递增是无穷大量.
根据斯托尔兹定理, $\lim_{n\to\infty} nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/(x_n\left(1-qx_n\right))-1/x_n}=\frac{1}{q}$

✍ **exercise 3.13**

2.设数列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty} a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$.求证：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$.

proof 2.证明记$S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$.假设$\{S_n\}$收玫, 那么$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, 从而$\lim_{n\to\infty} a_nS_n=0$, 矛盾!
因此$\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty$, 进而$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_nS_n\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n}=0$.
根据斯托尔兹定理,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} na_n^3&=\lim_{n\to\infty}\left(a_nS_n\right)^3\frac{n}{S_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{S_n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_n^3-S_{n-1}^3}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(S_n-S_{n-1}\right)\left(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n^2\left(S_n^2+S_n\left(S_n-a_n^2\right)+\left(S_n-a_n^2\right)^2\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\left(a_nS_n\right)^2-3a_n^3\cdot a_nS_n+a_n^6}\\
&=\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

因此$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$.

✍ **exercise 3.14** 3.令$x_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}\quad(n=1,2,3,\cdots)$.求极限$\lim_{n\to\infty} x_n$.

proof 3.解利用斯托尔兹定理,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln n!-2(\ln 0!+\ln 1!+\cdots+\ln n!)}{n^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\ln(n+1)!-(n+1)\ln n!-2\ln n!}{2n+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!}{2n+1}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)-n\ln n-\ln(n+1)}{2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(1+1/n)}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

✍ **exercise 3.15**

设a和b是两个大于1的常数, 函数$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$在$x=0$的邻域内有界, 并且对一切$x\in\mathrm{R}$, 有$f(ax)=bf(x)$.
求证：$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

proof 由$f(0)=bf(0)$知$f(0)=0$.具体地设在$(-\delta,\delta)$上有$|f(x)|<M$.对任意的$\varepsilon>0$, 取$N=\lceil\log_b(M/\varepsilon)\rceil$

那么当$x \in (-\delta/a^N, \delta/a^N)$时就有$|f(x)| = \left|\frac{f(a^N x)}{b^N}\right| < \frac{M}{b^N} < \varepsilon$

因此$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

exercise 3.16

设f和g是两个周期函数,且满足$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 0$.证明:$f = g$.

proof 设f和g的周期分别是T_1和T_2,那么有$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-(f(x+nT_1)-g(x+nT_1))) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x+nT_1)$

以及

$g(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(g(x)+f(x+nT_2)-g(x+nT_2)) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x+nT_2)$

因此$f(x)-g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x+nT_1) - f(x+nT_2) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x+n(T_1+T_2)) - f(x+n(T_1+T_2)) = 0$,亦即$f = g$.

exercise 3.17

设$x_n > 0$.证明:

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant \mathrm{e}$

(2) 上式中的 e 是最佳常数.

proof (1)若不然,存在$N>0$使得当$n \geqslant N$时$\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n < \mathrm{e}$,或者$-1 < n\ln\frac{x_n}{x_1+x_{n+1}} \leqslant n\left(\frac{x_n}{x_1+x_{n+1}}-1\right)$

整理即$\frac{x_1}{n} < \frac{x_n}{n-1} - \frac{x_{n+1}}{n}$,于是$\frac{x_1}{N} + \frac{x_1}{N+1} + \cdots + \frac{x_1}{N+p-1} < \frac{x_N}{N_1} - \frac{x_{N+p}}{N+p-1} < \frac{x_N}{N}$.

当$p\to\infty$时上是左边是无穷大量而右边是一个有限数矛盾!因此$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant \mathrm{e}$.

(2)特别地取$x_n = n-1+\varepsilon$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n = \mathrm{e}^{1+\varepsilon}$.令$\varepsilon\to 0^+$便知 e 是最佳的.s

exercise 3.18

设$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$,且$f(x)-f(x/2) = o(x)(x\to 0)$.求证:$f(x) = o(x) \quad (x\to 0)$.

proof 由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0$与$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$我们有如下式子成立

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta, 0<|x|<\delta$时,有$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right| < \varepsilon$

在$0<|x|<\delta$任取一点x_0则

$\left|f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| < \varepsilon|x_0| \quad \left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^2}\right)\right| < \varepsilon\left|\frac{x_0}{2}\right| \cdots\cdots \quad \left|f\left(\frac{x_0}{2^{m-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right| < \varepsilon\cdot\frac{|x_0|}{2^{m-1}}$

此时又由已知$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$故对于上述的$\varepsilon\cdot|x_0|$, $\exists M>0$, $m>M$时,有$\left|f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right| < \varepsilon|x_0|$

可得

$\left|f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| + \ldots + \left|f\left(\frac{x_0}{2^{m-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right| < \varepsilon x_0\left(1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}\right) < 2\varepsilon|x_0|$

再由

$|f(x_0)| < \left|f(x_0)-f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| + \cdots + \left|f\left(\frac{x_0}{2^{m-1}}\right)-f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x_0}{2^m}\right)\right| < \varepsilon|x_0| + 2\varepsilon|x_0| = 3\varepsilon|x_0|$

于是我们得到了$\left|\frac{f(x_0)}{x_0}\right| < 3\varepsilon$

即$\forall\varepsilon>0, \exists\delta, \forall x_0\in\{x|0<|x|<\delta\}$时,有$\left|\frac{f(x_0)}{x_0}\right| < 3\varepsilon$即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$,故$f(x) = o(x) \quad (x\to 0)$

✍ **exercise 3.19**

证明：若 $\{a_n\}$ 为递增 (递减) 有界数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ $(\inf\{a_n\})$.又问逆命题成立否?

proof 反例：$a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$

✍ **exercise 3.20**

设函数f只有可去间断点, 又令$g(x) = \lim\limits_{t\to x} f(t)$.证明：$g$是连续函数.

proof 任取$x_0 \in \mathbb{R}$, 那么对任意的ε, 存在$\delta > 0$使得当$0 < |t - x_0| < \delta$时有 $|f(t) - g(x_0)| < \varepsilon/2$

于是当$0 < |x - x_0| < \delta/2$时有 $|g(x) - g(x_0)| = \left|\lim\limits_{t\to x} f(t) - g(x_0)\right| = \lim\limits_{t\to x} |f(t) - g(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, 即g在x_0处连续, 进而g是连续函数.

✍ **exercise 3.21**

设函数f在R上递增 (或递减).若定义$F(x) = f(x+)$.试证明：F在R上右连续.

proof 任取$x_0 \in \mathbb{R}$, 那么对任意的ε, 存在$\delta > 0$使得当$x_0 < t < x_0 + \delta$时有 $|f(t) - F(x_0)| < \varepsilon/2$

于是当$x_0 < x < x_0 + \delta/2$时有 $|F(x) - F(x_0)| = \left|\lim\limits_{t\to x^+} f(t) - F(x_0)\right| = \lim\limits_{t\to x^+} |f(t) - F(x_0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to x^+} F(x) = F(x_0)$, 即F在x_0处右连续, 进而F在$\mathbb{R}$上右连续.

✍ **exercise 3.22**

设$f \in C[0,1]$且$f(0) = f(1)$.求证：对任何$n \in \mathrm{N}^*$, 存在$x_n \in [0,1]$, 使得$f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.

proof 设$F(x) = f(x+1/n) - f(x)$, 那么$0 = f(1) - f(0) = F\left(\dfrac{n-1}{n}\right) + F\left(\dfrac{n-2}{n}\right) + \cdots + F(0)$

所以不可能所有的$F(i/n)$都是正的, 或者都是负的.因此存在i和j使得$F(i/n)F(j/n) \leqslant 0$

进而利用F的连续性就知道存在x_n使得$F(x_n) = 0$, 亦即$f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.

✍ **exercise 3.23**

设$f \in C(\mathrm{R})$且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, 又设$f$的最小值$f(a) < a$.求证：$f \circ f$至少在两个点上取到最小值.

proof 证明因为$f(a) < a$而 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, 所以利用连续函数的介值性知存在$\xi_1 < a$和$\xi_2 > a$使得$f(\xi_1) = f(\xi_2) = a$

于是ξ_1和ξ_2就是$f \circ f$的两个最小值点.

✍ **exercise 3.24**

设函数$f : [a,b] \to \mathrm{R}$在有理点上取无理数值, 在无理点上取有理数值.证明：f不是 $[a,b]$上的连续函数.

proof 因为$f([a,b]\cap\mathbb{Q})$和$f([a,b]\backslash\mathbb{Q})$都是可数集,所以$f([a,b])$也是可数集,由此可见若$f$是连续函数,那么$f$只能是常值的.但是$f$既能取到有理数,也能取到无理数,所以$f$不是连续函数.

exercise 3.25

设$f,g\in C[a,b]$.如果存在$x_n\in[a,b]$,使得$g(x_n)=f(x_{n+1})\ (n=1,2,\cdots)$,则必存在$x_0\in[a,b]$,使得$f(x_0)=g(x_0)$.

proof 设$F(x)=f(x)-g(x)$,那么$F(x_n)=f(x_n)-f(x_{n+1})$

于是根据连续函数的介值性知存在$\xi_n\in[a,b]$使得$F(\xi_n)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}F(x_n)=\dfrac{f(x_1)-f(x_{n+1})}{n}$.

取$\{\xi_n\}$的一个收敛子列$\{\xi_{n_k}\}$,其极限设为x_0.

那么利用f的有界性知$F(x_0)=\lim\limits_{k\to\infty}F\left(\xi_{n_k}\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(x_1)-f\left(x_{n_k+1}\right)}{n_k}=0$,所以$f(x_0)=g(x_0)$.

exercise 3.26

证明$u_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}\to 0$

proof 利用$2n=\dfrac{(2n-1)+(2n+1)}{2}>\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

$$\therefore u_n=\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdots 2n}<\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdots(2n-1)}{\sqrt{1\cdot 3}\sqrt{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdots\sqrt{(2n-1)\cdot(2n+1)}}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

exercise 3.27

求$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$

proof 我们有 $\mathrm{e}=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{\theta_n}{n!n}$ 其中$\dfrac{n}{n+1}<\theta_n<1$

$n\sin(2\pi n!\mathrm{e})=n\sin\left(2\pi\dfrac{\theta_n}{n}\right)$,可得$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!\mathrm{e})=2\pi$

exercise 3.28

记$H_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,用$k_n$表示使得$H_k\geqslant n$的最小下标.证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k_{n+1}}{k_n}=\mathrm{e}$.

proof 法一:

对任意$\varepsilon>0$,当k充分大时,有$\gamma-\varepsilon<S_k-\ln k<\gamma+\varepsilon$

故而

$n\leqslant S_{K_n}<\ln K_n+\gamma+\varepsilon$

$n>S_{K_n-1}>\ln(K_n-1)+\gamma-\varepsilon$

从而对充分大的n,成立$e^{n-\gamma-\varepsilon}<K_n<e^{n-\gamma+\varepsilon}+1$

$\Longrightarrow\dfrac{e^{n+1-\gamma-\varepsilon}}{e^{n-\gamma+\varepsilon}+1}<\dfrac{K_{n+1}}{K_n}<\dfrac{e^{n+1-\gamma+\varepsilon}+1}{e^{n-\gamma-\varepsilon}}$

$\Longrightarrow\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}\leqslant e^{1+2\varepsilon}$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}\geqslant e^{1-2\varepsilon}$

令$\varepsilon\to 0^+$,新有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{K_{n+1}}{K_n}=c$.

法二：

因为$H_{k_n}-\frac{1}{k_n}=H_{k_n-1}<n\leqslant H_{k_n}$, 所以$n\leqslant H_{k_n}<n+\frac{1}{k_n}$.

同样地也有$n+1\leqslant H_{k_{n+1}}<n+1+\frac{1}{k_{n+1}}$, 因此$1-\frac{1}{k_n}<H_{k_{n+1}}-H_{k_n}<1+\frac{1}{k_{n+1}}$.

由此可见$1=\lim\limits_{n\to\infty}H_{k_{n+1}}-H_{k_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln k_{n+1}+\gamma+\varepsilon_{k_{n+1}}-\left(\ln k_n+\gamma+\varepsilon_{k_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{k_{n+1}}{k_n}$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}k_{n+1}/k_n=\mathrm{e}$.

exercise 3.29

设a,b,c是三个给定的实数.令$a_1=a,b_1=b,c_1=c$

并以递推公式定义$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},n\in\mathrm{N}_+$.求这三个数列的极限.

proof 由题设得$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a_0+b_0+c_0=a+b+c$

令$L=a+b+c$.再由

$$a_n-b_n=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}-\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}=-\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}=(-1)^2\frac{a_{n-2}-b_{n-2}}{2^2}=\cdots=(-1)^n\frac{a_0-b_0}{2^n}$$

得$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n(a_0-b_0)}{2^n}=0$.

同理$\lim\limits_{n\to+\infty}(c_n-a_n)=0$.于是

$$a_n=\frac{1}{3}\left[(a_n+b_n+c_n)-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)\right]=\frac{1}{3}\left[L-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{1}{3}[L-0+0]=\frac{L}{3}=\frac{a+b+c}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}c_n=\lim_{n\to+\infty}\left[a_n+(c_n-a_n)\right]=\frac{L}{3}+0=\frac{L}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}\left[a_n-(a_n-b_n)\right]=\frac{L}{3}-0=\frac{L}{3}$$

这就证得$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\frac{1}{3}(a+b+c)$

exercise 3.30

设$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)=1$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$.

proof 记$S_n=\sum\limits_{k=1}^n a_k^2$, 则$S_n$是递增的非负序列且从某项开始为正, 所以$a_n$也从某项开始为正

如果S_n收敛那么$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)=1$推出$a_n$也有一个非零正极限, 则与$S_n$收敛矛盾

因而$S_n\to+\infty,a_n\to 0$

从$\frac{S_n}{S_{n-1}}=1+\frac{a_n^2}{S_{n-1}}\to 1+0=1$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n^3-S_{n-1}^3\right)=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)\left(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2\right)=\lim_{n\to\infty}a_n^2\left(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2\right)=\lim_{n\to\infty}3a_n^2S_n^2=3$$

$$3=\lim_{n\to\infty}\left(S_n^3-S_{n-1}^3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(S_k^3-S_{k-1}^3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3-S_1^3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3}{n}$$

由上面两个式即有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$.

exercise 3.31

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, 并且存在常数$K$, 使得$|y_1|+|y_2|+\cdots+|y_n|\leqslant K$对每个$n$成立.

令$z_n=x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1,n\in\mathrm{N}_+$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$.

(从本题的条件已可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.但是可以举出例子说明仅仅有条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ 不能得到 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1) = 0$.)

proof 易知 $\sum\limits_{i=1}^{n}|y_n|$收敛,从而$y_n \to 0$.

$\forall\varepsilon > 0$,那么由$x_n \to 0$可以设 $|x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2K}(n > N)$另可以设$x_n$有界$M$

然后取正整数N'满足当$n > N'$时 $|y_n| < \varepsilon$当$n > 2\max\{N, N'\}$ 时,有

$$|z_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k||y_{n+1-k}| = \sum_{k=1}^{N}|x_k||y_{n+1-k}| + \sum_{k=N+1}^{n}|x_k||y_{n+1-k}| < MN\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2K}\cdot K$$

仅仅有条件$x_n, y_n \to 0$,不一定成立.如取$x_n = y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

此时$z_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k+n+1-k} = \dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1$从而结论不成立.

若已知设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$那么$z_n \to A\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$

exercise 3.32

设函数f在$(0,+\infty)$上单调增加,且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$.

证明:对每个$a > 0$,成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

proof 由于$f(x)$单调递增,所以$f(x) < 0$或者存在$M > 0$,使得$x > M$时,$f(x) > 0$.

(i)当$a = 1$时,结论显然成立.

(ii)当$a > 1$时,存在非负整数k,使得$2^k \leq a < 2^{k+1}$,于是$f\left(2^kx\right) \leq f(ax) \leq f\left(2^{k+1}x\right)$.

(a)若$f(x) < 0$,则有$\dfrac{f\left(2^{k+1}x\right)}{f(x)} \leq \dfrac{f(ax)}{f(x)} \leq \dfrac{f\left(2^kx\right)}{f(x)}$由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$,所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(2^{k+1}x\right)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(2^{k+1}x\right)}{f\left(2^kx\right)}\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(2^kx\right)}{f\left(2^{k-1}x\right)}\cdots\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)} = 1.$$

同理 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(2^kx\right)}{f(x)} = 1$,所以由迫敛性可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

(b)若$x > M$时,$f(x) > 0$,此时有$\dfrac{f\left(2^kx\right)}{f(x)} \leq \dfrac{f(ax)}{f(x)} \leq \dfrac{f\left(2^{k+1}x\right)}{f(x)}$.同 (i)仍可证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

(iii)当$0 < a < 1$时,有$\dfrac{1}{a} > 1$,令$u = ax$,结合 (ii)可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(ax)} = \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{a}u\right)}{f(u)} = 1$.进而依旧有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$.

exercise 3.33

柯西方程:$\forall x, y \in \mathbb{R}$有$f(x+y) = f(x) + f(y)$.

此时柯西方程有线性解$f(x) = f(1)x$.条件有:

1.设函数f在$x = 0$处连续 (此时可以证明f在$\mathbb{R}$上连续,进一步若有一点连续未必是0也可推出全局连续)

2.在某个区间上有界

3.f可导

4.f单调

5.在某个有界区间上可积

proof 1.

在方程$f(x+y)=f(x)+f(y)$中令$y=0$, 可知$f(0)=0$.因此有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

除此之外还能发现该函数为奇函数

任取点$x_0\in \mathrm{R}$, 将x写成$x=x_0+\Delta x$, 计算极限

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+f(\Delta x)]=f(x_0)+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(x_0)$

可见f处处连续

由于$f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0$, 可见有$f(-x)=-f(x)$.

因此只需讨论x为正数的情况.

不难知道$f(n)=f(1)n\,(n\in\mathbb{Z})$

再从$f(1)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)$得到$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f(1).\Longrightarrow$ 有$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x)$.令

因此, 等式$f(x)=f(1)x$对一切有理数$x\in\mathbb{Q}$已成立.

最后, 通过有理数列逼近无理数即可就知道$f(x)=f(1)x$对一切实数x成立.

2.例如在$[a,b]$ (不妨设$a,b\in\mathbb{Q}$不然就取内部即可) 上有界, 那么断言$\exists\eta>0$, $f(x)$在$(-\eta,\eta)$上有界 $(\eta\in\mathbb{Q})$

因为f为奇函数所以我们只要证在$(0,\eta)$上有界即可

$\forall x\in(a,b)$有$|f(x)|\leqslant M$; 则此时存在z使得$x=\frac{b-a}{\eta}z+a$

那么$\underbrace{|f(x)|=\left|f\left(\frac{b-a}{\eta}z+a\right)\right|=\left|f(a)+\frac{b-a}{\eta}f(z)\right|}_{\text{利用1.中的有理数的结果}}\leqslant M\Longrightarrow f(z)\leqslant(M+|f(a)|)\cdot\frac{\eta}{b-a}$

$\Longrightarrow f(x)$在$(-\eta,\eta)$上有界 $(\eta\in\mathbb{Q})$

下面我们来证明f在$(-\eta,\eta)$上有界能够推出在$x=0$处连续

我们有$\forall n\in\mathrm{N}$, 有$f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x)$及$f(0)=0$.

于是, 由方程可得$|f(x)-f(0)|=|f(x)|=\left|f\left(\frac{1}{n}nx\right)\right|=\frac{1}{n}|f(nx)|$.

因$f(x)$在$(-\eta,\eta)$内有界, 即 : $\exists M>0$, 当$-\eta<x<\eta$时有$|f(x)|\leqslant M$.$\forall\varepsilon>0$, 令$n>\frac{M}{\varepsilon}$, 取$\delta=\frac{\eta}{n}$, 则$|x|<\delta$时$|nx|<\eta$.

由知$|f(x)-f(0)|\leqslant\frac{M}{n}<\varepsilon$故$f$在$x=0$处连续再由1.可知

3.若可导完全可以瞬间得到1.

4.显然我们已经有了$f(x)=f(1)x$对于有理数成立, 下面证明对无理数也成立

按f递增 (或递减) 两种情况分别讨论 :

当f递增时, $\forall x>0$($x<0$时类似可证) 取递增的有理数序列$\{c_n\}:c_n<c, c_n\nearrow c$, 则$\{f(c_nx)\}\nearrow$, 且有上界$f(cx)$.

再在不等式$f(c_nx)<f(cx)$里取极限, 得$\lim\limits_{n\to\infty}f(c_nx)=\lim\limits_{n\to\infty}c_nf(x)=cf(x)\leqslant f(cx)$.

同样, 可取有理数列$\{c_n'\}:c_n'>c, c_n'\searrow c$, 可得$cf(x)\geqslant f(cx)$.故$cf(x)=f(cx)(\forall c,x\in\mathrm{R})$.

f递减, 类似可证.

于是$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)$

5.此时因为可积得到有界转化为前面的类型

exercise 3.34

设$f\in C(a,b)$, 极限$f(a^+)$和$f(b^-)$有限.若存在$\xi\in(a,b)$使$f(\xi)\geqslant\max\{f(a^+),f(b^-)\}$

证明f在(a,b)上有最大值.

proof 1.若(a,b)为有限区间.那么可以补充定义来得到

2.若(a,b)不为有限区间,不妨设$(a,b)=(a,+\infty)$设极限$f\left(a^{+}\right)=A$和$f(+\infty)=B$有限

若$\exists\xi$使得$f(\xi)>\max\left\{f\left(a^{+}\right),f(+\infty)\right\}$

极限$f\left(a^{+}\right)=A$和$f(+\infty)=B$有限

这意味着在某个a^{+}邻域与无穷的邻域上就成立$f(x)<\dfrac{f(\xi)+A}{2}<f(\xi)$与$f(x)<\dfrac{f(\xi)+B}{2}<f(\xi)$

不妨设上述的邻域为$(a,a+\delta)$与$(G,+\infty)$故此时最大值将会在$[a+\delta,G]\subset(a,\infty)$中取到

若找不到这样的ξ意味着$\forall x\in(a,+\infty)$都有$f(x)=\max\{A,B\}$

则$f(x)$在$(a,+\infty)$上为常函数显然成立结论

exercise 3.35

若$f\in C[a,+\infty)$,且存在有限极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.证明：$f$在$[a,+\infty)$上至少可以取到最大值或最小值中的一个.

设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

proof 1.若$\exists x_0\ \ st.f\left(x_0\right)>A$那么存在无穷点处的邻域$(G,+\infty)$使得$\forall x\in(G,+\infty)$成立$f(x)<\dfrac{A+f\left(x_0\right)}{2}<f\left(x_0\right)$

那么最大值将会在$[a,G]$上取到

2.同理考虑$\exists x_0\ \ st.f\left(x_0\right)<A$那么可以同理得到最小值

3.若找不到上述的两种x_0这意味着$\forall x\in[a,+\infty)$都有$f(x)=A$故为常函数结论显然

exercise 3.36

若$f\in C(a,b)$,且$f\left(a^{+}\right)=f\left(b^{-}\right)$,证明：$f$在$(a,b)$上至少可以取到最大值或最小值中的一个.

proof 类似于上题

先讨论(a,b)为有限开区间(注意这里的A可以为无穷)

此时,不妨设$A=f\left(a^{+}\right)=f\left(b^{-}\right)$.此时仍然通过是否$\exists x_0\in(a,b)$使得$f\left(x_0\right)>A\ (<A)$

若没有上述的x_0意味着$f(x)$在(a,b)上为常函数A

再讨论(a,b)为无限开区间同理可以讨论

exercise 3.37

设$f\in C(0,+\infty)$,又对每个实数c,方程$f(x)=c$至多只有有限个实根.

试分别给出极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$及$\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)$存在的充分必要条件,并加以证明.

proof 必要性：如果$\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=A$存在,那么存在$\delta\in(0,1)$,使得$|f(x)-A|<1,\forall x\in(0,\delta)$故$f(x)$在$(0,\delta)$上有界.

再由f连续知其在$[\delta,1]$上有界,所以$f(x)$在$(0,1]$上有界

如果$f(x)$在$(0,1]$上有界,设$\overline{\lim\limits_{x\to0^{+}}}f(x)=A,\ \underline{\lim\limits_{x\to0^{+}}}f(x)=B.$ $(A,B$都是有限数$)$

$\forall n\in\mathbb{Z}$都存在x'与x''使得$f\left(x'\right)>\dfrac{A+B}{2}>f\left(x''\right)$

再由介值定理,存在$t\in(0,1)$,使保$f\left(tx'+(1-t)x''\right)=\dfrac{A+B}{2}$

显然然$tx'+(1-t)x''\leqslant\max\left\{x',x''\right\}<\dfrac{1}{n}$.

所以对任意正整数n, 存在$x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$使得$f(x) = \frac{A+B}{2}$但根据条件只有有限个根矛盾

exercise 3.38

证明 : 若函数f在区间$[0, +\infty)$上连续且有界

则对每个给定的λ, 存在一个数列$\{x_n\}$满足要求 : (1) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$; (2) $\lim_{n\to\infty} [f(x_n+\lambda) - f(x_n)] = 0$.

proof 1.若$\lambda = 0$则取$x_n = n$即可

2.若$\lambda \neq 0$我们只需证明如下断言 :

$\forall \varepsilon > 0, \forall M \geqslant 0$, 总存在$x \in [M, +\infty)$使得$|f(x+\lambda) - f(x)| < \varepsilon$

假设断言不成立 : $\exists \varepsilon_0 > 0$和$M_0 \geqslant 0$, 对任何$\forall x \in [M_0, +\infty)$都有$|f(x+\lambda) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$

此时$f(x+\lambda) - f(x)$该函数也在$[0, +\infty)$上连续且有界.

故在$[M_0, +\infty)$上要么$f(x+\lambda) - f(x) \geqslant \varepsilon_0$恒成立要么$f(x+\lambda) - f(x) \leqslant -\varepsilon_0$恒成立

不妨假设在$[M_0, +\infty)$上要么$f(x+\lambda) - f(x) \geqslant \varepsilon_0$恒成立

若此时$\lambda > 0$, 则有

$f(2\lambda + M_0) - f(\lambda + M_0) \geqslant \varepsilon_0 \quad f(3\lambda + M_0) - f(2\lambda + M_0) \geqslant \varepsilon_0 \cdots\cdots f(n\lambda + M_0) - f((n-1)\lambda + M_0) \geqslant \varepsilon_0$

$\Longrightarrow f(n\lambda + M_0) - f(\lambda + M_0) \geqslant n\varepsilon_0$

因此$\lim_{n\to\infty} f(n\lambda + M_0) = +\infty$与有界矛盾

若此时$\lambda < 0$则有

$f(M_0) - f(|\lambda| + M_0) \geqslant \varepsilon_0 \quad f(|\lambda| + M_0) - f(2|\lambda| + M_0) \geqslant \varepsilon_0 \cdots\cdots f((n-1)|\lambda| + M_0) - f(n|\lambda| + M_0) \geqslant \varepsilon_0$

$\Longrightarrow f(M_0) - f(n|\lambda| + M_0) \geqslant n\varepsilon_0$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n|\lambda| + M_0) = -\infty$与有界矛盾

这样断言成立即可取正整数不难得到结论

exercise 3.39

设n为正整数, 函数$f(x)$在$[0, +\infty)$上一致连续, 满足对任意$x > 0$, 都有$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$.

证明 : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

proof 由于$f(x)$在$[0, +\infty)$上一致连续, 所以

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [0, +\infty)$, 只要$|x' - x''| < \delta$, 就有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

现在对$[0, 1]$作分割, 平均分割为$k = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$个小区间, 并设分割点为$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$, 则每个小区间的长度相等且小于$\delta$.

而对任意的$x_i (i = 1, 2, \cdots, k)$, 有$\lim_{n\to\infty} f(x_i + n) = 0$, 于是对上述的$\varepsilon > 0$, 存在$M_i > 0$, 使得当$n > M_i$时, 有$|f(x_i + n)| < \varepsilon$.

现在取$M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_k\}$, 那么当$n > M$时, 就有$|f(x_i + n)| < \varepsilon (i = 1, 2, \cdots, k)$

于是当$x > M$+1时, 取整数$n_x = [x] > M$, 就有$x - n_x \in [0, 1]$, 所以总存在对应的$j (1 \leq j \leq k)$使得$x - n_x \in [x_{j-1}, x_j]$那么$|x - n_x - x_j| < \delta$

从而$|f(x) - f(x_j + n_x)| < \varepsilon$.

进而$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_j + n_x)| + |f(x_j + n_x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

这说明$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

exercise 3.40

设函数$f \in C[a,b]$,定义$M(x)=\max\limits_{a\leqslant y\leqslant x}\{f(y)\}, m(x)=\min\limits_{a\leqslant y\leqslant x}\{f(y)\}$.证明:函数$M,m\in C[a,b]$.

proof 只就$M(x)$进行证明,根据连续函数在闭区间上必达上、下确界的性质,$M(x)$在$[a,b]$上处处有定义.

又因上确界随取值区间扩大而增大,知$M(x)\nearrow$,故每点处的单侧极限存在,$\forall x_0\in[a,b]$我们只要证明下面等式成立即可:

$M(x_0-0)=M(x_0)=M(x_0+0)$

由$M(x)$单调性,我们有$M(x_0-0)\leqslant M(x_0)$.又因$\forall x\in[a,x_0]$有$f(x)\leqslant \sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x} f(t)=M(x)\leqslant M(x_0-0)$

所以$M(x_0)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x_0} f(t)\leqslant M(x_0-0)$

故左边等式成立.

下面用反证法证右边之等式.

因$M(x)$单调,$M(x_0)\leqslant M(x_0+0)$.假若$M(x_0+0)>M(x_0)$,则可取充分小的$\varepsilon_0>0$,使得$M(x_0+0)>M(x_0)+\varepsilon_0$.

于是$\forall x>x_0$有$\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x} f(t)=M(x)\geqslant M(x_0+0)>M(x_0)+\varepsilon_0$

由确界定义$\exists t\in[a,x]$,使得$f(t)>M(x_0)+\varepsilon_0\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0$但在$[a,x_0]$上$f(x)\leqslant M(x_0)$,所以的$t\in(x_0,x]$.

这便与$f(x)$的连续性矛盾.证毕

exercise 3.41

设f在区间$[0,1]$上满足以下条件:(1)$f(0)>0, f(1)<0$;(2)存在一个函数$g\in C[0,1]$,使得$f+g$在$[0,1]$上单调增加.

证明:f在$(0,1)$中有零点.

proof 设$A=\{x\in(0,1)\mid f(x)>0\}, c=\sup A$.

假设$f(c)>0$,则$c<1$,由于$c=\sup A$,故当$x>c$时有$f(x)\leqslant 0$,且$f(x)+g(x)$递增.

所以对$\forall x>c$,有$0\geqslant f(x)=f(x)+g(x)-g(x)\geqslant \rho(c)+g(c)-g(x)$

令$x\to c^+$,由上式得$0\geqslant f(c)$.矛盾.所以假设不成立,即$f(c)\leqslant 0$.

假设$f(c)<0$,则$c>0, c\notin A$由于c是A的上确界,故存在严格递增数列$\{x_n\}\subset A$使得$x_n\to c$

注意到$0<f(x_n)=f(x_n)+g(x_n)-g(x_n)\leqslant f(c)+g(c)-g(x_n)$

令$n\to\infty$,得$0\leqslant f(c)$,矛盾.所以假设不成立,即$f(c)\geqslant 0$.

综上可得$f(c)=0$.又因为$f(0)>0, f(1)<0$,故$c\in(0,1)$,证毕

exercise 3.42

proof

exercise 3.43

proof

第 4 章 一元微分学习题

✍ **exercise 4.1**

设f在区间 $(0,1]$上可导, $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)=A$.证明：$f$在区间 $(0,1]$上一致连续.
该问题可以推广到设f在区间 $(0,1]$上可导, $\lim\limits_{x\to0^+}x^rf'(x)=A, r\in(0,1)$ 证明：f在区间 $(0,1]$上一致连续.

proof 设$M=|A|+1$.因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}f'(x)=A$, 所以存在$\delta_1\ (0<\delta_1<1)$
当$0<x<\delta_1$时, $\left|\sqrt{x}f'(x)\right|<M$.
那么对任意的$x,y\in(0,\delta_1]$, $x<y$, 由柯西中值定理, 存在ξ, 使 $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right|=2\left|\sqrt{\xi}f'(\xi)\right|\leqslant 2M,\quad 0<x<\xi<y\leqslant\delta_1$.
由此$|f(x)-f(y)|\leqslant 2M|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$.因为函数$\sqrt{x}$在区间 $(0,\delta_1]$ 上一致连续, 所以$f(x)$亦在 $(0,\delta_1]$ 上一致连续.
又$f(x)$在 $[\delta_1,1]$ 上连续, 从而为一致连续, 故函数f在区间 $(0,1]$上一致连续.

✍ **exercise 4.2**

设函数f在$x=0$处连续.如果 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=m$, 求证：$f'(0)=m$.

proof 对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$使得当$0<|x|<\delta$时有$m-\varepsilon<\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}<m+\varepsilon$
于是对于$k\geqslant1$当然也有
$m-\varepsilon<\dfrac{f\left(x/2^{k-1}\right)-f\left(x/2^k\right)}{x/2^k}<m+\varepsilon$, 或者$\dfrac{m-\varepsilon}{2^k}<\dfrac{f\left(x/2^{k-1}\right)-f\left(x/2^k\right)}{x}<\dfrac{m+\varepsilon}{2^k}$.
取$k=1,2,\ldots,n$时的情形相加, 得到
$(m-\varepsilon)\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)<\dfrac{f(x)-f\left(x/2^n\right)}{x}<(m+\varepsilon)\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.
令$n\to\infty$并利用f在$x=0$处的连续性可得
$m-\varepsilon\leqslant\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant m+\varepsilon$
由此可知$m=\lim\limits_{x\to0}(f(x)-f(0))/x=f'(0)$.

✍ **exercise 4.3**

设函数f在 (a,b)上可导, 且$f(a+)=f(b-)$是有限的或为∞.求证：存在一点$\xi\in(a,b)$, 使得$f'(\xi)=0$.

proof 由题若都是有限的我们就可以补充定义进而运用罗尔定理
若都是 $+\infty$, 此时, 对于$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ 而言, $\exists\delta$, 当$x\in(a,a+\delta)\cup(b-\delta,b)$ 时有$f(x)>f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
所以f在 (a,b) 上最小值一定在 $[a+\delta,b-\delta]$ 内取到因而由费马定理解决

✍ **exercise 4.4**

设函数f 在开区间$(0,a)$上可导, 且$f(0+)=+\infty$.证明：f' 在$x=0$的右旁无下界

proof 若在邻域 $(0,\delta)$ 上f'有下界M, $f'>M$
此时由中值定理得到$\forall x\in(0,\delta)$, $f(x)=f(\delta)+f'(\xi)(x-\delta)$ (此时$x-\delta$为负数)
注意到若$f'(\xi)>0$那么$f(x)<f(\delta)$ 与$f(0+)=+\infty$矛盾
注意到若$f'(\xi)<0$那么$f(x)<f(\delta)+\delta M$也矛盾

exercise 4.5

设f既不是常值函数又不是线性函数，且在 $[a,b]$上连续，在 (a,b)上可导.
证明：存在一点$\xi \in (a,b)$，使得 $|f'(\xi)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

proof 设$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，那么$F(a)=F(b)$.因为$f$不是线性的，所以$F$不是常函数
$\Longrightarrow$ 存在$x\in(a,b)$使得$F(c)\neq F(a)=F(b)$.
如果$F(c)>F(a)$，那么存在$\xi_1\in(a,c)$使得$0<\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=F'(\xi_1)=f'(\xi_1)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
还存在$\xi_2\in(c,b)$使得$0>\frac{F(c)-F(b)}{c-b}=F'(\xi_2)=f'(\xi_2)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
在ξ_1和ξ_2中总有一个是满足$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$的.对于$F(c)<F(a)$的情形也是一样.

exercise 4.6

设函数f在$[a,+\infty)$上可导，$f(a)=0$，且当$x\geqslant a$时，有$|f'(x)|\leqslant|f(x)|$.求证：$f=0$.

proof 我们先来讨论$\left[a,a+\frac{1}{2}\right]$，
此时$\forall x\in\left[a,a+\frac{1}{2}\right]$我们有$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)\Longrightarrow\frac{|f(x)|}{x-a}=|f'(\xi)|\geqslant 2|f(x)|$
$\Longrightarrow |f(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f'(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}|f'(\xi)|\,(\xi\in(a,x))$
$\Longrightarrow |f(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}|f'(\xi_n)|$
而在$\left[a,a+\frac{1}{2}\right]$上$f$连续是有界的则根据$|f'(x)|\leqslant|f(x)|\Longrightarrow|f'(x)|$也是有界的
$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2^n}|f'(\xi_n)|$令$n\to\infty\Longrightarrow f(x)=0$
进而这样的手法可以不断做下去延拓出去

exercise 4.7

设函数f在 $[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，并有实数$A>0$，使得$|f'(x)|\leq A|f(x)|$在 $[0,+\infty)$上成立.
证明：在 $[0,+\infty)$上，$f(x)\equiv 0$.

proof 法一
$\because f$在 $[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0,\forall x\in\left(0,\frac{1}{2A}\right]$，由$Lagrange$中值定理，$\exists\xi_1\in(0,x)$，使得
$|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}|=|f'(\xi_1)|$
$\Longrightarrow |f(x)|=|f'(\xi_1)x|\leq A|f(\xi_1)|x\leq\frac{1}{2}|f(\xi_1)|$.
类似$\exists\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n\in(0,x)$，满足$0<\xi_n<\xi_{n-1}<\cdots<\xi_1<x\leq\frac{1}{2A}$且
$|f(x)|\leq\frac{1}{2}|f(\xi_1)|\leq\frac{1}{2^2}|f(\xi_2)|\leq\cdots\leq\frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|$.
$\because f$在$\left[0,\frac{1}{2A}\right]$上连续，$\exists M>0,\forall x\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]$，有$|f(x)|\leq M,\therefore|f(x)|\leq\frac{M}{2^n}$
令$n\to\infty$可知，$\forall x\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]$，有$f(x)=0$.
由数学归纳法可证，$\forall x\in\left[\frac{i-1}{2A},\frac{i}{2A}\right]\,(i=1,\cdots,n)$，有$f(x)=0,\therefore$ 在 $[0,+\infty)$上，$f(x)=0$.

法二

$\because |f|$在$\left[0,\dfrac{1}{2A}\right]$上连续,$\therefore \exists x_1\in\left[0,\dfrac{1}{2A}\right]$,有$|f(x_1)|=\max\limits_{0\le x\le\frac{1}{2A}}|f(x)|=M$

在$[0,x_1]$上,由$Lagrange$中值定理,$\exists\xi\in(0,x_1)$,使得$|f(x_1)|=|f'(\xi)x_1|$

$\therefore M=|f(x_1)|\leqslant A|f(\xi)|x_1\le\dfrac{1}{2}|f(\xi)|<\dfrac{M}{2}\Longrightarrow M=0$

即$\forall x\in\left[0,\dfrac{1}{2A}\right]$,有$f(x)=0$.下面证明同法一.

法三(反证法)

若$f(x)$不恒为零,则$\exists x_0\in(0,+\infty)$,有$f(x_0)\ne0$,不妨设$f(x_0)>0$.

记$x_1=\inf\{x\mid(x,x_0)\text{ 上 }f(x)>0\}$,由连续函数保号性可知$f(x_1)=0$,在$x\in(x_1,x_0)$上$f(x)>0$.

令$g(x)=\ln f(x),x\in(x_1,x_0)$,则$|g'(x)|=\dfrac{|f'(x)|}{|f(x)|}\le A$

$\therefore g(x)$在(x_1,x_0)上有界.而$\lim\limits_{x\to x_1^+}f(x)=f(x_1)=0$, $\lim\limits_{x\to x_1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\ln f(x)=-\infty$这与$g(x)$在$(x_1,x_0)$上有界矛盾

$\therefore$ 在$[0,+\infty)$上,$f(x)\equiv0$.

法四

$|f'(x)|\le A|f(x)|\Longrightarrow|f'(x)||f(x)|\le A|f(x)|^2$

构造$F(x)=e^{-2Ax}f^2(x)$

那么$F'=-2Ae^{-2Ax}f^2+2fe^{-2Ax}f'=-2e^{-2Ax}\left(Af^2-ff'\right)\leqslant0$

故F单调递减但是$F(0)=0\Longrightarrow F=0$

exercise 4.8

设函数f在区间$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且f'严格递增.求证:$f(x)/x$在$(0,+\infty)$上也严格递增.

proof 因为f'严格递增,所以f是严格凸函数.

于是对于$x_2>x_1>0$

有$f(x_1)=f\left(\dfrac{x_2-x_1}{x_2}\cdot0+\dfrac{x_1}{x_2}\cdot x_2\right)<\dfrac{x_2-x_1}{x_2}f(0)+\dfrac{x_1}{x_2}f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_2}f(x_2)$

亦即$f(x_1)/x_1<f(x_2)/x_2$.因此$f(x)/x$在$(0,+\infty)$上也严格递增.

exercise 4.9

设函数f 在R 上有界且$f''\geqslant0$.证明:f为常值函数.

proof $\forall a,b$取定,$x>b>a$,则有$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Longrightarrow f(x)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)$

若$f(x)$不是常值函数,

令$x\to+\infty$那么$f(x)\to+\infty$矛盾

exercise 4.10

设f在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$上有n阶导数,且$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$,但$f^{(n)}(x_0)\ne0$

$f^{(n)}$在x_0处连续,且当$0<|h|<\delta$时,$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)\quad(0<\theta<1)$.

证明:$\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{n^{1/(n-1)}}$.

proof 因为$f\left(x_{0}+h\right)=f\left(x_{0}\right)+f'\left(x_{0}\right)h+\dfrac{f^{(n)}\left(x_{0}+\theta_{1}h\right)}{n!}h^{n}$

所以$f'\left(x_{0}+\theta h\right)=\dfrac{f\left(x_{0}+h\right)-f\left(x_{0}\right)}{h}=f'\left(x_{0}\right)+\dfrac{f^{(n)}\left(x_{0}+\theta_{1}h\right)}{n!}h^{n-1}$.

又因为$f'\left(x_{0}+\theta h\right)=f'\left(x_{0}\right)+\dfrac{f^{(n)}\left(x_{0}+\theta_{2}\theta h\right)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}$

所以$\dfrac{f^{(n)}\left(x_{0}+\theta_{1}h\right)}{n!}h^{n-1}=\dfrac{f^{(n)}\left(x_{0}+\theta_{2}\theta h\right)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}$.

于是利用连续性就得到$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f^{(n)}\left(x_{0}+\theta_{1}h\right)}{nf^{(n)}\left(x_{0}+\theta_{2}\theta h\right)}\right)^{1/(n-1)}=\dfrac{1}{n^{1/(n-1)}}$.

exercise 4.11

设函数f在$[0,2]$上满足$|f(0)|\leqslant 1,|f(2)|\leqslant 1$及$|f''|\leqslant 1$.证明：在这个区间上,$|f'|\leqslant 2$,而且2是最小的常数.

proof 因为

$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(0-x)^{2}$

$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\dfrac{f''(\eta)}{2}(2-x)^{2}$,

所以$f(2)-f(0)=2f'(x)+\dfrac{f''(\eta)}{2}(2-x)^{2}-\dfrac{f''(\xi)}{2}x^{2}$,从而

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=\frac{1}{2}\left|f(2)-f(0)-\frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^{2}+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^{2}\right|\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(|f(2)|+|f(0)|+\frac{|f''(\eta)|}{2}(2-x)^{2}+\frac{|f''(\xi)|}{2}x^{2}\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\left((2-x)^{2}+x^{2}\right)\right)\\&\leqslant 2.\end{aligned}$$

因为当$f(x)=\dfrac{1}{2}x^{2}-2x+1$时可以取到等号,所以2是最小的.

exercise 4.12

设$f(x)$满足$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$其中$g(x)$为任一函数

证明：若$f\left(x_{0}\right)=f\left(x_{1}\right)=0\left(x_{0}<x_{1}\right)$则$f(x)\equiv 0\left(x\in\left[x_{0},x_{1}\right]\right)$

proof 反证法,f在$\left[x_{0},x_{1}\right]$上连续,由最小最大值定理知道,$f(x)$在$\left[x_{0},x_{1}\right]$存在最大最小值

设$f(x)$在其上的最大值M,最小值m.设$f(\xi)=M$.

下证$M=m=0$

若$M\neq 0$,因为$f\left(x_{0}\right)=f\left(x_{1}\right)=0$则$M>0$,因此$\xi\in\left(x_{0},x_{1}\right)$由费马定理知道$f'(\xi)=0$

此时$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0\Longrightarrow f''(\xi)=f(\xi)=M>0$

于是ξ应该为$f(x)$的一个严格极小值这与ξ为最大值矛盾故$M=0$

同理可证$m=0$

所以$f(x)\equiv 0\left(x\in\left[x_{0},x_{1}\right]\right)$

exercise 4.13

设函数f在R上二次可导.令$M_{k}=\sup\limits_{x\in\mathrm{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|<+\infty(k=0,1,2)$.求证：$M_{1}^{2}\leqslant 2M_{0}M_{2}$.

proof 因为

$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2,$

$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\eta)}{2}h^2,$

所以$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2-\frac{f''(\eta)}{2}h^2$

从而$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\left(\left(\frac{|f''(\xi)|}{2}+\frac{|f''(\eta)|}{2}\right)h+\frac{|f(x+h)|+|f(x-h)|}{h}\right)\leqslant\frac{M_2h}{2}+\frac{M_0}{h}.$

特别地,取$h=\sqrt{2M_0/M_2}$就得到$|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$,进而$2M_0M_2\geqslant\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|^2=M_1^2.$

exercise 4.14

设函数f在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$上可导,并且$f(0)=0,f(1)=1$　又设$k_1,k_2,\cdots,k_n$是任意的n个正数.

求证:在$(0,1)$中存在n个互不相同的数$t_1,t_2,\cdots,t_n$,使得$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$

proof 根据连续函数的介值性,存在$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$使得$f(x_i)=\frac{k_1+k_2+\cdots+k_i}{k_1+k_2+\cdots+k_n}.$

再根据拉格朗日中值定理,存在$t_i\in(x_{i-1},x_i)$使得

$1=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{f'(t_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(t_i)}/\sum\limits_{i=1}^{n}k_i.$

exercise 4.15

设$f(0)=0,f'(0)$存在.定义数列$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right),n\in\mathrm{N}_+$,试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

proof 根据导数定义$\exists\delta>0$,使得$|x|<\delta$时成立$\left|\frac{f(x)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon$.则当$n>N$时有

$f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)<(f'(0)+\varepsilon)-\frac{k}{n^2}=(f'(0)+\varepsilon)\frac{n+1}{2n}$

$f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)>(f'(0)-\varepsilon)-\frac{k}{n^2}=(f'(0)-\varepsilon)\frac{n+1}{2n}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right)\leqslant\frac{f'(0)+\varepsilon}{2}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right)\geqslant\frac{f'(0)+\varepsilon}{2}$

再令$\varepsilon\to0^+,\Longrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{f'(0)}{2}.$

exercise 4.16 设f在$(0,a)$上可微,$f(0^+)=+\infty$.证明:$f'(x)$在点$x=0$的右侧无下界.

proof 法一:用反证法.若f'在点$x=0$的右侧有下界,则

$\exists M>0,\exists\delta>0,s.t.$当$0<x\leqslant\delta$成立$f'(x)\geqslant M\Longrightarrow f(\delta)-f\left(\frac{\delta}{2^n}\right)\xlongequal{\frac{\delta}{2^n}<\xi_n<\delta}f'(\xi_n)\left(\delta-\frac{\delta}{2^n}\right)\geqslant M\delta\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$\Longrightarrow f\left(\frac{\delta}{2^n}\right)\leqslant f(\delta)-M\delta\left(1-\frac{1}{2^n}\right).$

令$n\to\infty$得$f(0^+)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{\delta}{2^n}\right)\leqslant f(\delta)-M\delta$.这与$f(0^+)=+\infty$矛盾.故有$f'$在点$x=0$的右侧无下界

法二:固定$x_0,\forall x<x_0,\exists\delta>0$使得$f(x)>f(x_0),\forall x\in(0,\delta)$则$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$

进一步可得$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$故$f'(x)$在$x=0$右侧无下界。

exercise 4.17

设f在$[-1,1]$上有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0, \forall n\in \mathrm{N}_+$

且存在常数$C\geqslant 0$, 使得对所有$n\in \mathrm{N}_+$和$x\in[-1,1]$成立不等式$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant n!C^n$.证明：$f(x)\equiv 0$.

proof 若$C<1$, 则$\forall x\in[-1,1]$有$|f(x)|=\left|\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\right|\leqslant C^n \quad (\forall n\in N_+)$ 故$f(x)=0$

若$C\geq 1$, 则$\forall x\in\left(-\dfrac{1}{C},\dfrac{1}{C}\right)$, 有$|f(x)|=\left|\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n\right|\leq (Cx)^n\ (\forall n\in N_+)$ 则$f(x)\equiv 0 \quad \left(\forall x\in\left(-\dfrac{1}{C},\dfrac{1}{C}\right)\right)$, 由连续性可得$f\left(\pm\dfrac{1}{C}\right)=0$

故在$-\dfrac{1}{C},\dfrac{1}{C}$处和上述类似操作

$\Longrightarrow$ 可得$f(x)\equiv 0, \forall x\in[-1,1]$

exercise 4.18

设$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\mathrm{e}^{\lambda_k x}$, 其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为互异实数, $c_1,\cdots,c_n$不同时为0.证明：f的零点个数小于n.

proof 用数学归纳法.当$n=1$时, $f(x)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, 没有零点, 结论自明.

假设当$n=m$时结论成立, 则当$n=m+1$时, 若$c_{m+1}=0$, 则化为$n=m$的情形.

若$c_{m+1}\neq 0$, 则

$F(x)\xlongequal{def}\mathrm{e}^{-\lambda_{m+1}x}f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}c_k\mathrm{e}^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})x}+c_{m+1}\Longrightarrow F'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\left(\lambda_k-\lambda_{m+1}\right)\mathrm{e}^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})x}$

据$n=m$的情形, $F'(x)$零点个数$<m\Longrightarrow F(x)$零点个数$<m+1$(用反证法)(详细：若$F(x)$的零点个数$\geqslant m+1$, 则由$Rolle$定理, $F'(x)$的零

m).

exercise 4.19

(1) 设f在$[0,1]$上可微, $f(0)=0, f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$, 证明：存在$\xi\in(0,1)$, 使成立$\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

(2) 设f在$[0,1]$上可微, $f(0)=0, f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$, 证明：对每个$\alpha\neq 0$, 存在$\xi\in(0,1)$, 使成立$|\alpha|\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

proof (1) 是 (2) 的特殊情况我们只来证明 (2)：因为$f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)\Longrightarrow$ 不妨设$f(x)>0$恒成立$\forall x\in(0,1)$

而$|\alpha|\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=|\alpha|(\ln f)'$ 而$\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}=(-\ln(1-f))'$

WTS：构造$|\alpha|\ln f+\ln(1-f)$ 但是此时$1-f$不一定会为正数故我们构造$f^{|\alpha|}\cdot(1-f)$ 进而使用罗尔定理即可

exercise 4.20

函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上可导, 且$f'(a)=f'(b)$.证明：$\exists\xi\in(a,b), s.t. f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

proof 先设$f'(a)=f'(b)=0$, 又令$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\\ 0, & x=a.\end{cases}$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)内可导, 且$\varphi'(x)=\dfrac{(x-a)f'(x)-(f(x)-f(a))}{(x-a)^2}, \quad \varphi'(b)=-\dfrac{\varphi(b)}{b-a}$.

分两种情况讨论.

(i)$\varphi(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$, 即$f(b)=f(a)$, 则由$\varphi(a)=0$及$Rolle$定理

$\exists\xi\in(a,b), st.\ 0=\varphi'(\xi)=\dfrac{(\xi-a)f'(\xi)-(f(\xi)-f(a))}{(\xi-a)^2}$

$\Longrightarrow (\xi-a)f'(\xi)=f(\xi)-f(a)$

于是有$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

(ii)$\varphi(b)\neq 0$.由$\varphi'(b)\varphi(b)=-\dfrac{\varphi^2(b)}{b-a}<0$,知$\varphi(b)$与$\varphi'(b)$异号.

当$\varphi(b)>0$时,$0>\varphi'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(b)}{x-b}$,$\exists\delta>0$,在$[b-\delta,b]$中,$\varphi(x)>\varphi(b)>0$.$\varphi$在$(a,b)$内取到正的最大值

同理,当$\varphi(b)<0$时,$0<\varphi'(b)$,$\varphi(x)$在(a,b)内取到负的最小值.

此最值点ξ也是极值点,所以总有$\varphi'(\xi)=0$.同(i)可得等式$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

再考虑$f'(a)=f'(b)\neq 0$时的情形.此时令$F(x)=f(x)-xf'(a)$.

于是有$F'(a)=f'(a)-f'(a)=0,\quad F'(b)=f'(b)-f'(a)=0,\quad F'(x)=f'(x)-f'(a)$.

$\Longrightarrow F(x)$满足我们之前讨论的情形$\Longrightarrow \exists\xi\in(a,b),s.t.F'(\xi)=\dfrac{F(\xi)-F(a)}{\xi-a}$,即

$$f'(\xi)-f'(a)=\frac{f(\xi)-\xi f'(a)-f(a)+af'(a)}{\xi-a}=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}-\frac{f'(a)(\xi-a)}{\xi-a}$$

移项就得$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

法二：设$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a},a<x\leqslant b\\ f'(a),x=a\end{cases}$

则$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导且$g'(x)=\dfrac{(x-a)f'(x)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}$

故我们先证明的就是$g'(x)$在(a,b)上存在零点

我们假设如果$g'(x)$在(a,b)上无零点则有导函数介值性知道$g'(x)$不妨设其在(a,b)上$>0\Longrightarrow g(x)$递增则：

对于$x\in(a,b)$成立$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(*)$ $\Longrightarrow f(x)-(x-a)\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}<f(a)$

令$x\to b^-$,有$f(b)-(b-a)f'(b)\leqslant f(a)\Longrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'(b)$

$\Longrightarrow g(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'(b)=f'(a)=g(a)$

又由递增性质就知道$g(x)$在$x\in(a,b)$上为常值.故在内部一个小区间上使用罗尔定理即可得到$g'(x)=0$在内部一个点处成立

这与我们假设矛盾

$\Longrightarrow$ 无论如何$g'(x)$在(a,b)上存在零点$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$

注：$(*)$式的化简利用了一个小技巧：如果$\dfrac{a}{b}>\dfrac{c}{d}$,$b>d>0$,那么$\dfrac{a-c}{b-d}>\dfrac{a}{b}$.

✍ **exercise 4.21**

设f在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,又有$c\in(a,b)$使成立$f'(c)=0$.证明：存在$\xi\in(a,b)$,使成立$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

proof

设$F(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}[f(x)-f(a)]$,则$F(a)=0,\quad F'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}\left[f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{b-a}\right]$.

(1)若$f(c)=0$,则由$Rolle$定理,$\exists\xi\in(a,c),s.t.F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

(2)若$f(c)>0$,则$F(c)>0=F(a),F'(c)<0$.故F在$[a,c]$上的最大值只能在(a,c)内某处ξ取得,而$F'(\xi)=0$.

(3)若$f(c)<0$,则$F(c)<0=F(a),F'(c)>0$.故F在$[a,c]$上的最小值只能在(a,c)内某处ξ取得,而$F'(\xi)=0$.

✍ **exercise 4.22**

设f在 $[a,b]$上连续, 在 (a,b)上可微, $f(a)=0, f(x)>0, \forall x\in[a,b]$, 证明：对每个$\alpha>0$, 存在$x_1,x_2\in(a,b)$, 使成立$\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}=\alpha\dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}$.

proof 若$\alpha=1$, 则任取$x_1=x_2\in(a,b)$即知结论成立.
下面只证明$\alpha>1$情形$\alpha<1$情形可以取倒数

对$\alpha>1$, 由$Lagrange$中值定理, $\exists x_2\in(a,b), st.\ f'(x_2)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0.$
设$F(x)=\ln f(x)$, 则$F'(x_2)=\dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}>0.$
由$f(a)=0$知 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x}=+\infty\Longrightarrow\exists\delta\in(0,x_2-a), st.$ 当$a<x\leqslant a+\delta$成立$\dfrac{F(x_2)-F(x)}{x_2-x}>\alpha F'(x_2)$.
特别地, $F'(\xi)\xlongequal[a+\delta<\xi<x_2]{\text{Lagrange中值定理}}\dfrac{F(x_2)-F(a+\delta)}{x_2-(a+\delta)}>\alpha F'(x_2)>F'(x_2)$.
据导数介值定理$\exists x_1\in(\xi,x_2)$, s.t.$F'(x_1)=\alpha F'(x_2)\Rightarrow\dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}=\alpha\dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}$

exercise 4.23

设f在 $(-\infty,+\infty)$上二阶连续可微, $|f(x)|\leqslant 1$, 且有 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$, 证明：存在ξ, 使成立$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

proof 由$Lagrange$中值完理$\exists\xi_1\in(-2,0),\xi_2\in(0,2)\Longrightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{f(0)-f(-2)}{2}\quad f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$
从而 $|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\leqslant 1$.
设$g(x)=(f(x))^2+(f'(x))^2$, 则$g'(x)=2f'(x)(f(x)+f''(x))$.
由于 $|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\leqslant 1$, 故$g(\xi_1),g(\xi_2)\leqslant 2$.而由$g(0)=4$, 故$g(x)$在 (ξ_1,ξ_2) 上有最大值.
设在$x=\xi$取列, 由$Fermat$理 $\Longrightarrow g'(\xi)=0$.又由于$g(\xi)\geqslant g(0)=4$, 故 $|g'(\xi)|\geqslant\sqrt{3}>0$, 所以$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

exercise 4.24

设f是区间 (a,b)上的上凸函数, 且$f(x)>0$, 证明：函数$\dfrac{1}{f}$是区间 (a,b)上的下凸函数.
又问：若在上题中将f的上凸条件改为下凸, 则有何结论?

proof 利用凸函数的λ定义即可

exercise 4.25

设f,g是 (a,b)上的下凸函数, 证明：$\max\{f,g\}$也是(a,b)上的下凸函数.

proof $a<x<y<b, 0<\lambda<1$

$$\Rightarrow\begin{cases} f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)\\ \qquad\qquad\qquad\quad\leqslant(1-\lambda)\max\{f(x),g(x)\}+\lambda\max\{f(y),g(y)\}\\ \\ g((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)g(x)+\lambda g(y)\\ \qquad\qquad\qquad\quad\leqslant(1-\lambda)\max\{f(x),g(x)\}+\lambda\max\{f(y),g(y)\}\end{cases}$$

$\Rightarrow\max\{f((1-\lambda)x+\lambda y),g((1-\lambda)x+\lambda y)\}\leqslant(1-\lambda)\max\{f(x),g(x)\}+\lambda\max\{f(y),g(y)\}$.

exercise 4.26

设f为$(-\infty,+\infty)$上的下凸函数, 证明：或者f为单调函数, 或者存在点c, 使得f在$(-\infty,c]$上单调减少, 而在$[c,+\infty)$上单调增加.

proof 若都不是提到的两种情况则存在$x_1<x_2<x_3\in(-\infty,+\infty)$使得$f(x_1)<f(x_2),f(x_2)>f(x_3)$
则$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0>\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$与$f(x)$是下凸函数矛盾

exercise 4.27

设f 在$(-\infty,+\infty)$上有界, 且处处有$f''(x)\geqslant 0$, 证明：f只能是常值函数.

proof 用反证法证明$f'(x)\equiv 0$.从而得到常值函数

事实上, 若$\exists x_0\in\mathbb{R}, s.t. f'(x_0)\neq 0$.不妨设$f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$ 的情形可类似证明, 不过要考虑$x\to-\infty$哦).

此时有二阶导数大于零我们有不等式$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

令$x\to+\infty$得到$f(x)\to+\infty$矛盾故$f'(x_0)=0$

exercise 4.28

设f在$[a,+\infty)$上为凸函数, 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$一定有意义.

proof 不妨设$f(x)$下凸, 且$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\dfrac{x-a}{x}+\dfrac{f(a)}{x}$

由题知道$g(x):=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$是单调递增的函数故要么$g(x)\to+\infty$要么$g(x)\to A$

则$\dfrac{f(x)}{x}\to+\infty$或$A$一定是有意义的

exercise 4.29

设f在$(-\infty,+\infty)$上为凸函数, 又有$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 证明：$f$是常值函数.

proof 不妨设f下凸, $\forall x_1<x_2<x$不妨设$f(x_1)\leqslant f(x_2)$

此时有$0\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\dfrac{f(x)/x-x_1/x}{1-x_1/x}\to 0\ (x\to+\infty)$

$\Longrightarrow\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0\Longrightarrow f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow$ 再由x_1,x_2任意性得到常值函数

exercise 4.30

设f是$[a,b]$上的凸函数, 如果有$c\in(a,b)$使得$f(a)=f(c)=f(b)$, 证明：$f(x)$是$[a,b]$上的常值函数.

proof 不妨设$f(x)$在$[a,b]$上为下凸函数, $\forall d\in[a,c]$

我们有$\dfrac{f(d)-f(a)}{d-a}\leqslant\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=0$与$\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}\leqslant\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}=0$

$\Longrightarrow f(c)\leqslant f(d)\leqslant f(a)\Longrightarrow f(d)=f(a)=f(c)$

同理若$d\in[b,c]$也一样故$f(x)$是$[a,b]$上的常值函数

exercise 4.31

设正数数列 $\{x_n\}$ 为满足递推公式$x_{n+1}=f(x_n)$ 的无穷小量

函数f有$Maclaurin$展开式$f(x)=x+Ax^k+o\left(x^k\right)(x\to 0)$, 其中$k$为大于1的某正整数, 系数$A\neq 0$

证明：有$\alpha>0$, 使得存在非零极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^\alpha$, 并求出此极限.

proof $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^\alpha}}\overset{\text{Stolz}}{=\!=\!=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{x_n^\alpha}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^\alpha x_{n+1}^\alpha}{x_n^\alpha-x_{n+1}^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n^\alpha f^\alpha(x_n)}{x_n^\alpha-f^\alpha(x_n)}\overset{f(0)=0}{\underset{\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^\alpha f^\alpha(x)}{x^\alpha-f^\alpha(x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^\alpha\left[x+Ax^k+o\left(x^k\right)\right]^\alpha}{x^\alpha-\left[x+Ax^k+o\left(x^k\right)\right]^\alpha}\overset{(1+t)^\alpha=1+\alpha t+o(t)}{\underset{(t\to0)}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^{2\alpha}\left[1+Ax^{k-1}+o\left(x^{k-1}\right)\right]}{x^\alpha-x^\alpha\left[1+C_\alpha^1Ax^{k-1}+o\left(x^{k-1}\right)\right]}\overset{2\alpha=\alpha-1+k}{\underset{\Rightarrow\alpha=k-1}{=\!=\!=}}-\dfrac{1}{A(k-1)}.$

exercise 4.32

若$f(0)=0$, 且存在$f^{(n+1)}(0)$　定义$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f'(0), & x=0,\end{cases}$

证明：$g(x)$的n阶导函数$g^{(n)}(x)$在$x=0$连续, 且$g^{(n)}(0)=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$

proof 当$x\neq0$时, $g(x)=f(x)x^{-1}$

$$g^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)\left(x^{-1}\right)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)(-1)^{n-k}(n-k)!x^{-(n-k+1)}$$
$$=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}\frac{f^{(k)}(x)}{x^{n-k+1}}=\frac{1}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^kf^{(k)}(x)$$
$$=\frac{1}{x^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}x^kf^{(k)}(x)+f^{(n)}(0)x^n\right]+\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}$$

$$\lim_{x\to0}g^{(n)}(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{(n+1)x^n}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(-1)^{n-k}n!}{k!}\left[kx^{k-1}f^{(k)}(x)+x^kf^{(k+1)}(x)\right]\right)+f^{(n)}(0)nx^{n-1}\right\}+f^{(n+1)}(0)\ (\text{洛必达})$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(n+1)x^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}n!}{(k-1)!}x^{k-1}f^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}\cdot n!}{k!}x^kf^{(k+1)}(x)+f^{(n)}(0)nx^{n-1}\right]+f^{(n+1)}(0)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{(n+1)x^n}\left[-nx^{n-1}f^{(n)}(x)+f^{(n)}(0)nx^{n-1}\right]+f^{(n+1)}(0)$$
$$=\frac{-n}{n+1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}+f^{(n+1)}(0)$$
$$=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$$

exercise 4.33

设f在区间(a,b)上按$Jensen$定义为下凸函数, 且至多只有第一类间断点

proof 证明：f在(a,b)上连续.张祖锦解.设$x\in(a,b)$, 则$f\left(x^+\right), f\left(x^-\right)$均存在.由

$$f\left(x+\frac{1}{2n}\right)\leqslant\frac{f\left(x+\frac{2}{n}\right)+f\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2}\Longrightarrow f\left(x^+\right)\leqslant\frac{f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)}{2}\Longrightarrow f\left(x^+\right)\leqslant f\left(x^-\right)(n\to\infty)$$
$$f\left(x-\frac{1}{2n}\right)\leqslant\frac{f\left(x-\frac{2}{n}\right)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)}{2}\Longrightarrow f\left(x^-\right)\leqslant\frac{f\left(x^-\right)+f\left(x^+\right)}{2}\Longrightarrow f\left(x^-\right)\leqslant f\left(x^+\right)(n\to\infty)$$
$$f(x)\leqslant\frac{f\left(x-\frac{1}{n}\right)+f\left(x+\frac{1}{n}\right)}{2}\Longrightarrow f(x)\leqslant\frac{f\left(x^-\right)+f\left(x^+\right)}{2}(n\to\infty);$$

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{f(x)+f\left(x+\frac{2}{n}\right)}{2} \Longrightarrow f\left(x^{+}\right) \leqslant \frac{f(x)+f\left(x^{+}\right)}{2} \Longrightarrow f\left(x^{+}\right) \leqslant f(x) \quad (n \to \infty);$$
$$f\left(x-\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{f(x)+f\left(x-\frac{2}{n}\right)}{2} \Longrightarrow f\left(x^{-}\right) \leqslant \frac{f(x)+f\left(x^{-}\right)}{2} \Longrightarrow f\left(x^{-}\right) \leqslant f(x) \quad (n \to \infty)$$
即知$f\left(x^{+}\right)=f(x)=f\left(x^{-}\right)$,而$f$在$x$处连续.

✍ **exercise 4.34**

proof

✍ **exercise 4.35**

proof

✍ **exercise 4.36**

proof

✍ **exercise 4.37**

proof

✍ **exercise 4.38**

proof

✍ **exercise 4.39**

proof

✍ **exercise 4.40**

proof

✍ **exercise 4.41**

proof

✍ **exercise 4.42**

proof

第 5 章 积分学习题

5.1 一元积分

exercise 5.1

设凸函数f在 $[a,b]$上可积.求证：$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

proof 该问题若凸函数但没有一阶导数有一丝困难,

如果有一阶导数我们可以运用$f(x)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ 进行积分获得答案

因为f在 $[a,b]$上可积, 所以

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{2n} f\left(\frac{(b-a)(i-1/2)}{2n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{(b-a)(i-1/2)}{2n}\right)+f\left(\frac{(b-a)(2n+1/2-i)}{2n}\right)\right)\\
&\geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}
$$

exercise 5.2

设 $[0,\pi]$上的连续函数f满足$\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$.求证：$f$在 $(0,\pi)$内至少有两个零点.

proof 因为 $\sin\theta$在 $(0,\pi)$上恒正, 所以 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$蕴含着$f$在 $(0,\pi)$上变号

从而有零点θ_0.假设f在 $(0,\pi)$内只有θ_0这一个零点

那么$f(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ 在 $(0,\pi)$上除了θ_0这一点外都是恒正或恒负的

于是$0\neq\int_0^\pi f(x)\sin(\theta-\theta_0)\,\mathrm{d}\theta=\cos\theta_0\int_0^\pi f(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta-\sin\theta_0\int_0^\pi f(\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=0$

矛盾!因此f在 $(0,\pi)$内至少有两个零点.

exercise 5.3

设连续函数f满足$\int_a^n x^i f(x)\mathrm{d}x=0(i=0,1,2,\cdots,n)$.证明：$f$在 (a,b)内至少有$n+1$个零点.

proof 我们把结论加强为：$f\equiv 0$或f在 (a,b)上至少改变$n+1$次符号, 从而至少有$n+1$个零点.

于是显然只需讨论$f\not\equiv 0$时的情况.

当$n=0$时结论显然成立.

假设当$n<m$时结论也成立, 那么当$n=m$时f在 (a,b)中至少有m个变号的零点, 把它们从小到大记为$x_1,x_2,...,x_m$.

假设f只有这m个变号的零点, 那么$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$ 在 (a,b)上不变号, 从而

$0\neq\int_a^b f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)\,\mathrm{d}x=0$, 矛盾!

因此f在 (a,b)上至少有$m+1$个变号的零点, 即当$n=m$时结论也成立.根据归纳法原理, 结论普遍成立.

exercise 5.4

函数f在区间 $[a,b]$上连续且非负, 令$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_n^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}=M$.

proof 如果$M=0$, 那么没什么好说的.

如果$M>0$, 那么对任意的$\varepsilon>0$, 存在 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$使得在 $[\alpha,\beta]$上成立$f(x)>M-\varepsilon$, 于是

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\geqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(\int_\alpha^\beta f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\geqslant\lim_{n\to\infty}(\beta-\alpha)^{1/n}(M-\varepsilon)=(M-\varepsilon).$$

又 $\varlimsup_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}\leqslant\lim_{n\to\infty}(b-a)^{1/n}M=M$

所以由ε的任意性知 $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{1/n}=M.$

exercise 5.5

函数f在 $[a,b]$上连续, 非负且严格递增.

由积分平均值定理, 对每个$p>0$, 存在唯一的一点$x_p\in[a,b]$, 使得$f^p\left(x_p\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f^p(t)\mathrm{d}t.$

求证 : $\lim_{p\to+\infty}x_p=b$

proof

$\forall\varepsilon>0$, 因为$f(b-\varepsilon/2)/f(b-\varepsilon)>1$, 所以存在$N>0$使得当$p>N$时有$\frac{f^p(b-\varepsilon/2)}{f^p(b-\varepsilon)}>\frac{2(b-a)}{\varepsilon}$

于是

$$(b-a)f^p\left(x_p\right)=\int_a^b f^p(x)\mathrm{d}x>\int_{b-\varepsilon/2}^b f^p(x)\mathrm{d}x>\frac{\varepsilon}{2}f^p\left(b-\frac{\varepsilon}{2}\right)>(b-a)f^p(b-\varepsilon)$$

从而$x_p>b-\varepsilon$.由此可见 $\lim_{p\to+\infty}x_p=b.$

exercise 5.6

设f是一个n次多项式, 且满足 $\int_0^1 f(x)x^k\,\mathrm{d}x=0\quad(k=1,2,\cdots,n).$

证明 : $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$

proof

设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$, 那么

$\int_0^1 x^kf(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}=\frac{p(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$, 其中$p(k)$是$k$的$n$次多项式.

由 $\int_0^1 x^kf(x)\mathrm{d}x=0$知$p(k)=c(k-1)(k-2)\cdots(k-n).$

注意到 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=\frac{p(0)}{(n+1)!}=\frac{(-1)^nc}{n+1}$

所以$c=(-1)^n(n+1)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

此外, 在等式

$$\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1}{k+2}+\cdots+\frac{a_n}{k+n+1}=\frac{p(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}=\frac{c(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

的两端乘以$k+1$后

再令$k=-1$就得到$a_0=c(-1)^n(n+1)=(n+1)^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

因此 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\right)f(x)\mathrm{d}x=a_0\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$

exercise 5.7

设f在 $[a,b]$上连续可导 (即f在 $[a,b]$上有连续的导函数).

求证：$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$

proof

因为f连续, 所以存在$\xi \in [a,b]$使得 $\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| = |f(\xi)|$.

另一方面, 根据积分中值定理, 存在$\eta \in [a,b]$使得 $\dfrac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = |f(\eta)|$,

于是

$$\begin{aligned}
\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| &\leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + |f(\xi)-f(\eta)| \\
&= \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\xi^\eta f'(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

exercise 5.8

设函数f在 $[0,2]$上连续可导, 且$f(0)=f(2)=1$.如果 $|f'|\leqslant 1$, 求证：$1\leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3.$

proof 这是因为

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2\right| &\leqslant \int_0^2 |f(x)-1|\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |f(x)-f(0)|\mathrm{d}x + \int_1^2 |f(x)-f(2)|\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 |f'(\xi_x)|x\mathrm{d}x + \int_1^2 |f'(\eta_x)|(2-x)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x \\
&= 1.
\end{aligned}$$

exercise 5.9

设函数f在 $[-1,1]$上可导, $M=\sup|f'|$.若存在$a\in(0,1)$, 使得 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

求证：$\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\left(1-a^2\right).$

proof 根据积分中值定理知存在$\xi_1\in[-a,0]$和$\xi_2\in[0,a]$使得

$$0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_1)+f(\xi_2)$$

于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{-1}^{-a}(f(x)-f(\xi_1))\mathrm{d}x + \int_a^1 (f(x)-f(\xi_2))\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-1}^{-a} |f'(\eta_x)|(\xi_1-x)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 |f'(\zeta_x)|(x-\xi_2)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M\int_{-1}^{-a}(\xi_1-x)\mathrm{d}x + M\int_a^1 (x-\xi_2)\mathrm{d}x \\
&= M\left(1-a^2+(a-1)(\xi_2-\xi_1)\right) \\
&\leqslant M\left(1-a^2\right).
\end{aligned}$$

exercise 5.10

设$f\in C[-1,1]$.求证：$\lim\limits_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(0)$.(提示：先讨论特殊情形$f=1$.)

proof 对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta\in(0,1)$使得当$|x|\leqslant\delta$时有$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$, 于是

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \lim_{h\to0^+}\left|\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\mathrm{d}x\right| \leqslant \overline{\lim_{h\to0^+}}\left|\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \overline{\lim_{h\to0^+}}\left(\int_{|x|\leqslant\delta}+\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant1}\right)\frac{h}{h^2+x^2}|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant \overline{\lim_{h\to0^+}}\ \varepsilon\int_{|x|\leqslant\delta}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x+2M\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant1}\frac{h}{h^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \overline{\lim_{h\to0^+}}\ 2\varepsilon\arctan\frac{\delta}{h}+4M\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{\delta}{h}\right)=\pi\varepsilon
\end{aligned}
$$

其中M是f的一个界.

因此 $\lim\limits_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}(f(x)-f(0))\mathrm{d}x=0$, 即

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=f(0)\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x=\pi f(0).$$

exercise 5.11

设f在$[0,1]$上连续, 并且 $\int_0^1 f(x)x^k\mathrm{d}x=0(k=0,1,\cdots,n-1)$, $\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=1$.

求证：存在一点$\xi\in(0,1)$, 使得$|f(\xi)|\geqslant 2^n(n+1)$.

proof 假设对每个$x\in(0,1)$都有$|f(x)|<2^n(n+1)$, 那么

$$1=\int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\mathrm{d}x<2^n(n+1)\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|^n\mathrm{d}x=1, \text{矛盾!}$$

exercise 5.12

设函数f在$[0,1]$上有二阶连续导数, 且$f(0)=f(1)=f'(0)=0$, $f'(1)=1$.

求证：$\int_0^1(f''(x))^2\mathrm{d}x\geqslant4$, 并指出不等式中等号成立的条件.

proof 考虑如下

$$\left(\int_0^1(f''(x)\times(kx+b))\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1(f''(x))^2\mathrm{d}x\times\int_0^1(kx+b)^2\mathrm{d}x$$

两边进行计算并适当考虑带多元k,b的最大值即可

exercise 5.13

设函数f在$[0,1]$上可积, 且有正数m和M, 使得$m\leqslant f(x)\leqslant M$对$x\in[0,1]$成立.

求证: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}$.

proof 考虑$kM+l\frac{1}{m}\geqslant\int_0^1 kf(x)+l\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=k\int_0^1 f\mathrm{d}x+l\int_0^1\frac{1}{f}\mathrm{d}x\geqslant2\sqrt{kl\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}}$

exercise 5.14

设f是$[a,b]$上的凹函数, $f(a)=f(b)=0$, 且$f'(a)=\alpha>0$, $f'(b)=\beta<0$.

求证 : $0 \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}$.

proof 因为 $-f$是凸函数, 所以$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) \geqslant \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = 0$, 从而 $\int_a^b f(x) \geqslant 0$.

记$x_0 = (a\alpha - b\beta)/(\alpha-\beta)$ (该点实际上是两条切线的交点为了分段估计更加精确)

那么当$a < x < x_0$时$f(x) \leqslant \alpha(x-a)$

当$x_0 < x < b$时$f(x) \leqslant \beta(x-b)$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{x_0} \alpha(x-a)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b \beta(x-b)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

✍ **exercise 5.15**

设f在 $[0,1]$上有二阶连续导数, $f(0) = f(1) = 0$, 且当$x \in (0,1)$时, $f(x) \neq 0$.

求证 : $\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant 4$.

proof 由于$f(x) \neq 0$, 不妨设$f(x) > 0$.记$M = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = f(c) \quad (0 < c < 1)$.

因$f(0) = f(1) = 0$, 由微分中值定理, 得

$f(c) - f(0) = f'(\xi)c \quad (0 < \xi < c)$,

$f(1) - f(c) = f'(\eta)(1-c) \quad (c < \eta < 1)$.

由此得$f'(\xi) = \frac{f(c)}{c}, \quad f'(\eta) = \frac{f(c)}{c-1}$.因此

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x &\geqslant \frac{1}{f(c)}\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{f(c)}\int_\xi^\eta |f''(x)|\mathrm{d}x \\
&\geqslant \frac{1}{f(c)}\left|\int_\xi^\eta f''(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{f(c)}|f'(\eta) - f'(\xi)| \\
&= \frac{1}{f(c)}\left|\frac{f(c)}{c-1} - \frac{f(c)}{c}\right| \\
&= \frac{1}{|c(c-1)|} \\
&= \frac{1}{c(1-c)} \geqslant 4.
\end{aligned}$$

✍ **exercise 5.16**

$f \in C^1[a,+\infty)$ 且$x \to +\infty$时, $f(x)$ 递减的趋向0

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛性等价于 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$收敛性

proof 注意到，$\forall A$我们有 $\int_a^A xf'\mathrm{d}x = f(x)\,x\,|_a^A - \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow$ 已知 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，且由题不难得到此时$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)\ (x \to +\infty)$

故在 $\int_a^A xf'\mathrm{d}x = f(x)\,x\,|_a^A - \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$中令$A \to +\infty$即可

$\Longleftarrow$ 另一方面, 已知 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$收敛

$\forall\varepsilon > 0$, 存在充分大的x，A使得 $\left|\int_x^A tf'(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$

因为$f'(x) \leqslant 0$故有积分中值第一定理得到 $|\xi\,(f(A) - f(x))| < \varepsilon$

$\Longrightarrow 0 \leqslant \xi\,|f(x) - f(A)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow 0 \leqslant x\,|f(x) - f(A)| < \xi\,|f(x) - f(A)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow$ 固定x让$A \to +\infty$故得到$0 \leqslant xf(x) \leqslant \varepsilon$

此时就有 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \Longrightarrow \int_a^A xf'\mathrm{d}x = f(x)x\mid_a^A - \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$令$A \to +\infty$即可

exercise 5.17 证明：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^a\cos^2 x}(\alpha > 4)$收敛.

proof 证明因为被积函数是正的，所以只要证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^\alpha\cos^2 x}$收玫.

事实上

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^\alpha\cos^2 x} \leqslant (n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^\alpha\cos^2 x} = 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^\alpha\cos^2 x}$$
$$\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+n^\alpha\cos^2 x} = 2(n+1)\pi\int_0^{\infty}\frac{1}{u^2+n^\alpha}du = \frac{(n+1)\pi^2}{n^{\alpha/2}} < \frac{\pi^2}{n^{\alpha/2-1}}$$

故当$\alpha > 4$时级数收敛进一步原积分收敛

exercise 5.18

设$0 < \alpha \leqslant 1/2$.证明：积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a+\sin x}\mathrm{d}x$发散

proof 注意到$\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}$.由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$是收敛的.

因为$\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+1)} = \frac{1}{2x^\alpha(x^\alpha+1)} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}$

由狄利克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}\mathrm{d}x$是收玫的，而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2x^\alpha(x^\alpha+1)}$发散

所以由比较判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(x^\alpha+\sin x)}\mathrm{d}x$发散.因此原积分也发散.

exercise 5.19

对任意的$b > 0$，设f在$[0,b]$上可积.如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$，证明：$\lim\limits_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x = a$.

proof 对任意的$\varepsilon > 0$，存在$A > 0$使得当$x \geqslant A$时$a-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$，于是由

$$t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x = t\left(\int_0^A+\int_A^{+\infty}\right)\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x = t\int_0^A\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x + \int_{At}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f\left(\frac{x}{t}\right)\mathrm{d}x\text{知}$$

$$a-\varepsilon \leqslant \varliminf_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x \leqslant a+\varepsilon.$$

由ε的任意性知 $\lim\limits_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x = a$.

exercise 5.20 判断以下积分的玫散性：$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x,\quad p > 0$

proof 容易看出$x = 0$是瑕点，考虑把它化成无穷积分讨论.令$t = 1/x$.则 $\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t$.

(1) 先讨论$2-p \leq 0$时的情况.假设积分收敛，由$Cauchy$收玫原理可知，当a_1, a_2充分大时，就有$\left|\int_{a_1}^{a_2} t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t\right| \leq 1$.

但是如果令$a_1 = 2k\pi, a_2 = (2k+1)\pi$，则当$k \to \infty$时$\left|\int_{a_1}^{a_2} t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t\right| \geq (2k\pi)^{p-2}\int_0^\pi \sin t\ \mathrm{d}t = 2(2k\pi)^{p-2} \geq 2.$

出现矛盾，因此假设不成立，于是可知原积分发散.

(ii)再讨论$0 < p < 1$时的情况.由于$\left|\frac{\sin t}{t^{2-p}}\right| \leq \frac{1}{t^{2-p}}$.
容易看出当$2-p > 1$即$0 < p < 1$时,原积分绝对收敛.
(iii)最后讨论$1 \leq p < 2$时的情况.容易知道当$t \to +\infty$时$1/t^{2-p}$递减趋于零且$\int_1^x \sin t \mathrm{d}t$有界
因此由$Dirichlet$判别法可知原积分收敛.但$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^{2-p}}\right|\mathrm{d}t$发散.因此原积分条件收敛.
综上可知,当$0 < p < 1$时,原积分绝对收玫,当$1 \leq p < 2$时,积分条件收敛,当$p \geq 2$时原积分发散.

exercise 5.21

$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^q}$;根据参数判断其敛散性

proof 因为$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x} = \left(\int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1+\int_1^2+\int_2^{+\infty}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$

其中的$\int_{1/2}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$和$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$当$q < 1$时收敛

$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x}$当$p > 1$时收敛

$\int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln^q x} = \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(-1)^q x^{2-p}\ln^q x}$当$p < 1$时收玫.因此原积分发散.

exercise 5.22

判断反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^0}\mathrm{d}x$的绝对收敛性和条件收玫性.

proof 把积分写成$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x = I_1+I_2$.
其中I_1当$\alpha \leqslant 0$时I_1为正常积分

当$\alpha \leqslant 0$,此时针对I_2我们来进行计算$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \geqslant (2k\pi)^{-\alpha}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}\sin(x)\,\mathrm{d}x = (2k\pi)^{-\alpha}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geqslant 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

故I_2当$\alpha \leqslant 0$发散

$$I_2 = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)\left(1-1/x^2\right)}{x^\alpha\left(1-1/x^2\right)}\mathrm{d}x$$

其中$\int_1^{+\infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_2^{A+1/A}\sin x\mathrm{d}x$有界且$\frac{1}{x^\alpha\left(1-1/x^2\right)} = \frac{1}{x^\alpha - x^{\alpha-2}}$

显然当$\alpha > 0$时I_2由狄利克雷判别法知道收敛

$$I_1 = \int_0^1\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_1^{+\infty}\frac{\sin(t+1/t)}{t^{2-\alpha}}dt$$

由I_2的分析同理得到I_1当$2-\alpha > 0$时收敛,$2-\alpha \leqslant 0$发散

此时我们已经有了$I_1 = \begin{cases}\alpha \leqslant 0 & \text{正常}\\ \alpha < 2 & \text{收敛}\\ \alpha \geqslant 2 & \text{发散}\end{cases}$ $\quad I_2 = \begin{cases}\alpha \leqslant 0 & \text{发散}\\ \alpha > 0 & \text{收敛}\end{cases}$

故我们的主要范围就集中在了$0 < \alpha < 2$中讨论绝对与条件收敛

$I_2 = \int_1^{+\infty}\frac{\sin(x+1/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$当$1 < \alpha < 2$绝对收敛，当$0 < \alpha \leqslant 1$条件收敛

故I_1当$2-\alpha > 1$绝对收敛,$0 < 2-\alpha \leqslant 1$条件收敛$\implies I_1$当$0 < \alpha < 1$绝对收敛,当$1 \leqslant \alpha < 2$条件收敛

故原积分当$0 < \alpha < 2$收敛且仅有条件收敛

exercise 5.23

设f在$(-\infty,+\infty)$上连续, 且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$都存在.

证明：对任意的$\eta>0$, 有$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\eta)-f(x))\mathrm{d}x=\eta(a-b)$.

proof 考虑到$\displaystyle\int_B^A(f(x+\eta)-f(x))\mathrm{d}x=\eta(a-b)+\int_A^{A+\eta}(f(x)-a)\mathrm{d}x-\int_B^{B+\eta}(f(x)-b)\mathrm{d}x$

于是对任意的$\varepsilon>0$, 可以选取足够大的A和足够小的B使得在$[A,A+\eta]$和$[B,B+\eta]$上分别成立$|f(x)-a|<\varepsilon$和$|f(x)-b|<\varepsilon$

于是$\displaystyle\left|\int_B^A(f(x+\eta)-f(x))\mathrm{d}x-\eta(a-b)\right|<2\eta\varepsilon$

当A更大或B更小时当然也成立, 因此$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+\eta)-f(x))\mathrm{d}x=\eta(a-b)$.

✍ **exercise 5.24**

proof

✍ **exercise 5.25**

proof

5.2 含参变量积分

exercise 5.26

证明：积分 $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-1/\alpha)^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x$关于$\alpha$在 $(0,1]$上一致收敛, 但不能用$Weierstrass$判别法来判断其一致收敛性

proof 我们想法是采用余项来判断一致收敛性：$\forall\varepsilon>0,\exists G>0$, 当$A>G$时有$\left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-1/\alpha)^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$

$\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-1/\alpha)^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x=\alpha\int_{\frac{A-1/\alpha}{\alpha}}^{+\infty} e^{-u^2}du$

很自然的我们由$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$收敛可以得到：$\exists M>0$, 当$A>M$时有$\int_A^{+\infty} e^{-u^2}du<\varepsilon$

很自然的我们就想要$\frac{A-1/\alpha}{\alpha}>M$但是此时$A$是关于$\alpha$的

我们采用分段估计：

当$\alpha\in\left(0,\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right]$时, $\left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-1/\alpha)^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x\right|=\left|\alpha\int_{\frac{A-1/\alpha}{\alpha}}^{+\infty} e^{-u^2}du\right|<\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du=\alpha\sqrt{\pi}<\varepsilon$

当$\alpha\in\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}},\ 1\right]$时, $\frac{A-1/\alpha}{\alpha}>A-\frac{\pi}{\varepsilon^2}$故只要$A>G+\frac{\pi}{\varepsilon^2}$即可

我们就有$\left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-1/\alpha)^2}{\alpha^2}}\mathrm{d}x\right|=\left|\alpha\int_{\frac{A-1/\alpha}{\alpha}}^{+\infty} e^{-u^2}du\right|<\alpha\varepsilon<\varepsilon$

故关于α在 $(0,1]$上一致收敛

但是此时如果是能够用$Weierstrass$判别法判断, 此时

$\mathrm{e}^{-\frac{(x-1/\alpha)^2}{\alpha^2}}\leqslant g(x)$ 且 $\int_1^{+\infty} g(x)$收敛

我们令$x=\frac{1}{\alpha}$那么$g()$

exercise 5.27

$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{6}$

proof 运用级数工具 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-t)^{n-1}}{n}\right)dt$

如果上述积分与无穷求和号能够换序则有：$-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{n}dt=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}$

下面我们来叙述换序的合理性:

因为该积分为瑕积分反常积分所以我们需要用$Moore-Osgood$定理来进行

1.说明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-t)^{n-1}}{n}$该级数对于$t\in[0,1]$是内闭一致收敛

这是由于幂级数的性质即可知道

2.说明：$\int_0^1 S(n,t)\,dt$该反常积分 (瑕积分) 关于n是一致收敛的, 其中$S(n,t)$是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-t)^{n-1}}{n}$的部分和

我们希望说明：$\lim_{\delta\to0^+}\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^{k-1}}{k}\right)dt$ 当$\delta\to0^+$时关于n是一致收敛的

那么即想要证明如下式子$\left(仿照无穷积分的\int_A^{+\infty}的说法\right)$：

$\forall\varepsilon>0$, 是否存在h使得当$0<\delta<h$时对于任何的n都有$\left|\int_0^{\delta}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^{k-1}}{k}\right)dt\right|<\varepsilon$

$\left|\int_0^{\delta}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^{k-1}}{k}\right)dt\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(1-\delta)^k}{k^2}$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 级数收敛所以 $\exists N_1>0$, 有 $\sum_{i=N_1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $\left|\int_0^{\delta}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^{k-1}}{k}\right)dt\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(1-\delta)^k}{k^2}<\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1-(1-h)^{N_1}}{k^2}+\sum_{k=N_1}^{n}\frac{1}{k^2}$

此时 $\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1-(1-h)^{N_1}}{k^2}=\left(1-(1-h)^{N_1}\right)\left(\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1}{k^2}\right)$ 当 $h\to 0$ 时该式子 $\to 0$ 故总可以取 h 充分小使得 $\sum_{k=1}^{N_1}\frac{1-(1-h)^{N_1}}{k^2}<\frac{\varepsilon}{2}$

则 $\left|\int_0^{\delta}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^{k-1}}{k}\right)dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

故换序合理

proof

首先注意到 $\frac{\ln(1-t)}{t}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}, t\in[0,1)$ 根据逐项积分可得

$\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}, x\in[0,1)$

由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $x=1$ 处收玫, 因此在 $[0,1]$ 上一致收敛, 那么上式关于 $x\to 1^-$ 取极限可得

$\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 1^-}\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t=-\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1^-}\frac{x^n}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

✍ **exercise 5.28**

proof

✍ **exercise 5.29**

proof

✍ **exercise 5.30**

proof

✍ **exercise 5.31**

proof

✍ **exercise 5.32**

proof

exercise 5.33

proof

exercise 5.34

proof

exercise 5.35 *prob* : 若$f(x)$在 $[0,1]$上连续, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})\mathrm{d}x$.

solve : $\forall n\geq 2$, 由积分第一中值定理, $\exists\xi_n\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$, 及$\eta_n\in\left[\frac{1}{n},1\right]$, 使得 $\int_0^{\frac{1}{n}} f(\sqrt[n]{x})dx=f\left(\sqrt[n]{\xi_n}\right)\frac{1}{n}$ $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(\sqrt[n]{x})\mathrm{d}x=f\left(\sqrt[n]{\eta_n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$

$\because f$在 $[0,1]$上有界, $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\sqrt[n]{\xi_n}\right)\frac{1}{n}=0$.又$\because f$在$x=1$处连续, $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\sqrt[n]{\eta_n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)$.

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\sqrt[n]{x})dx=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} f(\sqrt[n]{x})dx+\int_{\frac{1}{n}}^1 f(\sqrt[n]{x})dx\right)=\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\sqrt[n]{\xi_n}\right)\frac{1}{n}+f\left(\sqrt[n]{\eta_n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=f(1).$$

exercise 5.36 *prove* : 若f 在$[a,b]$上连续, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=0$, 则在$(a,b)$内至少存在两点$x_1$、$x_2$,

使$f(x_1)=f(x_2)=0$, 又若 $\int_a^b x^2f(x)\mathrm{d}x=0$, 这时$f$ 在$[a,b]$内是否至少有三个零点?

solve : 假设对任意的$x\in(a,b)$均有$f(x)\neq 0$, 则由连续函数根的存在定理知, $f(x)$在(a,b)内恒正或恒负.

于是, 根据积分不等式性质有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$, 或 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0$这与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.故至少存在一点$x_1\in(a,b)$, 使$f(x_1)=0$.

假设$f(x)$在(a,b)内只有一个零点x_1, 则$0=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x$

且$f(x)$在 (a,x_1) 与 (x_1,b) 每个区间内不变号(根据连续函数根的存在定理).故有 $\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^b f(x)\mathrm{d}x\neq 0$

由此知$f(x)$在x_1 两边异号.又函数$x-x_1$ 在x_1 两边也异号, 所以$g(x)=(x-x_1)f(x)$在x_1 两边同号,

即$g(x)$在(a,b)内除一个零点x_1 外恒正或恒负, 从而由$g(x)$的连续性可得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$, 但

$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b (x-x_1)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-x_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.故在$(a,b)$内至少存在两点$x_1,x_2$, 使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

若 $\int_a^b x^2f(x)\mathrm{d}x=0$, 则$f(x)$在$(a,b)$内至少存在三个零点.事实上, 假设在$(a,b)$内只有两点$x_1,x_2$ 使得$f(x_1)=f(x_2)=0$, 则

$0=\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_2}^b f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_{x_2}^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$

且$f(x)$在 $(a,x_1),(x_1,x_2),(x_2,b)$ 每个区间内不变号.从而由推广的积分第一中值定理

$0=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_1} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} xf(x)\mathrm{d}x+\int_{x_2}^b xf(x)\mathrm{d}x$

$=\xi_1\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\xi_2\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+\xi_3\left[-\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right]$

$=(\xi_1-\xi_3)\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+(\xi_2-\xi_3)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$ 即 $(\xi_1-\xi_3)\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x=-(\xi_2-\xi_3)\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$

其中$a<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<b$ (参看习题8).因为$\xi_1-\xi_3<0,\xi_2-\xi_3<0$. $\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x\neq 0$, $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\neq 0$,

所以由上式知, $\int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$ 异号, 从而知$f(x)$在x_1 两边异号, 同理可证$f(x)$在x_2 两边也异号,
不妨设$f(x)$在区间 $(a,x_1),(x_1,x_2),(x_2,b)$ 内符号分别为正、负、正(其他情况证明类似).考虑函数$h(x)=(x-x_1)(x-x_2)f(x)$.由于 $(x-x_1)(x-x_2)$ 在 $(a,x_1)(x_1,x_2),(x_2,b)$ 内的符号分别为正、负、正, 故$h(x)$在 $(a,x_1),(x_1,x_2),(x_2,b)$ 每个区间内恒正.
又$h(x)$是连续函数, 所以 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x>0$.但

$$\begin{aligned}\int_a^b h(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b x^2f(x)\mathrm{d}x-(x_1+x_2)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x+x_1x_2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

矛盾.可见在(a,b)内至少有三个点x_1,x_2,x_3, 使得$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.

✍ **exercise 5.37** *solve* : 设f 为$[0,2\pi]$上的单调递减函数, 证明 : 对任何正整数n 恒有 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\geqslant 0$.

proof : 设$g(x)=f(x)-f(2\pi)$, 则由题设知, $g(x)$在$[0,2\pi]$上为非负、递减函数.由积分第二中值定理, 存在$\xi_n\in[0,2\pi]$, 使得

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi} f(2\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=g(0)\int_0^{\xi_n}\sin nx\,\mathrm{d}x=g(0)\cdot\frac{1-\cos n\xi_n}{n}\geqslant 0.$$

✍ **exercise 5.38** *prove* : $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$

proof(1)由$f(x)=\frac{1}{x}$ 的递减性, 有$\frac{1}{k+1}=\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\mathrm{d}x<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{k}=\frac{1}{k}$

即$\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots,n-1)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<1\\\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}\\\cdots\\\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}\end{cases}$ 累加即可

由上面有$1<\frac{\ln(1+n)}{\ln n}<\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}<\frac{1}{\ln n}+1$而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}+1\right)=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$

✍ **exercise 5.39** *prove* : 设f 在$[0,+\infty)$上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A,\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=A$

proof : 由题易知$f(x)$ *is bounded* $\Rightarrow|f(x)|\leqslant M\quad\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\sqrt{x}M}{x}\to 0$

$\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x-\sqrt{x}}{x}f(\xi_x)\ (\xi_x\in(\sqrt{x},x))\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(x)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)f(\xi_x)=\lim\limits_{\xi_x\to+\infty}f(\xi_x)=A$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}}f(t)\mathrm{d}t+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t=0+A=A\quad .Q.E.D\ \square$

✍ **exercise 5.40** *prob* : 设f 是定义在$(-\infty,+\infty)$上的一个连续周期函数, 周期为p, 证明
prove : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t$.

proof : $\forall x>0,\exists n\in N$ 及$x'\in[0,p)$, 使得$x=np+x'$.

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t=\frac{1}{np+x'}\int_0^{np+x'}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{np+x'}\left[\int_0^{np}f(t)\mathrm{d}t+\int_{np}^{np+x'}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'}f(t)\mathrm{d}t$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{np+x'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p+\dfrac{x'}{n}}=\frac{1}{p}\qquad\left|\frac{\int_0^{x'}f(t)\mathrm{d}t}{np+x'}\right|\leqslant\frac{\int_0^{x'}|f(t)|\mathrm{d}t}{np+x'}\leqslant\frac{\int_0^{p}|f(t)|\mathrm{d}t}{np+x'}\to 0\quad(n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{np+x'}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{np+x'}\int_0^{x'}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t+0=\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\mathrm{d}t$$

exercise 5.41 研究 $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$敛散性

$1^\circ:\left|\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x^\alpha}$所以 $\Rightarrow$ 当$\alpha<1$时绝对收敛

$2^\circ:\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}$进行适当拆分$\frac{1}{x^{\alpha-2}}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$这样$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$可以适配于积分上限函数有界因为原函数是$\cos\frac{1}{x}$

所以 $\Rightarrow\alpha-2<0$时 $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{\alpha-2}}=0$符合$Dirchlet$条件 $\Rightarrow$ 考虑$1\leqslant\alpha<2$且此时$\left|\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\right|>\frac{1}{x^\alpha}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)$,

同理后半部分由Dir条件得收敛前半部分$\frac{1}{2x^\alpha}$因为$1\leqslant\alpha<2$所以发散 $\Rightarrow$ 绝对值是发散所以是条件收敛

3°当$\alpha>2$此时, 当$x\in(0,1)$ $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\frac{1}{x}\Rightarrow\left|\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\right|>\frac{1}{x^{\alpha-1}}$此时$\frac{1}{x^{\alpha-1}}$发散到正无穷了那么$\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}$也必将发散到无穷去了

$$\text{综上}\begin{cases}\alpha<1 & \text{绝对收敛}\\ 1\leqslant\alpha<2 & \text{条件收敛}\\ \alpha>2 & \text{发散}\end{cases}$$

exercise 5.42 证明：瑕积分$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\,dx$收敛且$J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

Proof: $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln(\sin x)=0\Rightarrow$ 收敛由前文知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx\Rightarrow 2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx-\frac{\pi}{2}\ln 2$

再令$u=2x$利用 $\int_0^\pi f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx\Rightarrow J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

exercise 5.43 *solve*：讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x(b\neq0),\lambda$ 取何值时绝对收敛或条件收玫.

Solve：显然我们该积分可能是存在瑕点的因而我们需要分类讨论。不防假设$b>0$；令$bx=u$

$$\Rightarrow LHS=b^{\lambda-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^\lambda}du=b^{\lambda-1}\left[\underbrace{\int_0^1\frac{\sin u}{u^\lambda}du}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^\lambda}du}_{I_2}\right]$$

$$\text{针对}I_2\text{根据前文我们显然有}I_2=\begin{cases}\lambda>1 & \text{绝对收敛}\\ 0<\lambda\leqslant1 & \text{条件收敛}\\ \lambda\leqslant0 & \text{发散}\end{cases}\quad\left(\text{其中}\lambda\leqslant0\text{时用柯西准则当}k\to+\infty\text{有}\left|\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{u^\lambda}du\right|\geqslant\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\text{发散}\right)$$

针对I_1 $\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u}{u^\lambda}=u^{1-\lambda}$显然当$1-\lambda\geqslant0\Leftrightarrow\lambda\leqslant1$不为瑕点为定积分(自然绝对收敛)

此外 $\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u}{u^\lambda}\cdot u^{\lambda-1}=1\Rightarrow\lambda-1<1\Leftrightarrow\lambda<2$时收敛又在$\int_0^1$上恒正即为绝对收敛，$\lambda\geqslant2$发散

$$\Rightarrow I_1=\begin{cases}\lambda\leqslant1 & \text{定积分绝对收敛}\\ 1<\lambda<2 & \text{有瑕点绝对收敛}\\ \lambda\geqslant2 & \text{发散}\end{cases}\quad\Rightarrow I=\begin{cases}\text{当}0<\lambda\leqslant1\text{时},\text{非正常积分}I\text{条件收敛}\\ \text{当}1<\lambda<2\text{时},I\text{绝对收敛}\\ \text{当}\lambda\leqslant0\text{或}\lambda\geqslant2\text{时},I\text{发散.}\end{cases}$$

exercise 5.44 (1)：设f为 $[a,+\infty)$上的非负连续函数.若$\int_a^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$收玫, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收玫

(2)：设f为 $[a,+\infty]$上的连续可微函数, 且当$x\to+\infty$时, $f(x)$递减地趋于0, 则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充要条件为$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛.

Solve：(1)取$M=\max\{|a|,1\}$, 则由$\int_a^{+\infty} xf(x)\cdot\mathrm{d}x$收敛, 可知$\int_M^{+\infty} xf(x)\cdot\mathrm{d}x$也收敛, 而$0\leqslant\int_M^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_M^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$

$\therefore\int_M^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 从而$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛

(2) 由已知, 在 $[a,+\infty)$上$f(x), f'(x)$均为连续函数, $A>a$; $\int_a^A xf'(x)\mathrm{d}x=\int_a^A x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_a^A-\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$

必要性：设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 由$f(x)$的单调性知$\lim\limits_{A\to+\infty} f(x)\Big|_a^A=-af(a)\left(\text{由命题2.7.1知道}f=o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

从而由知$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A xf'(x)\mathrm{d}x$存在.即$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛.

充分性：又若$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛, 则$\forall\varepsilon>0,\exists M>|a|$, 使当$A>x>M$时, 有$\left|\int_x^A tf'(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$

由于$f'(x)$不变号 ($\leqslant 0$), 故由积分中值定理知, 存在$\xi\in[x,A]$使$\int_x^A tf'(t)\mathrm{d}t=\xi\int_x^A f(t)\mathrm{d}t=\xi[f(A)-f(x)]$

于是$0\leqslant x\,|f(A)-f(x)|\leqslant\xi\,|f(A)-f(x)|<\varepsilon$; 令$A\to+\infty$由题干由$\lim\limits_{A\to+\infty} f(A)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{A\to+\infty} xf(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{A\to+\infty} xf(x)\Big|_a^A=-af(a)\Rightarrow\int_a^{+\infty} xf'(x)dx$收敛

exercise 5.45 设f在 $[0,+\infty)$ 上连续。$0<a<b$

(1) 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$则$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}$

(2) 若$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$收敛，则$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$

Proof：(1) $let\ t=ax$; $\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(t)}{t}dt\ (0<\varepsilon<A)$ 同理 $\int_\varepsilon^A\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(u)}{u}du$

于是$\int_\varepsilon^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(u)}{u}du-\int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(u)}{u}du=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}du-\int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}du$

$=\int_a^b\frac{f(\varepsilon t)}{t}dt-\int_a^b\frac{f(At)}{t}dt=[f(\varepsilon\xi)-f(A\eta)]\cdot\int_a^b\frac{1}{t}dt$ (ξ,η都在a,b之间) 令$\varepsilon\to0^+$和$A\to+\infty$

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}$

第 6 章 级数理论习题

6.1 数项级数

exercise 6.1

$\sum a_n$与$\sum b_n$发散级数.问$\sum a_n+b_n$与$\sum a_n-b_n$与$\sum a_nb_n$与$\sum \frac{a_n}{b_n}$的敛散性

proof 上述都是有可能发散有可能收敛.考虑下述级数

考虑$\frac{1}{n}$级数与$(-1)^n\frac{1}{n}$

exercise 6.2

若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收玫,证明:$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$也收玫.但反之不然,举例说明之.

proof 因为当n足够大时必有$a_n<1$,从而也有$a_n^2<a_n$.取$a_n=1/n$便知反之不然.

exercise 6.3

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.证明:$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$也收敛.试举例说明其逆命题不成立.但若$a_n>0$,则逆命题也成立,试证之.

proof 这是因为$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n+a_{n+1})=-a_1+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N+1}a_n=-a_1+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

取$a_n=(-1)^n$便知逆命题不成立.

如果$a_n>0$,那么$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}(a_n+a_{n+1})<\sum_{n=1}^{N}a_n<a_1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n+a_{n+1})$,由此可见$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$收敛蕴含着$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

或者利用柯西收敛准则也可证明逆命题

exercise 6.4

若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$,且级数$\sum b_n$绝对收玫,证明级数$\sum a_n$也收玫.若上述条件中只知道$\sum b_n$收玫,能推出$\sum a_n$收玫吗?

proof 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k\neq 0$,即$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}=|k|>0$,由比较原则知$\sum|a_n|$收玫,即$\sum a_n$也收敛

若只知$\sum b_n$收玫,则$\sum a_n$不一定收玫.例如,设$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$,$b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

则$\frac{a_n}{b_n}=\left(1+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\to 1\neq 0\quad(n\to\infty)$而$\sum b_n=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收玫,但$\sum a_n=\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$发散.

exercise 6.5 级数比较判别法只能运用在正项级数

设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一个收玫级数.如果$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$,能否断言$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也是收玫级数?

proof 不一定例如$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\qquad b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$

exercise 6.6

求证：$\sum\limits_{n=1且n\neq m}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=-\frac{3}{4m^2}$,这里$m$是给定的正整数.

proof *Lemma*：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{q+p}+\frac{1}{q+2p}+\cdots+\frac{1}{q+rp}\right)$
这里r是正整数, $pn+q\neq 0(n=1,2,\cdots)$.

只需注意到$\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{pn+q}-\frac{1}{p\left(n+r\right)+q}\right)$
利用列项相消即可

在此题中我们将仿照上个$lemma$的思路希望进行配对思考此时WTS：$\sum\limits_{n=1,n\neq m}^{\infty}\left(\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}\right)=\frac{3}{2m}$
此时注意到当$n\geqslant 1$时假设$n=k$时, 那么$-\frac{1}{k+m}$该项就会与之后的一项$\frac{1}{(2m+k)-m}$项配对抵消
所以实际上对于后半部分其实总会被抵消
但是我们注意到因为$n\neq m$故实际上我们实际缺少了一个$-\frac{1}{m+m}$项也就是说后面的$\frac{1}{(2m+m)-m}$该项
这两项无法被抵消故上述的抵消策略实际上有一个$\frac{1}{2m}$留下来了我们额外拿出来计算
那么现在我们通过抵消策略知道了$n\geqslant 2k+1$时级数的后半部分和实际上就抵消完了
我们来看$1\sim 2m$项为$\frac{1}{1-m}+\frac{1}{2-m}+\cdots+\frac{1}{(m-1)-m}++\frac{1}{(m+1)-m}+\cdots+\frac{1}{(2m-1)-m}+\frac{1}{2m-m}$
又进行从中间往两边的配对抵消最后剩下一个$\frac{1}{2m-m}=\frac{1}{m}$
所以最后为$\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}=\frac{3}{2m}$

exercise 6.7

设$a_n>0,\{a_n-a_{n+1}\}$为一个严格递减的数列.如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收玫,求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty$.

proof 由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收玫$\Longrightarrow a_n\to 0$且$a_n>0$; 我们发现$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1>0$
所以我们得到$a_n-a_{n+1}>0\ (\forall n)$;否则若$\exists n_0$有$a_{n_0}-a_{n_0+1}\leqslant 0$那么由严格递减就知道
肯定存在$\exists n_1\ \ s.t.a_{n_1}-a_{n_1+1}<0$由严格递减知道不妨就可以设$a_n-a_{n+1}\leqslant -\varepsilon_0\ (\forall n\geqslant n_1)$
那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$级数必然$\to -\infty$不会为$a_1>0$的.
$\Longrightarrow a_n-a_{n+1}>0\Longrightarrow a_n>a_{n+1}\Longrightarrow\{a_n\}$为一正项严格单调递减趋于零的数列
此时$\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}>\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n^2}=(a_n-a_{n+1})/\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k-a_{k+1})(a_k+a_{k+1})>1/\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to\infty$
$1/\sum\limits_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to\infty$这是由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛所以余和可以足够小
综上$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_na_{n+1}}=+\infty$

exercise 6.8

若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收玫,证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$也收玫.举例说明其逆命题不成立.但若$\{a_n\}$是递减数列,则逆命题成立.

proof 这是因为$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant (a_n + a_{n+1})/2$.
取$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$便知其逆命题不成立.
当$\{a_n\}$递减时由$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{a_{n-1} a_n}$知逆命题成立.

exercise 6.9
设正项级数$\sum a_n$.
若该级数收玫,则存在$K > 0$使得对于任一正数列$\{a_n\}$都有$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

proof (i)当$\{a_n\}$单调递增时,有不等式$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} \geq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} \geq n a_n$.
于是$\frac{2n-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}} + \frac{2n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}} \leq \frac{2n-1}{n a_n} + \frac{2n}{n a_n + a_{2n}} < \frac{2n}{n a_n} + \frac{2n}{n a_n} = \frac{4}{a_n}$.
两边对n求和得$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2n-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}} + \frac{2n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}}\right) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$.
令$N \to \infty$即得$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

(ii)当$\{a_n\}$为一个一般项数列时.由于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$收敛,故$a_n \to +\infty$.
由于$a_n \to +\infty$,因此数列中必存在最小项,取出这项作为第一项
然后在剩余的项中再取出最小项,依次下去可以得到一个单调递增的重排数列$\{b_n\}$.
由于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$收敛,故重排后的级数仍然收玫且它的和不变.由$(i)$可知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$.
容易知道,对于任一$n \in \mathbb{N}^*$都有$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
于是可知$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

exercise 6.10
设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是一个收玫的正项级数.证明:对任何$\delta > 0$,级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+\delta}{2}} \sqrt{a_n} < +\infty$.当$\delta = 0$时情况如何?

proof 这是因为$n^{-(1+\delta)/2} \sqrt{a_n} \leqslant \left(n^{-1-\delta} + a_n\right)/2$.
当$\delta = 0$时级数可能发散,比如取$a_n = 1/\left(n \ln^2 n\right)$.

exercise 6.11
设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是一个发散的正项级数.试证:$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$发散,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$收玫.

proof 如果$\{a_n\}$有界设$|a_n| \leqslant M$,那么$a_n/(1 + a_n) \geqslant a_n/(1 + M)$,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$发散.

如果$\{a_n\}$无界,那么$\overline{\lim_{n \to \infty}} a_n/(1 + a_n) = 1$,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$还是发散.

因为$a_n/\left(1 + n^2 a_n\right) < 1/n^2$,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$收玫.

exercise 6.12
设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是一个发散的正项级数.问$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$的玫散情况如何?

proof 先来研究$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$

如果$\{a_n\}$有界,设$|a_n|\leqslant M$,那么$a_n/\left(1+a_n^2\right)>a_n/\left(1+M^2\right)$,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$发散.

如果$\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$,那么当$n\to\infty$时$\frac{a_n}{1+a_n^2}=\frac{1}{a_n}\frac{1}{1+1/a_n^2}\sim\frac{1}{a_n}$,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$同敛散.

在其他情况下,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$可能收敛可能发散.比如取$a_n=\begin{cases} n, & n=2^k \\ 0, & n\neq 2^k\end{cases}$时收敛的,而取$a_n=\begin{cases} n, & n=2k \\ 0, & n=2k-1\end{cases}$时是发散的

研究$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$

如果$\{na_n\}$有界,设$|na_n|\leqslant M$,那么$a_n/(1+na_n)>a_n/(1+M)$,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$发散.

如果$\lim_{n\to\infty} na_n=+\infty$,那么当$n\to\infty$时$\frac{a_n}{1+na_n}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+1/(na_n)}\sim\frac{1}{n}$所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$发散.

在其他情况下,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$可能收玫可能发散.比如取$a_n=\begin{cases} 1, & n=2^k \\ 1/n^2, & n\neq 2^k\end{cases}$时时收玫的,而取$a_n=\begin{cases} 1/n, & n=2k \\ 1, & n=2k-1\end{cases}$时是发散的.

exercise 6.13 设$a_n>0,S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$.

证明:(1)当$\alpha>1$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$收玫;(2)当$\alpha\leqslant 1$且$S_n\to+\infty$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散.

proof (1)根据拉格朗日中值定理,存在介于S_n和S_{n-1}之间的ξ_n使得$\frac{1}{1-\alpha}\left(S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}\right)=\frac{S_n-S_{n-1}}{\xi_n^\alpha}=\frac{a_n}{\xi_n^\alpha}\geqslant\frac{a_n}{S_n^\alpha}$

因此$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{S_n^\alpha}\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\sum_{n=2}^{N}\left(S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}\right)+\frac{a_1}{S_1^\alpha}=\frac{S_1^{\alpha-1}-S_N^{\alpha-1}}{\alpha-1}+a_1^{1-\alpha}<\frac{S_1^{\alpha-1}}{\alpha-1}$

因此部分和有上界故收敛

(2)当$\alpha<1$时$a_n/S_n^\alpha\geqslant a_n/S_n$故我们来证$\alpha=1$的时候发散即可

因为$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}\geqslant\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}\to 1(p\to+\infty)$

所以由级数收敛柯西准则知道$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散.所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$发散$(\forall\alpha\leqslant 1)$.

exercise 6.14 设$\{a_n\}$是递减的正数列.证明:

1.级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$同收玫.

2.证明:(1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$当$\alpha>0$时收敛,当$\alpha\leqslant 0$时发散;(2)$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散.

proof 因为

$$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}\left(a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots\right)=a_1+a_2+2a_4+4a_8+\cdots$$
$$\leqslant a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_7+\cdots$$
$$\leqslant a_1+2a_2+4a_4+\cdots,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$同敛散.

(1)这是因为$2^n/(2^n)^{1+\alpha}=1/(2^\alpha)^n$.(2)这是因为$2^n/(2^n\ln 2^n)=1/(n\ln 2)$.

exercise 6.15

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一个正项级数.如果存在正数$\alpha$和$\beta$, 使得$a_n-a_{n+1}\geqslant \beta a_n^{2-\alpha}$

proof 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$, 而且$\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n=O\left(a_N^\alpha\right)(N\to\infty)$.

因为$0<a_{n+1}\leqslant a_n\left(1-\beta a_n^{1-\alpha}\right)\leqslant a_n$, 所以由单调有界原理知$\{a_n\}$收玫, 设其极限为$a$.

于是有$0\leqslant a\leqslant a\left(1-\beta a^{1-\alpha}\right)\leqslant a$, 从而$a=0$, 进而由$1-\beta a_n^{1-\alpha}>0$知$\alpha\leqslant 1$.

现在取足够大的N_0使得当$n>N_0$时成立$\beta a_n^{1-\alpha}<1$

于是利用伯努利不等式可得$a_{n+1}^\alpha\leqslant a_n^\alpha\left(1-\beta a_n^{1-\alpha}\right)^\alpha<a_n^\alpha\left(1-\alpha\beta a_n^{1-\alpha}\right)=a_n^\alpha-\alpha\beta a_n$

从而由$\alpha\beta\sum\limits_{n=N_0}^{\infty}a_n\leqslant\sum\limits_{n=N_0}^{\infty}\left(a_n^\alpha-a_{n+1}^\alpha\right)=a_{N_0}^\alpha$知级数收敛的余和准则与$a_n\to 0$知道$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收玫

又由$\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n\leqslant\dfrac{a_N^\alpha}{\alpha\beta}$知当$N\to\infty$时$\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n=O\left(a_N^\alpha\right)$.

exercise 6.16 证明：若级数$\sum a_n$收敛, $\sum(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛, 则级数$\sum a_nb_n$也收敛

proof 要证$\sum a_nb_n$收敛，即考察(*)$\left|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}\right|<\varepsilon$由$Abel$变换知

$$a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}=b_{n+p}A_{n+p}-\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\left(b_{i+1}-b_i\right)A_i\quad\left(A_k=a_{n+1}+\cdots+a_k,A_n=0\right)$$

所以(*)$\leqslant\left|b_{n+p}\right|\left|A_{n+p}\right|+\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1}\left(b_{i+1}-b_i\right)A_i\right|$(1)

由题干知道$\sum(b_{n+1}-b_n)$绝对收敛$\Rightarrow\sum(b_{n+1}-b_n)$自然也收敛设为$B$；那么$B=\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}-b_1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}b_{n+1}=B+b_1$

$\Rightarrow\{b_n\}$有界

$A_i=S_i-S_n$又$\sum a_n$收敛那么S_n有界, 那么$|A_i|\leqslant 2\,|S_n|$

$\Rightarrow|A_i|$有界。设以上共同的界为M

由$\sum a_n$收敛那么有柯西收敛准则：$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+l}|<\varepsilon\,(A_{n+l}<\varepsilon)$；另有$\sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1}|(b_{i+1}-b_i)|<\varepsilon\,(n\to\infty)$

那么(1)$\leqslant M\varepsilon+M\varepsilon=2M\varepsilon$

综上证毕

exercise 6.17

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$$

proof 由狄利克雷判别法.因为 $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$, 所以该级数收玫.

exercise 6.18

判断以下级数的敛散性 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

proof 由可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\cos 3n)/n$ 收敛.而数列 $\{(1+1/n)^n\}$ 单调有界.由$Abel$判别法可知原级数收敛.

exercise 6.19

判断以下级数的玫散性: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}$

proof 由于 $\sin^2 n=(1-\cos 2n)/2$.因此只需分别研究 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}$.

由于$\{1/n\}$递减趋于零, 由$Leibniz$判别法可知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1/n)$收敛.

由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+n\pi)}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2+\pi)}{n}$.

由可知级数以上级数也收敛.于是可知原级数收敛.

exercise 6.20

如果正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散, 证明 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1$

proof

因为正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散, 所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=+\infty$.

又 $\dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\dfrac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$,

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}=1.$

exercise 6.21

设$a_n>0$.证明 : 如果 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$, 那么交错级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收玫.

proof 易见当n足够大时 $\{a_n\}$ 是递减的.因为 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^{\lambda/4}-1}{1/n}=\frac{\lambda}{4}<\frac{\lambda}{2}$

所以当n足够大时有 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\lambda/4}<1+\dfrac{\lambda/2}{n}$.

由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(a_n/a_{n+1}-1)=\lambda$知当$n$足够大时有$n(a_n/a_{n+1}-1)>\lambda/2$.

因此存在$N>0$使得当$n\geqslant N$时有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1+\dfrac{\lambda/2}{n}>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\lambda/4}=\dfrac{(n+1)^{\lambda/4}}{n^{\lambda/4}}$

进而$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\dfrac{a_{N+1}}{a_N}a_N<\dfrac{a_N N^{\lambda/4}}{n^{\lambda/4}}\to 0(n\to\infty)$.

因此由莱布尼茨判别法知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 是收敛的.

exercise 6.22

设 $\{a_n\}$ 是一个正数列.如果对 $0<\alpha<1$, 有 $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0$ 或极限是 $+\infty$

证明：对任意的正整数 k, $\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n<+\infty$.

proof 对每个正整数 k, 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^{k+2}-1}{1/n}=k+2<k+3$

所以当 n 足够大时有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+2}<1+\frac{k+3}{n}$

因为 $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha}n^{\alpha}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$

所以当 n 足够大时有 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>k+3$.

因此存在 $N>0$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1+\frac{k+3}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+2}=\frac{(n+1)^{k+2}}{n^{k+2}}$,

现在针对 $\sum_{n=1}^{\infty} n^k a_n$ 级数我们利用 $Rabbe$ 判别法 $n\left(\frac{n^k a_n}{(n+1)^k a_{n+1}}-1\right)$ 带入 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>\frac{(n+1)^{k+2}}{n^{k+2}}$

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^k a_n}{(n+1)^k a_{n+1}}-1\right)>2>1$ 所以收敛

exercise 6.23

设 $a_n\neq 0, n=1,2,\cdots$, $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)=p>1$, 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛

proof 任取 $r\in(1,p)$, 由保号性, 存在正整数 N, 当 $n\geq N$ 时, 有 $n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)>r$, 也就是 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1-\frac{r}{n}, n\geq N$

而由伯努利不等式可知 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^r\geq 1-\frac{r}{n}$, 因此 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^r=\frac{(n-1)^r}{n^r}, n\geq N$.

特别地, 当 $n>N$ 时, 有

$|a_n|=|a_N|\cdot\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}\cdot\frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|}\cdots\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}<|a_N|\cdot\frac{(N-1)^r}{N^r}\cdot\frac{N^r}{(N+1)^r}\cdots\frac{(n-2)^r}{(n-1)^r}=\frac{|a_N|(N-1)^r}{(n-1)^r}$

而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|a_N|(N-1)^r}{(n-1)^r}$ 收玫, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

注 也可以利用上面一题的方法构造这里从略

exercise 6.24

设 $a>0, b>0$.利用 $Raabe$ 判别法

证明：当 $b-1>a$ 时, 级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$ 收玫, 其和为 $\frac{b-1}{b-a-1}$.当 $b-1\leqslant a$ 时, 收玫情况如何?

proof 因为 $n\left(\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}/\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}-1\right)=b-a$

所以当 $b-1>a$ 时该级数收玫.

为了求出这个级数的和, 记 $a_n=\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$, 那么 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

由 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+n}{a+n}>\frac{a+1+n}{a+n}>1$ 知 $\{a_n\}$ 是递减的, 所以 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

从 $\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{b-a}{a+n}$ 整理可以得到 $a(a_n-a_{n+1})+n(a_n-a_{n+1})=(b-a)a_{n+1}$

再对n求和得到$a\left(a_1-a_{n+1}\right)+\left(a_1+\cdots+a_n-na_{n+1}\right)=(b-a)\left(a_2+\cdots+a_{n+1}\right)$.

令$n\to\infty$就得到$\dfrac{a^2}{b}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=(b-a)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-\dfrac{a}{b}\right)$

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{a}{b-a-1}$.

因此$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=1+\dfrac{a}{b-a-1}=\dfrac{b-a}{b-a-1}$.

当$b-1=a$时,$\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}=\dfrac{a}{a+n}\sim\dfrac{a}{n}(n\to\infty)$,所以级数发散.

当$b-1<a$时由拉贝判别法知级数发散.

exercise 6.25

设$\{a_n\}$是一个递增的正数列.

证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$收攻的充分必要条件是$\{a_n\}$有界.

proof 因为$\{a_n\}$是递增正数列所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$是一个正项级数

当$\{a_n\}$有界时,设$a_n\leqslant M$,那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_1}\leqslant\dfrac{M-a_1}{a_1}$

由正项级数有界判别法知道知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$收敛.

当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$收攻时,假设$\{a_n\}$是无界的,那么$\{a_n\}$发散到$+\infty$

于是$\sum\limits_{n=m}^{m+p}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant\sum\limits_{n=m}^{m+p}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{m+p+1}}=1-\dfrac{a_m}{a_{m+p+1}}\longrightarrow1(p\to+\infty)$

这蕴含着$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$发散,矛盾!因此$\{a_n\}$有界.

exercise 6.26

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收玫.

proof 因为

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}>\frac{2k+1}{(k+1)^2-1}>\frac{2k+3}{(k+1)^2}$$
$$>\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+2)^2-1},$$

所以由莱布尼茨判别法知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{n}$ 是收敛的.

又因为 $\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}=\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor-1}(-1)^k\sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{n}+(-1)^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor}\sum_{n=\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2}^{N}\frac{1}{n}$

而 $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=\lfloor\sqrt{N}\rfloor^2}^{N}\frac{1}{n}=0$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ 收玫.

proof $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)$

其中

$$a_k=\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right)=\underbrace{\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+k-1}}+\underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}$$

$\Longrightarrow a_k<\frac{k}{k^2}+\frac{k+1}{k^2+k}=\frac{2}{k}$

另一方面 $a_k>\frac{k}{k^2+k-1}+\frac{k+1}{(k+1)^2-1}>\frac{2}{k+1}>a_{k+1}$

故 $\{a_k\}$ 为单调, 且趋于0

故由狄利克雷判别法即可

exercise 6.27

证明：如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$ 收玫, 令 $b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}$, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收玫, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

proof $b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}}{n}-\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n+1}+a_n\ (n\geqslant 2)$

所以 $\sum_{n=1}^{N}b_n=b_1+\frac{a_1}{2}-\frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{N+1}+(a_2+\cdots+a_N)=\sum_{n=1}^{N}a_n-\frac{a_1+2a_2+\cdots+Na_N}{N+1}$

那么令 $N\to\infty$ 就有 $\sum_{n=1}^{N}b_n=S-0=S\ (N\to\infty)$ (后一半部分是由级数收敛的下标加权平均趋于零得到的)

故证毕

exercise 6.28

试作一个收玫级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 发散.

proof 取 $a_n=\frac{\cos(2n\pi/3)}{\sqrt[3]{n}}$, 那么由狄利克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收玫的.

由于 $\cos^3\left(\frac{2n\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 是发散的.

exercise 6.29

把级数$1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}-\frac{1}{6^\alpha}+\cdots\quad(0<\alpha<1)$的项重新安排如下：
先依次取p个正项,接着依次取q个负项,再接着依次取p个正项,如此继续下去.
证明：所得的新级数收玫的充分必要条件为$p=q$;当$p>q$时,新级数发散到$+\infty$,当$p<q$时,新级数发散到$-\infty$.

proof 记$A=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}\right)$那么根据面积原理一节

可得$\frac{1}{(n-1)^\alpha}\geqslant\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}-A\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}-\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}-A\right|$

进而$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+A-\frac{1}{1-\alpha}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

用$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$表示重排后的级数,并记$m_N=\lfloor N/(p+q)\rfloor$,那么

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{m_N(p+q)}a_n+\sum_{n=m_N(p+q)+1}^{N}a_n$$

由于$\left|\sum\limits_{n=m_N(p+q)+1}^{N}a_n\right|\leqslant\sum\limits_{n=m_N(p+q)+1}^{N}|a_n|\leqslant\frac{p+q}{(m_N(p+q))^\alpha}=\frac{(p+q)^{1-\alpha}}{m_N^\alpha}\to0(N\to\infty)$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{m_N(p+q)}a_n=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{(2k-1)^\alpha}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{(2k)^\alpha}\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^\alpha}-\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{(2k)^\alpha}-\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{(2k)^\alpha}\right)=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2mp}\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}\sum_{k=1}^{mp}\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}\sum_{k=1}^{mq}\frac{1}{k^\alpha}\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{(2mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+O\left(\frac{1}{(2mp)^\alpha}\right)-\frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{(mp)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+O\left(\frac{1}{(mp)^\alpha}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{(mq)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\beta+O\left(\frac{1}{(mq)^\alpha}\right)\right)\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\left(p^{1-\alpha}-q^{1-\alpha}\right)m^{1-\alpha}}{2^\alpha(1-\alpha)}+\beta\left(1-2^{1-\alpha}\right)+O\left(\frac{1}{m^\alpha}\right)\right)\\
&=\begin{cases}\beta\left(1-2^{1-\alpha}\right), & p=q\\ +\infty, & p>q.\\ -\infty, & p<q\end{cases}
\end{aligned}$$

exercise 6.30

$\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots(p>0,q>0)$.探究该级数的收敛性

proof 用$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$表示原级数.

1.当$p>1$且$q>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$都收玫,所以原级数绝对收敛.

2.当p和q中只有一个大于1时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$一个是收敛的一个是发散到$\infty$的,所以原级数发散.

3.当$0<p=q\leqslant1$时,易见原级数条件收敛.

4.当$0<p\neq q\leqslant1$时,因为$\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right)=\sum\limits_{n=1}^{2N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}+\sum\limits_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right)$

而$\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}$是恒号的且.$\left|\dfrac{1}{(2n)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}\right|=\dfrac{(2n)^{|q-p|}-1}{2^{\max\{p,q\}}}\dfrac{1}{n^{\max\{p,q\}}}\geqslant\dfrac{2^{|q-p|}-1}{2^{\max\{p,q\}}}\dfrac{1}{n^{\max\{p,q\}}}$

又$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$收玫,所以原级数发散.

因此原级数在$p>1$且$q>1$时绝对收敛,在$0<p=q\leqslant 1$时条件收玫,在其他情况下发散.

若$0<p<q\leq 1$,则$\dfrac{1}{(2n-1)^p}-\dfrac{1}{(2n)^q}\sim\dfrac{1}{(2n-1)^p}(n\to\infty)$通过比较原则也可以知道$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}\right]$发散

故原级数的两项配对后发散,则原级数也发散.(可以看成一个偶数子列发散)

同理$0<q<p\leqslant 1$也发散

exercise 6.31

如果改变调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$中项的符号,使得$p$个正项之后跟$q$个负项,但不变更原来的次序.

证明:新的级数当且仅当$p=q$时收玫.

proof 用S_n表示新级数的部分和.

当$p>q$时,因为

$$\begin{aligned}&S_{m(p+q)}\\=&\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{(k-1)(p+q)+1}+\cdots+\frac{1}{(k-1)(p+q)+p}-\frac{1}{kp+(k-1)q+1}-\cdots-\frac{1}{k(p+q)}\right)\\>&\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k-1)(p+q)+p}>\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)p}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\to+\infty(m\to\infty),\end{aligned}$$

而$\left|S_N-S_{(p+q)\lfloor N/(p+q)\rfloor}\right|<\dfrac{p+q}{(p+q)\lfloor N/(p+q)\rfloor+1}\to 0(N\to\infty)$

所以$\lim\limits_{N\to\infty}S_N=+\infty$,即原级数发散到$+\infty$.

当$p<q$时,因为

$$\begin{aligned}&S_{m(p+q)+p}-S_p\\=&\sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{kp+(k-1)q+1}-\cdots-\frac{1}{k(p+q)}+\frac{1}{k(p+q)+1}+\cdots+\frac{1}{k(p+q)+p}\right)\\<&-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k(p+q)}=-\frac{1}{p+q}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\to-\infty(m\to\infty),\end{aligned}$$

而$\left|S_N-S_{(p+q)\lfloor(N-p)/(p+q)\rfloor+p}\right|<\dfrac{p+q}{(p+q)\lfloor(N-p)/(p+q)\rfloor+p+1}\to 0(N\to\infty)$

所以$\lim\limits_{N\to\infty}S_N=-\infty$,即原级数发散到$-\infty$.

当$p=q$时,新的级数可以写成$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lceil n/p\rceil-1}}{n}$,由$p$阶莱布尼兹判别法知该级数是收玫的.

exercise 6.32

已知:$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛;$b_n\to 0$.证明:$(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)\to 0$

proof 由题知$\forall\varepsilon>0;\exists N>0;\forall n\geqslant N\ \ st.|a_n|+|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+k}|<\varepsilon$且$|b_n|<\varepsilon$

$\exists M>0;\ \ st.\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<M;|b_n|<M$

此时当$n\to\infty$ $(n>2N$时$)$

$|a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1|$

$\leqslant |a_1||b_n| + \cdots + |a_n||b_1| = (|a_1||b_n| + \cdots + |a_{N-1}||b_{n-N+2}|) + (|a_N||b_{n-N+1}| + \cdots + |a_n||b_1|) < \varepsilon M + \varepsilon M = 2M\varepsilon$
故证毕

exercise 6.33

如果对任意一个趋于0的数列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收玫, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定绝对收玫

试证之.如果把条件中的任意一个趋于0的数列改为任意一个递减趋于0的数列, 结论是否成立?

proof 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 不是绝对收玫的, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$.于是存在 $k_1 > 1$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{k_1} |a_n| > 1$.

一般地, 存在 $k_i > k_{i-1}$ 使得 $\sum\limits_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} |a_n| > i, i = 1, 2, ...; k_0 = 0$.

现在当 $k_{i-1} < n \leqslant k_i$ 时取 $x_n = \dfrac{sgn a_n}{i}$, 那么 $\{x_n\}$ 是趋于零的, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收玫

进而可以对级数加括号写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} a_n x_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i} \sum\limits_{n=k_{i-1}+1}^{k_i} |a_n| > \sum\limits_{i=1}^{\infty} 1 = +\infty$

矛盾!因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是绝对收玫的.

当条件修改后结论一般不成立, 比如取 $a_n = (-1)^n$.

exercise 6.34

设 $|q| < 1$.证明: $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$.

proof

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 与其自身的柯西乘积, 而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ 是绝对收玫的

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n\right)^2 = \dfrac{1}{(1-q)^2}$

exercise 6.35

证明 : 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^\alpha}, \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n^\beta} (\alpha > 0, \beta > 0)$

的 $Cauchy$ 乘积当 $\alpha + \beta > 1$ 时收敛, 当 $\alpha + \beta \leqslant 1$ 时发散.

proof 由莱布尼茨判别法知这两个级数都是收玫的.

记 $(-1)^{n-1}/n^\alpha = a_n$ 而 $(-1)^{n-1}/n^\beta = b_n$, 再令 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$

那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的柯西乘积.

当 $\alpha + \beta \leqslant 1$ 时, 因为 $|c_n| = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha (n+1-k)^\beta} \geqslant \dfrac{n}{n^{\alpha+\beta}} \geqslant 1$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 考虑到

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{k^\alpha (n+1-k)^\beta} + \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{k^\alpha (n+1-k)^\beta} \leqslant \frac{1}{\lfloor n/2 \rfloor^\beta} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{\lfloor n/2 \rfloor^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}$$

而 $\frac{1}{\lfloor n/2\rfloor^{\beta}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}=\begin{cases}O\left(1/n^{\alpha+\beta-1}\right), & \alpha\neq 1\\ O\left(n^{-\beta}\ln n\right), & \alpha=1\end{cases}$ $\quad \frac{1}{\lfloor n/2\rfloor^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}=\begin{cases}O\left(1/n^{\alpha+\beta-1}\right), & \beta\neq 1\\ O\left(n^{-\alpha}\ln n\right), & \beta=1\end{cases}$

所以 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$.

另一方面,因为

$$c_{2n}=-\left(\sum_{k=1}^{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}\right)\frac{1}{k^{\alpha}(2n+1-k)^{\beta}}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+1-k)^{\beta}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}(2n+1-k)^{\alpha}},$$

$$c_{2n+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\right)\frac{1}{k^{\alpha}(2n+2-k)^{\beta}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}(2n+2-k)^{\beta}}+\sum_{k=n+1}^{n+1}\frac{1}{k^{\beta}(2n+2-k)^{\alpha}},$$

所以

$$\left|c_{2n}+c_{2n+1}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\beta}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\beta}}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\alpha}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\alpha}}\right)-\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}\right|$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\beta}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\beta}}\right)+\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(2n+1-k)^{\alpha}}-\frac{1}{(2n+2-k)^{\alpha}}\right)+\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}\right.$$

通过求导易知对于正数σ,函数$1/x^{\sigma}-1/(x+1)^{\sigma}$当$x>0$时是递减的,从而

$$\left|c_{2n}+c_{2n+1}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}-\frac{1}{(n+2)^{\beta}}\right)+\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\right)\right)+\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\beta}}.$$

注意到: $\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}-\frac{1}{(n+2)^{\sigma}}=O\left(\frac{1}{n^{\sigma+1}}\right)$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\beta}}-\frac{1}{(n+2)^{\beta}}\right)=\begin{cases}O\left(1/n^{\alpha+\beta}\right), & \alpha\neq 1\\ O\left(n^{-\beta-1}\ln n\right), & \alpha=1\end{cases},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\beta}}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}\right)=\begin{cases}O\left(1/n^{\alpha+\beta}\right), & \beta\neq 1\\ O\left(n^{-\alpha-1}\ln n\right), & \beta=1\end{cases},$$

由此可见 $\left\{\sum_{n=1}^{2N+1}c_n\right\}$ 收玫.结合 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$知 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

exercise 6.36

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$

(2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

proof (1) : $LHS=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2}=\frac{2}{\pi}$ (由$Wallias$公式即可)

$$(2):LHS=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{(2n+2)\,2n}{(2n+1)^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{(2N)!!\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2N+2}{[(2N+1)!!]^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{[(2N)!!]^2}{[(2N+1)!!]^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2N+2}{1}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{[(2N)!!]^2}{[(2N-1)!!]^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2N+2}{(2N+1)^2}=\underbrace{\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2N+1}\frac{[(2N)!!]^2}{[(2N-1)!!]^2}\right)}_{\text{由}Wallias\text{公式}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2N+2}{2N+1}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

exercise 6.37

证明:若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<+\infty$,则$\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n$收玫,其中$\cos a_n\neq 0$.

proof $\prod_{n=1}^{\infty}\cos a_n=\prod_{n=1}^{\infty}1+(\cos a_n-1)$而$(\cos a_n-1)$定号所以我们来看$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos a_n-1)$的收敛性

来看 $-\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{a_n}{2}$的收敛性而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛且$\left|2\sin^2\frac{a_n}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}a_n^2$所以$\sum_{n=1}^{\infty}2\sin^2\frac{a_n}{2}$收敛

所以$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos a_n$收敛。

exercise 6.38

证明：$\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\dfrac{\pi}{2}$.

proof 我们来证明：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\cdots\cdot=\dfrac{2}{\pi}$

在$exercise7.4$中我们证明过$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}\quad(x\neq 0)$于是我们取$x=\dfrac{\pi}{2}$则证毕

exercise 6.39

设$a_1=1,a_n=n\left(a_{n-1}+1\right)(n=2,3,\cdots)$.证明：$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)=\mathrm{e}$.

proof

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k+1}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k+1}/(k+1)}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(a_1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}\end{aligned}$$

exercise 6.40

$$设a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & n=2k-1\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & n=2k.\end{cases}$$

证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$都发散，但$\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$收玫.

proof

$\sum\limits_{n=1}^{2N}a_n=\sum\limits_{n=1}^{N}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}\to+\infty(N\to\infty)$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

因为$a_{2n-1}^2+a_{2n}^2>1/n$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$发散.

此时$1+a_2=4$

我们先计算$\prod\limits_{n=3}^{2N}(1+a_n)=\prod\limits_{n=2}^{N}(1+a_{2n-1})(1+a_{2n})=\prod\limits_{k=2}^{N}\dfrac{k^2-1}{k^2}=\prod\limits_{k=2}^{N}\dfrac{k-1}{k}\dfrac{k+1}{k}=\dfrac{N+1}{2N}$

故$\prod\limits_{n=2}^{2N}(1+a_n)=2\dfrac{N+1}{N}\to 2\,(N\to\infty)$

此时$\prod\limits_{n=2}^{2N+1}(1+a_n)=2\dfrac{N+1}{N}\cdot(1+a_{2N+1})=2\dfrac{N+1}{N}\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{N+1}}\right)\to 2\,(N\to\infty)$

故$\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$收敛到2

exercise 6.41

证明：$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=0$.由此证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}=0$.

proof 我们证明一个无穷乘积发散到零,我们只需考虑$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$发散到$-\infty$

考察通项 : $\ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\,(n\to\infty)$

$\ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)(n\to\infty)$ 故发散

所以$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0$

进一步我们有 $\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0\Longrightarrow e^{-k}\frac{k^k}{k!}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}=0\Longrightarrow e^{-k}\frac{k^k}{k!}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=0\,(k\to\infty)$

$\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}=0.$

exercise 6.42

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)$在$x=x_0$(非整数) 处收玫,证明 : 它对所有的$x$都收玫.

proof

记$b_n=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)}{\left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2-2^2\right)\cdots\left(x_0^2-n^2\right)}$

那么$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{x^2-(n+1)^2}{x_0^2-(n+1)^2}$, 所以当$n$足够大时$\{b_n\}$是单调的.

又因为$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}\right)$而$n$充分大时$\frac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}$定号所以该无穷乘积与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}$同敛散

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^2-x^2}{n^2-x_0^2}$收敛; 所以无穷乘积收敛$\Longleftrightarrow b_n$有极限$\Longrightarrow b_n$有界

于是根据阿贝尔判别法, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x^2-1\right)\left(x^2-2^2\right)\cdots\left(x^2-n^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2-2^2\right)\cdots\left(x_0^2-n^2\right)b_n$收敛。

exercise 6.43

证明 : 设正数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+O(b_n)\quad(n\to\infty)$, 这里$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是一个绝对收玫级数, 那么$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

proof

由题$a_N=\frac{a_1}{\prod_{n=1}^{N}a_n/a_{n+1}}$

而$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}\left(1+\frac{n}{n+1}O(b_n)\right)$ 所以$a_N=\frac{a_1}{(N+1)\prod_{k=1}^{N}\left[1+(k/(k+1))O(b_k)\right]}$

此时断言$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+(k/(k+1))O(b_k)\right]=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{k+1}O(b_k)\right)$收敛.进一步断言$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left|\frac{k}{k+1}O(b_k)\right|\right)$收敛

而$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left|\frac{k}{k+1}O(b_k)\right|\right)$敛散性与$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+1}O(b_k)\right|$相同; 我们来证$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+1}O(b_k)\right|$收敛

$\left|\frac{k}{k+1}O(b_k)\right|\leqslant\underbrace{2\left|O(b_k)\right|\leqslant 2l\left|b_k\right|}_{\left|\frac{O(b_k)}{b_k}\right|\leqslant l(k充分大)}$而$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是一个绝对收敛的级数

所以$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{k}{k+1}O\left(b_k\right)\right|$收敛$\Longrightarrow\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\left|\frac{k}{k+1}O\left(b_k\right)\right|\right)$收敛$\Longrightarrow\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{k+1}O\left(b_k\right)\right)$收敛到$A$

所以当$N\to\infty$时我们有估计：$a_N=\dfrac{a_1}{(N+1)\prod_{k=1}^{N}\left[1+(k/(k+1))\,O\left(b_k\right)\right]}\sim\dfrac{a_1}{(N+1)\,A}$

故$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

exercise 6.44

判断以下级数的敛散性 : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n, \quad x \geq 0.$

proof 当$x=0$时级数显然收敛, 且和为零. 当$x>0$时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)x=+\infty$. 由正项级数的$D'Alembert$判别法可知原级数趋于$+\infty$.

exercise 6.45

判断以下级数的敛散性 : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}x^n, \quad x \geq 0$

proof 当$x=0$时级数显然收敛, 且和为零.

当$x>0$时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{n!x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{(1+1/n)^n}=\dfrac{x}{\mathrm{e}}$.

由正项级数的$D'Alembert$判别法可知, 当$x>\mathrm{e}$ 时原级数趋于$+\infty$. 当$0<x<\mathrm{e}$ 时原级数收敛.

当$x=\mathrm{e}$ 时, 由$Stirling$公式可知$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \iff \dfrac{n!}{n^n}\mathrm{e}^n\sim\sqrt{2n\pi}$因此此时级数发散.

以上级数定义了一个函数, 它的定义域是 $[0,\mathrm{e})$.

exercise 6.46

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛. 则以下级数收敛$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\alpha+1}b_n, \quad \alpha\geq 0.$

proof 把级数拆成两部分 : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^\alpha}{n^\alpha+1}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n^\alpha+1}$.

只需证明第二部分收玫. 由于$1/(n^\alpha+1)$ 单调有界且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收玫, 由$Ablel$判别法可知, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n/(n^\alpha+1)$ 收敛.

于是可知原级数也收玫.

exercise 6.47

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛。则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)$也一定绝对收敛

proof 记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$; 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，所以$a_1+a_2+\cdots+a_n$部分和是有极限的。那么当足够多的项是有界

那么前面有限项也是有界的，所以不防设 $|a_1+\cdots+a_n|<M\ \forall n>0$

从而$0\leqslant|a_n\left(a_1+\cdots+a_n\right)|<M\,|a_n|$ 而因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛那么$M\,|a_n|$ 该组成的数项级数收敛

那么由正项级数判别法知道该级数也绝对收敛

exercise 6.48

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛， $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$; 证明 : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

proof 记级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)$的部分和为$S_n$不难算出$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-(n+1)\,a_{n+1}+a_{n+1}$

对上面式子取极限。因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\to A$ 且有通项$a_n\to 0$; 那么有$S_n\to A-0+0=A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

✍ **exercise 6.49**

proof

✍ **exercise 6.50**

proof

✍ **exercise 6.51**

proof

6.2 函数项级数

6.2.1 一般函数项级数

exercise 6.52

1.设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在有界闭区间$[a,b]$上收敛于$S(x)$.

如果$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$都是$[a,b]$上的非负连续函数

证明：$S(x)$必在$[a,b]$上取到最小值.

2.第1题中的$S(x)$是否一定能取到最大值?

3.把第1题中的有界闭区间换成开区间或无穷区间,结论是否还成立?

proof 1.因为$S(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \geqslant 0$,所以$S(x)$有下确界,记为$\alpha$.

于是对每个正整数n都存在$x_n \in [a,b]$使得$\alpha \leqslant S(x_n) < \alpha + 1/n$,即$\lim_{n\to\infty} S(x_n) = \alpha$.

因为$\{x_n\}$有界,所以有收敛子列$\{x_{n_k}\}$,其极限设为x_0.

由于$\sum_{i=1}^{n} u_i(x_{n_k}) \leqslant S(x_{n_k}) < \alpha + \frac{1}{n_k}$

于是令$k\to\infty$并利用连续性得到$\sum_{i=1}^{n} u_i(x_0) \leqslant \alpha$.

再令$n\to\infty$就得到$S(x_0) \leqslant \alpha$.又因为$S(x_0) \geqslant \alpha$,所以$S(x_0) = \alpha$,即$S(x)$取到了最小值α.

2.不一定.比如取$f_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1-1/n \\ (1-n)(x-1), & 1-1/n < x \leqslant 1 \end{cases}, n \geqslant 1; f_0(x) = 0,$

再取$u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$

那么$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$,它在$[0,1]$上取不到最大值.

3.答换成开区间不一定成立,比如在$(0,1)$上取$u_n(x) = x^n$.

换成无穷区间更不一定成立,比如取$u_n(x) = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})x$.

exercise 6.53 对任意的正整数n,证明：当$x \in (0,\pi)$时,恒有$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} > 0$.

proof 若不然,那么$m = \min\left\{n \ : \text{存在} x_0 \in (0,\pi) \text{使得} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx_0}{k} \leqslant 0\right\}$是定义良好的.

设$S_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin kx}{k}$.

因为有$x_0 \in (0,\pi)$使得$S_m(x_0) \leqslant 0 = S_m(0) = S_m(\pi)$

$\Longrightarrow S_m(x)$在$(0,\pi)$上能取到最小值,不妨设x_0就是其最小值点.

由m的最小性知$S_{m-1}(x_0) > 0$,所以$\sin mx_0 < 0$

这意味着$\sin(mx_0/2) \neq 0$和$\cos((m+1)x_0/2) \neq 0$.

一方面是因为$\sin(mx_0) = 2\sin\left(\frac{mx_0}{2}\right)\cos\left(\frac{mx_0}{2}\right)$

另一方面因为$\cos((m+1)x_0/2) = 0 \Rightarrow (m+1)x_0 = (2n+1)\pi \Rightarrow \sin mx_0 = \sin((2n+1)\pi - x_0) = \sin x_0 > 0$.

由费马定理知$0 = S_m'(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \cos kx_0 = \frac{\cos((m+1)x_0/2)\sin(mx_0/2)}{\sin(x_0/2)} \neq 0$,矛盾!

exercise 6.54 1.设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在有界闭区间 $[a,b]$上收敛于$S(x)$.如果$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$都是 $[a,b]$上的非负连续函数
证明 : $S(x)$必在 $[a,b]$上取到最小值.
2.第1题中的$S(x)$是否一定能取到最大值?
3.把第1题中的有界闭区间换成开区间或无穷区间,结论是否还成立?

proof 1.证明因为$S(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \geqslant 0$, 所以$S(x)$有下确界, 记为$\alpha$.
于是对每个正整数n都存在$x_n \in [a,b]$使得$\alpha \leqslant S(x_n) < \alpha + 1/n$, 即 $\lim_{n\to\infty} S(x_n) = \alpha$.
因为 $\{x_n\}$ 有界, 所以有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 其极限设为x_0.
由于$\sum_{i=1}^{n} u_i(x_{n_k}) \leqslant S(x_{n_k}) < \alpha + \frac{1}{n_k}$于是令$k \to \infty$并利用连续性得到$\sum_{i=1}^{n} u_i(x_0) \leqslant \alpha$.
再令$n \to \infty$就得到$S(x_0) \leqslant \alpha$.又因为$S(x_0) \geqslant \alpha$, 所以$S(x_0) = \alpha$, 即$S(x)$取到了最小值α.

2.答不一定.比如取$f_n(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 - 1/n \\ (1-n)(x-1), & 1 - 1/n < x \leqslant 1 \end{cases}$ $, n \geqslant 1; f_0(x) = 0,$

再取$u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, 那么$S(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, 它在 $[0,1]$上取不到最大值.

3.答换成开区间不一定成立, 比如在 $(0,1)$上取$u_n(x) = x^n$.
换成无穷区间更不一定成立, 比如取$u_n(x) = (1/n - 1/(n+1))x$.

exercise 6.55
设函数列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$在区间I上一致收敛.如果对每个$n = 1,2,\cdots$, f_n和g_n都是I上的有界函数 (不要求 – 致有界)
证明 : $\{f_n g_n\}$在I : 必一致收敛.

proof 设$\{f_n\}$的极限函数是f, 那么存在$N > 0$使得当$n \geqslant N$时对一切的$x \in I$都有 $|f_n(x) - f(x)| < 1$.
于是$|f(x)| < |f_N(x)| + 1 \leqslant M + 1$, 其中$M$是$f_N$的一个上界.因此$f$也是有界的.
同理, $\{g_n\}$的极限函数g也是有界的.当$n \geqslant N$时也有 $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| + 1 \leqslant M + 2$.
由此可见$\{f_n\}$是一致有界的, 用M'表示它们和f, g共同的界.
对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$使得当$n > N$时对一切的$x \in I$都有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M'}$, $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M'}$.
于是 $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
因此$\{f_n g_n\}$在I上一致收敛, 且极限函数就是fg.

exercise 6.56
已知函数列$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$f(x)$, 且对于每一个正整数n, $f_n(x)$均在I上一致连续
证明 : $f(x)$在I上也一致连续.

proof 由于$\{f_n(x)\}$在区间I上一致收敛于$f(x)$, 所以$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数N, 当$n \geq N$时, 对任意的$x \in I$, 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
特别地, 取$n = N$, 对任意的$x \in I$, 都有 $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$.
又由于$f_N(x)$在区间I上一致连续, 所以$\exists \delta > 0$, 当$x', x'' \in I$且 $|x' - x''| < \delta$时, 有 $|f_N(x') - f_N(x'')| < \varepsilon$
于是对任意的$x', x'' \in I$, 当 $|x' - x''| < \delta$时, 有
$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x'')| + |f_N(x'') - f(x'')| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$.
即$f(x)$在区间I上也一致连续.

✍ **exercise 6.57**

已知连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 若 $\{x_n\} \subset [a,b]$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, 证明 : $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(c)$.

proof 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收玫于 $f(x)$, 所以

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时, $\forall x \in [a,b]$, 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 特别地, 也有 $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$.

另外, 根据 $\{f_n(x)\}$ 为连续的函数列可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 特别地, $f(x)$ 也在 c 处连续

所以对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in U(c;\delta) \cap [a,b]$, 就有 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, 所以存在 $N_2 > 0$, 使得 $n > N_2$ 时, 有 $x_n \in U(c;\delta) \cap [a,b]$, 进而也有 $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 可知

$|f_n(x_n) - f(c)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(c)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(c)$.

✍ **exercise 6.58**

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收玫. 如果存在常数 M, 使得对任意的 $x \in [a,b]$ 及一切正整数 n, 都们 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k'(x)\right| \leqslant M$

证明 : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收玫.

proof 记 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x), S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

对任意的 $\varepsilon > 0$, 对区间 $[a,b]$ 作 m 等分, 分点为 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, 其中 $m = \lceil 1/\varepsilon \rceil$.

因为 $\{S_n(x_i)\}$ 是收玫的, 所以存在 $N_i > 0$ 使得当 $n > N_i$ 时 $|S_n(x_i) - S(x_i)| < \varepsilon$.

现在取 $N = \max\{N_0, N_1, ..., N_m\}$, 那么当 $n > N$ 时, 对每个 $x \in [a,b]$ 都存在 i 使得 $|x - x_i| < \varepsilon$

于是 $|S_n(x) - S(x)| \leqslant |S_n(x) - S_n(x_i)| + |S_n(x_i) - S(x_i)| + |S(x_i) - S(x)|$.

其中 $|S_n(x) - S_n(x_i)| = |S_n'(\xi)| |x - x_i| \leqslant M\varepsilon$, 再令 $n \to \infty$ 得到 $|S(x) - S(x_i)| \leqslant M\varepsilon$.

因此 $|S_n(x) - S(x)| < (2M+1)\varepsilon$, 所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收玫.

✍ **exercise 6.59**

证明 : 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}} \cos nx$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

proof 由魏尔斯特拉斯优级数判别法知该级数在 $[0,1/2]$ 上一致收玫.

在 $[1/2,1]$ 上, 考虑 $\dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}} \cos nx = \dfrac{1}{1+x^n} \dfrac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \cos nx$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos nx$ 在 $[1/2,1]$ 上是一致有界的, 而

$$\frac{x^{n+1}}{1+x+\cdots+x^n} \leqslant \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \leqslant \frac{x^n}{n\sqrt[n]{x^{0+1+\cdots+(n-1)}}} = \frac{x^{(n+1)/2}}{n} \leqslant \frac{1}{n},$$

所以由狄利克雷判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \cos nx$ 在 $[1/2,1]$ 上是一致收敛的.

又因为 $\{1/(1+x^n)\}$ 在 $[1/2,1]$ 上一致有界, 且是单调的, 所以由阿贝尔判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+x^n} \dfrac{x^n}{1+x+\cdots+x^{n-1}} \cos nx$ 在 $[1/2,1]$ 上一致收敛

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n-1}} \cos nx$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

exercise 6.60

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $[a,b]$上收玫.如果存在常数M,使得对任意的$x\in[a,b]$及一切正整数n,都仿 $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'(x)\right| \leqslant M$

证明 : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $[a,b]$上一致收玫.

proof 记$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x), S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

$\forall \varepsilon>0$, 对区间 $[a,b]$作m等分, 分点为$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, 其中$m=\lceil 1/\varepsilon\rceil$.

因为 $\{S_n(x_i)\}$ 是收玫的, 所以存在$N_i>0$使得当$n>N_i$时 $|S_n(x_i)-S(x_i)|<\varepsilon$.

现在取$N=\max\{N_0,N_1,\ldots,N_m\}$, 那么当$n>N$时, 对每个$x\in[a,b]$都存在$i$使得 $|x-x_i|<\varepsilon$, 于是

$|S_n(x)-S(x)| \leqslant |S_n(x)-S_n(x_i)|+|S_n(x_i)-S(x_i)|+|S(x_i)-S(x)|$.

其中 $|S_n(x)-S_n(x_i)|=\left|S_n'(\xi)\right||x-x_i| \leqslant M\varepsilon$, 再令$n\to\infty$得到 $|S(x)-S(x_i)| \leqslant M\varepsilon$.

因此 $|S_n(x)-S(x)|<(2M+1)\varepsilon$, 所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$上一致收敛.

这道题是说, 收玫的函数列如果是等度连续的, 那么一定是一致收玫的.

对于等度连续, 换言之就是一致一致连续.事实上, 这道题是阿尔泽拉 − 阿斯科利定理的直接应用.

exercise 6.61

设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列.

证明 : 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$在 $(-\infty,+\infty)$一致收玫 $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} na_n=0$.

proof 当 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$时

令$b_n=\sup_{k\geqslant n}\{ka_k\}$, 那么 $\{b_n\}$ 递减地收玫于零.对每个$x\in(0,\pi]$, 选取正整数N_x使得 $\frac{\pi}{N_x+1}<x\leqslant\frac{\pi}{N_x}$.

把级数的余项分解成 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n\sin nx=\sum_{n=m}^{m+N_x-1} a_n\sin nx+\sum_{n=m+N_x}^{\infty} a_n\sin nx$

那么其中的 $\left|\sum_{n=m}^{m+N_x-1} a_n\sin nx\right| \leqslant x\sum_{n=m}^{m+N_x-1} na_n \leqslant xN_xb_m \leqslant \pi b_m$.

记$D_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin nx=\frac{\cos(x/2)-\cos(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$, 那么利用若尔当不等式可得 $|D_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{\pi}{x}$.

于是由阿贝尔变换有

$$\left|\sum_{n=m+N_x}^{\infty} a_n\sin nx\right|=\left|\sum_{n=m+N_x}^{\infty}(a_n-a_{n+1})D_n(x)-a_{m+N_x}D_{m+N_x-1}(x)\right| \leqslant \frac{2\pi a_{m+N}}{x} \leqslant 2(N_x+1)a_{m+N_x} \leqslant 2b_m.$$

这样我们就得到了对一切的$x\in(0,\pi]$都有 $\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n\sin nx\right| \leqslant (2+\pi)b_m$.

由周期性和奇偶性可知上式对$x\in(-\infty,+\infty)$也成立, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$在 $(-\infty,+\infty)$上一致收玫.

当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$在 $(-\infty,+\infty)$上一致收玫时

对每个正整数N, 取$x=\pi/(2N)$, 那么 $\sum_{n=\lceil N/2\rceil}^{N} a_n\sin nx \geqslant a_N\sin\frac{\pi}{4}\sum_{n=\lceil N/2\rceil}^{N} 1 \geqslant \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}Na_N$

于是由一致收敛的柯西准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

exercise 6.62

证明：$\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n(1-x)}{n\left(1-x^{2n}\right)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

proof 根据均值不等式

$\left|\dfrac{x^n(1-x)}{n\left(1-x^{2n}\right)}\right|=\dfrac{x^n}{n\left(1+x+\cdots+x^{2n-1}\right)}\leqslant\dfrac{x^n}{2n^2\sqrt[2n]{x^{0+1+\cdots+(2n-1)}}}=\dfrac{\sqrt{x}}{2n^2}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2n^2}, x\in[0,2]$

因此由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n(1-x)}{n\left(1-x^{2n}\right)}$ 在 $[0,2]$上一致收敛

进而 $\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n(1-x)}{n\left(1-x^{2n}\right)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n(1-x)}{n\left(1-x^{2n}\right)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

exercise 6.63

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $[a,b]$.上收敛.如果 $|S_n(x)|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant M\quad(a\leqslant x\leqslant b, n=1,2,\cdots)$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $[a,b]$上有界收敛.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $[a,b]$上有界收敛,且对任意的$\delta>0$和$c\in(a,b)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(x)$在 $[a,c-\delta]$和 $[c+\delta,b]$上一致收敛.

证明：如果$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在 $[a,b]$上*Riemann*可积, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$也在 $[a,b]$上*Riemann*可积

而且换序成立 $\displaystyle\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$.

proof 由条件,$\forall\varepsilon>0$和$c\in(a,b)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $[a,c-\varepsilon]$和 $[c+\varepsilon,b]$上一致收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $[a,c-\varepsilon]$和 $[c+\varepsilon,b]$上分别黎曼可积.

于是存在 $[a,c-\varepsilon]$的一个分割$\pi_1: a=x_0'<x_1'<\cdots<x_k'=c-\varepsilon$

于是存在 $[c+\varepsilon,b]$的一个分割$\pi_2: c-\varepsilon=x_0''<x_1''<\cdots<x_m''=b$

使得 $\sum\limits_{\pi_1}\omega_i'\Delta x_i'<\varepsilon$和 $\sum\limits_{\pi_2}\omega_i''\Delta x_i''<\varepsilon$, 其中$\omega_i$是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$对应的振幅.

作 $[a,b]$的分割$\pi: a=x_0'<x_1'<\cdots<x_k'=c-\varepsilon<c-\varepsilon=x_0''<x_1''<\cdots<x_m''=b$

那么 $\sum\limits_{\pi}\omega_i x_i\leqslant\sum\limits_{\pi_1}\omega_i'\Delta x_i'+2\varepsilon M+\sum\limits_{\pi_2}\omega_i''\Delta x_i''<2(1+M)\varepsilon$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 $[a,b]$上黎曼可积.

由题我们有 $\displaystyle\left|\left(\int_a^{c-\varepsilon}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\right)\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^{c-\varepsilon}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\right)u_n(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$

且$\forall N$我们有 $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}u_n(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\sum_{n=1}^{N}u_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\left|\sum_{n=1}^{N}u_n(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant 2M\varepsilon$

令$N\to\infty\Longrightarrow\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}u_n(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 2M\varepsilon$

那么 $\displaystyle\left|\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon+\left|\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}u_n(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant(1+4M)\varepsilon$.

由ε的任意性知 $\displaystyle\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$.

exercise 6.64

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足下列条件：

$(a)\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上收敛于$f(x)$

(b) 级数的每一项$u_n(x)$在$x=x_0$处可微;

(c)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$在$0<|x-x_0|<\delta$上$-$一致收敛.

证明：f在x_0处可微, 而且$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$.

proof 因为$u_n(x)$在$x=x_0$处可微, 所以 $\lim_{x\to x_0} \frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}=u_n'(x_0)$.又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}$在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ 上一致收玫

所以由和函数$Moore-Osgood$定理知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

exercise 6.65

在 $(0,1)$中任取一数列 $\{a_n\}$, 其中两两不相同.

证明：函数$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-a_n|}{2^n}$在 $(0,1)$上连续, 且在$x=a_n(n=1,2,\cdots)$处都不可微, 而在 $(0,1)$中其他点处都可微.

proof 由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum_{n=1}\frac{2^n}{2^n}$ 在 $(0,1)$上一致收玫, 从而和函数$f(x)$连续.

当$x_0\in(0,1)\setminus\{a_n\}$ 时, 每个 $|x-a_n|/2^n$ 在$x=x_0$处是可微的.

同样由魏尔斯特拉斯优级数判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-a_n|-|x_0-a_n|}{2^n(x-x_0)}$ 在x_0的去心邻域上一致收敛.

根据上一题练习题知$f(x)$在$x=x_0$处可微.

当$x_0=a_m$时, 因为$f(x)=\frac{|x-a_m|}{2^m}+\sum_{n\neq m}\frac{|x-a_n|}{2^n}$

其中 $\sum_{n\neq m}\frac{|x-a_n|}{2^n}$ 在$x=a_m$处可微而 $\frac{|x-a_m|}{2^m}$ 在$x=a_m$处不可微, 所以$f(x)$在$x=a_m$处不可微.

exercise 6.66

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$是$-$个发散的正项级数.如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_0+\cdots+a_n}=0$, 证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收玫半径$R=1$.

proof 记$S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, 那么 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=1$, 所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$的收玫半径是1.

因为$S_n x^n\geqslant a_n x^n$, 所以由比较判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收玫半径$R\geqslant 1$.又因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$发散, 所以$R=1$.

exercise 6.67

(1)若$f_n(x)\rightrightarrows f(x), x\in I$, 且$f$在$I$上有界, 则 $\{f_n\}$ 至多除有限项外在I上一致有界的

(2)若$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(n\to\infty), x\in I$, 且对每个正整数$n$, f_n在I上有界, 则 $\{f_n\}$ 在I上一致有界.

proof (1) $\forall\varepsilon>0;\exists N>0,\forall n>N;\forall x\in I$; 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$; 且 $|f|\leqslant M$

特别的取$\varepsilon=1$; 则$\forall x$有 $|f_n(x)|<M+1$

所以至多除去前面N项，剩下的 $\{f_n\}$ 在I上均是一致有界的

(2) $\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0, \forall n > N; \forall x \in I$; 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

特别的取$n = N+1; \varepsilon = 1$则$\forall x, |f(x)| < |f_{N+1}(x)| + 1$又对这个$N+1$由题$f_{N+1}$有界

$\Rightarrow |f(x)|$ 有界的

回到 (1) 得到 $\{f_n\}$ 从第$N+1$项起是一致有界的。前面N项根据题目，对每一个n, f_n都有界

这就可以找到一个最大的界覆盖住，从而一致有界

exercise 6.68

设可微函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$上收敛, $\{f'_n\}$ 在 $[a,b]$上一致有界, 证明 : $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$上一致收敛.

proof 由题干可设$\forall x, \left|f'_n(x)\right| \leqslant M$　已知了$\forall x_0 \in [a,b]; \exists N_1 > 0; \forall p \in N^+; \forall n > N; \left|f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)\right| < \varepsilon$

要证$\forall x; \exists N > 0; \forall n > N; \left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$

我们采用三分法来证明下面进行估计 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + \left|f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)\right| + \left|f_{n+p}(x_0) - f_{n+p}(x)\right|$

我们将 $[a,b]$ 分为小段$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$其中每段$\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{M}$

那么$\forall x$, 总有某个Δx_i包括了x。那么 $|f_n(x) - f_n(x_i)| = \left|f'_n(\xi)(x - x_i)\right| \leqslant M \cdot \Delta x_i < \varepsilon$

那么$\forall x$；$\exists N > 0; \forall n > N$; 有

$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + \left|f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)\right| + \left|f_{n+p}(x_0) - f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$

因而 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛

exercise 6.69

设连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛$f(x)$；而$g(x) \in C_R^0$

证明 : $x \in [a,b]; g\{f_n(x)\} \rightrightarrows g(f(x))$

proof $\because f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists N_1 > 0; \forall n > N_1, \forall x \in [a,b]$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

要证$\exists N > 0; \forall n > N; \forall x$有 $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$

由$g(x)$ 连续不难知道。上面式子对于$\forall x$成立。即应要利用其一致连续性。

那么应该考虑$\forall x \in [a,b]; f_n$与f应该被一闭区间盖住

由题干知道$f_n \rightrightarrows f$; 且f_n连续那么f连续；那么f在 $[a,b]$ 上有界；且针对每个n, f_n在 $[a,b]$ 上都有界

所以根据问题3.5；f_n是一致有界。f_n和f均有界可以用一个M盖住

在 $[-M, M]$ 上，g一致连续；即$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; |x - x'| < \delta$; 有 $|g(x) - g(x')| < \varepsilon$

针对上述的δ；$\exists N > 0; \forall n > N. \forall x$有 $|f_n(x) - f(x)| < \delta$

$\Rightarrow |g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$

证毕

6.2.2 幂级数

exercise 6.70

设f及其所有导数在区间 $[0,r]$上都是非负的.

证明：f能在 $[0,r]$上展开为$Taylor$级数$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (0\leqslant x<r)$.

proof 根据带积分型余项的泰勒公式,我们有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

利用变量替换$t=ux$我们有

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ux)(1-u)^n\mathrm{d}u.$$

因为每个$f^{(n)}(x)$都是非负的,所以每个$f^{(n)}(x)$都是递增的,从而

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(ur)(1-u)^n\mathrm{d}u=(x/r)^{n+1}R_n(r).$$

又因为$R_n(r)\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}r^k+R_n(r)=f(r)$

所以当$0\leqslant x<r$时$0\leqslant R_n(x)\leqslant(x/r)^{n+1}R_n(r)\leqslant(x/r)^{n+1}f(r)\to 0(n\to\infty)$,因此$f$在 $[0,r]$上可以展成泰勒级数.

6.2.3 傅里叶级数

exercise 6.71

证明：级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$在不包含$2\pi$整数倍的区间上一致收敛，但它不是$\mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$中任意一个函数的$Fourier$级数.

proof 设$[a,b]$是一个不包含2π整数倍的区间，那么

$$\left|\sum_{n=2}^{N}\sin nx\right|=\left|\frac{\cos(3x/2)-\cos(N+1/2)x}{2\sin(x/2)}\right|\leqslant\csc\frac{x}{2}\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}\csc\frac{x}{2}$$

又$\{1/\ln n\}$递减地趋于零，所以由狄利克雷判别法知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$在$[a,b]$上一致收玫.

假设$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$是$\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$中某个函数$f$的傅里叶级数

那么根据帕塞瓦尔等式应有$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}=+\infty$，矛盾！

因此它不是$\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$中任意一个函数的傅里叶级数.

exercise 6.72

设f是周期为2π的连续函数.令$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$，用$a_n,b_n$和$A_n,B_n$分别记$f$和$F$的$Fourier$系数.

证明：$A_0=a_0^2,\quad A_n=a_n^2+b_n^2,\quad B_n=0$.由此推出$f$的$Parseval$等式.

proof 证明设$f(x+t)$的傅里叶级数为$f(x+t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt)$，那么根据推广的帕塞瓦尔等式有

$$\begin{aligned}
F(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)\\
&=\frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nt\mathrm{d}t+b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sin nt\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{a_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(a_n\cos n(t-x)+b_n\sin n(t-x)\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(a_n(\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx)+b_n(\sin nt\cos nx-\cos nt\sin nx)\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\cos nx,
\end{aligned}$$

因此$A_0=a_0^2,A_n=a_n^2+b_n^2,B_n=0$.此外，取$x=0$就得到$f$的帕塞瓦尔等式为$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$.

exercise 6.73

proof

exercise 6.74

proof

✍ **exercise 6.75**

proof

✍ **exercise 6.76** 若f,g均为$[-\pi,\pi]$上可积函数,且它们的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上分别一致收敛于f和g,则
$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$其中$a_n,b_n$为$f$的傅里叶系数,$\alpha_n,\beta_n$为$g$的傅里叶系数.

proof 证明由$f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$,所以
$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), x\in[-\pi,\pi]$ $\quad f(x)g(x)=\frac{a_0}{2}g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx]$
级数$\sum_{n=1}^{\infty}[a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx]$在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)g(x)$.由于$f(x),g(x)$均为$[-\pi,\pi]$上的可积函数
故$f(x)g(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,所以

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx]\right\}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx]\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[a_ng(x)\cos nx+b_ng(x)\sin nx]\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x+b_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\
=&\frac{1}{2}a_0\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)
\end{aligned}
$$