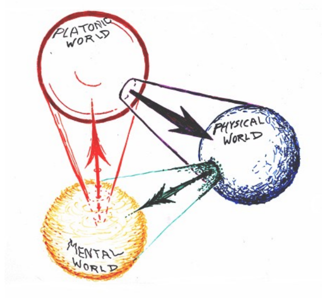
数学分析讲义

作者：Hongxin Yang 南风

时间：March 31, 2026



目录

第 1 章 数学基础知识与基本公式 **1**

第 2 章 不等式应用 **3**

第 3 章 一元积分 **11**

3.1 不定积分基本计算公式与方法 11
3.2 牛顿莱布尼兹公式 13
3.3 可积理论 14
3.3.1 达布上和, 下和 17
3.3.2 勒贝格可积理论 20
3.4 积分中值定理和上限函数 23
3.5 定积分相关性质与余项 29
3.5.1 Wallis 公式与相关公式 29
3.5.2 积分余项的泰勒公式 32
3.6 定积分应用 34
3.6.1 平面图形面积 34
3.6.2 曲线弧长 35
3.6.3 旋转体体积与旋转曲面面积 37
3.7 积分原函数间断点关系反例 38
3.8 反常积分 39
3.8.1 无穷积分基本判别法 39
3.8.2 无穷积分归结原理与级数 42
3.8.3 无穷积分狄利克雷判别法和阿贝尔判别法 44
3.8.4 瑕积分 46
3.9 反常积分的例子与重要性质与重要典型判别 49
3.10 积分计算专题 53
3.11 黎曼引理 56

第 4 章 级数理论 **58**

4.1 数项级数 58
4.1.1 级数柯西收敛准则, 有界、比较、对数判别法 58
4.1.2 积分与级数联系 64
4.1.3 其余判别法 67
4.1.4 一般项级数判别 73
4.1.5 绝对与条件收敛与数项级数重排与柯西乘积 77
4.1.6 级数乘积与无穷乘积 80
4.1.7 数项级数判断练习与重要性质反例 88
4.2 函数项级数 97
4.2.1 函数列 97
4.2.2 函数项级数 99
4.2.3 函数项级数的一般判别法 100
4.2.4 极限函数与和函数的连续换序 104
4.2.5 极限函数与和函数的积分换序 108

4.2.6 极限函数与和函数的微分换序 . . . 110
4.2.7 换序等问题的重要例子 . . . 112
4.3 幂级数 . . . 116
4.3.1 幂级数的敛散性 . . . 116
4.3.2 幂级数的分析性质 . . . 118
4.3.3 幂级数展开 . . . 123
4.4 傅里叶级数 . . . 130
4.4.1 傅里叶级数基本性质 . . . 130
4.4.2 傅里叶级数的收敛定理 . . . 135
4.4.3 傅里叶级数的切萨罗求和 . . . 141
4.4.4 平凡平均逼近 . . . 144
4.4.5 收敛定理证明 . . . 150
4.4.6 级数计算 . . . 154

第 5 章 多元微分学 155
5.1 多元函数的极限连续性 . . . 155
5.1.1 极限定义 . . . 155
5.1.2 累次极限 . . . 156
5.1.3 多元函数的连续性 . . . 158
5.1.4 有界闭集连续函数性质 . . . 160
5.2 偏导数与微分 . . . 162
5.2.1 方向导数与偏导数 . . . 162
5.2.2 全微分 . . . 164
5.2.3 多元函数可微的条件 . . . 168
5.2.4 向量值函数微分与可微映射 . . . 171
5.3 多元微分学计算 . . . 175
5.3.1 链式法则与一阶微分形式不变性 . . . 175
5.3.2 高阶偏导数 . . . 179
5.3.3 多元函数中值定理与泰勒公式 . . . 184
5.3.4 多元函数普通极值 . . . 188
5.4 隐函数定理 . . . 190
5.4.1 多类型型隐函数定理及求导方法 . . . 190
5.4.2 逆映射定理 . . . 199
5.4.3 秩定理与函数相关性 . . . 202
5.5 多元函数微分学的应用 . . . 204
5.5.1 条件极值 . . . 204
5.5.2 几何应用 . . . 205
5.6 Advanced differential Calculus in Euclid Space . . . 206
5.6.1 Directional Derivatives, Partial Derivatives and Differentials . . . 206
5.6.2 Differentials of Mappings, Chain Rule for Differentials . . . 213

第 6 章 含参积分学 217
6.1 含参变量常义积分 . . . 217
6.2 含参反常积分一致收敛性 . . . 219
6.3 含参反常积分分析性质 . . . 224
6.4 Euler 积分 . . . 229

6.5 含参积分计算 233

第 7 章 多重积分学 **236**

7.1 重积分 236

7.2 曲线曲面积分 239

7.3 Green、Gauss、Stokes 公式 246

第 1 章 数学基础知识与基本公式

Theorem 1.0.1

1. $\left\{\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_n}{b_n}\right\}$, 若$b_1\sim b_n>0$那么 $\min\left\{\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_n}{b_n}\right\}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_n}\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_n}{b_n}\right\}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

3. $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$

4. $\left|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right|\leqslant\sqrt[n]{|a-b|}$

Theorem 1.0.2

1. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

3. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$

5. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$

6. $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$

Theorem 1.0.3

证明：对每个正整数n, 成立$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}k^m=\begin{cases}0, & 0\leqslant m\leqslant n-1\\(-1)^n n!, & m=n.\end{cases}$

Proposition 1.1

1.设f是非常值周期函数, 且至少有一个连续点, 则f有最小正周期.

2.设f_1和f_2是定义在同一集合上的周期函数, 它们的周期不可公度.
若f_1,f_2中至少一个有界, 又至少有一个连续, 则$f=f_1+f_2$不是周期函数.

Proof 1.用反证法.若f无最小正周期, 即有无穷多个越来越小的正周期.由于任何两个周期之差仍为周期, 因此f必有任意小的正周期.
取趋于0的一列正周期$\alpha_n, n=1,2,\cdots$
又设f于点x_0连续.则对于任何点x, 存在分解式$x=x_0+k_n\alpha_n+\beta_n$, 其中$k_n$为整数, $0\leqslant\beta_n<\alpha_n$.
于是有$f(x)=f(x_0+k_n\alpha_n+\beta_n)=f(x_0+\beta_n)$.
令$n\to\infty$并利用f于点x_0处连续, 就得到$f(x)=f(x_0)$.因此f是恒等于$f(x_0)$的常值函数, 与假设条件相矛盾.

2.证用反证法.设f有周期$p>0$, 则从
$0=f(x+p)-f(x)=f_1(x+p)+f_2(x+p)-f_1(x)-f_2(x)$
得到恒等式$f_1(x+p)-f_1(x)\equiv-f_2(x+p)+f_2(x)$.

利用这个恒等式定义一个新的函数F如下：$F(x)=f_1(x+p)-f_1(x)=-f_2(x+p)+f_2(x)$.
设T_1,T_2分别是f_1和f_2的周期.从$F(x)$定义可见F同时以T_1,T_2为周期.
不妨设$T_1>T_2>0$,则F又以T_1-T_2为周期.利用辗转相除法,可见F有无穷多个越来越小的正周期,从而有任意小的正周期.
取F的一列趋于0的正周期$\alpha_n,n=1,2,\cdots$.
设x_0在定义域中,则对于定义域中任意其他点x,有分解$x=x_0+k_n\alpha_n+\beta_n,n=1,2,\cdots$,其中$k_n$为整数,$0\leqslant\beta_n<\alpha_n$.
不妨设f_1和f_2中的f_1为其定义域上的连续函数,于是有
$F(x)=F\left(x_0+\beta_n\right)=f_1\left(x_0+\beta_n+p\right)-f_1\left(x_0+\beta_n\right)$
令$n\to\infty$,并记上式右边的极限为c,就得到$F(x)=F\left(x_0\right)=f_1\left(x_0+p\right)-f_1\left(x_0\right)=c$.
于是对所有x成立$F(x)=f_1(x+p)-f_1(x)=-f_2(x+p)+f_2(x)=c$.
这时对一切整数n有$f_1\left(x_0+np\right)=f_1\left(x_0\right)+nc\quad f_2\left(x_0+np\right)=f_2\left(x_0\right)-nc$.
由于f_1,f_2中至少有一个有界,因此只能有$c=0$.于是就证明了$F\equiv 0$,同时也就证明了p是f_1和f_2的共有周期,引出矛盾.

Theorem 1.0.4

对于$2n$个正数$x_1,x_2,\cdots,x_n$和$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$

定义加权的t阶平均值(或t阶和)为$M_t(x,\lambda)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}}$.

它在$t=-1$时为调和平均值,$t=1$时为算术平均值,$t=2$时为平方平均值(即均方根值).
又若在$t=0,+\infty,-\infty$时用极限作补充定义,则在$t=0$时为几何平均值,$t=+\infty$时为$\max\{x\}$,$t=-\infty$时为$\min\{x\}$.
这样就使$M_t(x,\lambda)$在$-\infty\leqslant t\leqslant+\infty$上处处有定义.
证明：$M_t(x,\lambda)$是t的单调增加函数,在$n>1$且$x_1,x_2,\cdots,x_n$不全相等时为t的严格单调增加函数.

Proof 令$g(t)=\ln M_t(x,\lambda)$则$g'(t)=\dfrac{t\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t}-\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\right)}{t^2}$

令$f(t)=t\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t}-\ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\right)$,则$f'(t)=t\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln^2 x_i\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln x_i\right)^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\right)^2}$

由柯西不等式可得$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln^2 x_i\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^t\ln x_i\right)^2\geqslant 0$
故$f'(t)$的符号由t确定,故$f(t)\geqslant f(0)=0$可得$g'(t)\geq 0$,故$g(t)$关于t单调递增
那么$M_{-\infty}(x,\lambda)\leqslant M_{-1}(x,\lambda)\leqslant M_0(x,\lambda)\leqslant M_1(x,\lambda)\leqslant M_2(x,\lambda)\leqslant M_{+\infty}(x,\lambda)$
取$\lambda_i=\dfrac{1}{n}$我们就有常见的形式

$$\min\left\{x_1\cdots x_n\right\}\leqslant\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}\leqslant\max\left\{x_1\cdots x_n\right\}$$

第 2 章 不等式应用

Theorem 2.0.1 (基本不等式)

算术平均$A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$　几何平均$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

调和平均$H_n=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$　平方平均$Q_n=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$

其中a_i都为正数,有$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$

Proof 先证明$G_n\leqslant A_n$.

知道 $\ln x$为凹函数那么 $\ln\left(\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)>\dfrac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln\left(a_1\cdots a_n\right)^{\frac{1}{n}}$

更进一步我们有 $\ln\left(\dfrac{p_1a_1+\cdots+p_na_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)>\dfrac{p_1\ln\left(a_1\right)+\cdots+p_n\ln\left(a_n\right)}{p_1+\cdots+p_n}\ (p_i>0)$

所以$\dfrac{p_1a_1+\cdots+p_na_n}{p_1+\cdots+p_n}>\left[(a_1)^{p_1}\cdots(a_n)^{p_n}\right]^{1/p_1+\cdots+p_n}$

$$\frac{1}{H_n}=\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{G_n}\Rightarrow H_n\leqslant G_n$$

柯西不等式有 $(a_1\times1+\cdots+a_n\times1)^2\leqslant\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(1^2+\cdots+1^2\right)=n\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)$

$\Rightarrow\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2\leqslant\dfrac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$ 证毕

Lemma 2.1 (对数均值不等式)

$$\frac{2}{a+b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Theorem 2.0.2 (Stirling 公式)

$$n!\sim\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,\quad n\to\infty$$

Proof 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}=\sqrt{2\pi}$令$a_n=\dfrac{n!}{\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}=\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$,　$n=1,2,\cdots$.

下面来看 $\{a_n\}$ 的单调性：$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ 对上式两边取对数得 $\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1$

由对数均值不等式可知$\dfrac{1}{n+1/2}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)\Longleftrightarrow0<\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1<\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

于是得到$1<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\exp\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\dfrac{\exp\left(\dfrac{1}{4n}\right)}{\exp\left(\dfrac{1}{4n+4}\right)}$,　$n=1,2,\cdots$.

以上不等式的左半边表明 $\{a_n\}$ 单调递减,又因为 $\{a_n\}$ 是一个正数列,因此 $\{a_n\}$ 一定收敛.

另一方面,要证明它不收敛于零.设$a_n\to a$.以上不等式的右半边对n从n到$n+k-1$连乘得

$$1<\frac{a_n}{a_{n+k}}<\frac{\exp\left(\dfrac{1}{4n}\right)}{\exp\left(\dfrac{1}{4n+4k+4}\right)}\Longleftrightarrow a_{n+k}<a_n<\frac{\exp\left(\dfrac{1}{4n}\right)}{\exp\left(\dfrac{1}{4n+4k+4}\right)}a_{n+k}$$

固定n,令$k \to \infty$得$a < a_n < \exp\left(\frac{1}{4n}\right) a$这表明$a \neq 0$.

于是由Wallis公式可知$a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)^2 \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \sqrt{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{2\pi}$.

Theorem 2.0.3

*Young*不等式

设连续函数φ在$[0,+\infty)$上严格递增,并且$\varphi(0)=0$,则存在连续的反函数φ^{-1},它在$[0,\varphi(+\infty))$上严格递增,并且$\varphi^{-1}(0)=0$.

对任意$a>0, 0<b<\varphi(+\infty)$都有$ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^b \varphi^{-1}(y)\mathrm{d}y$,其中等号成立当且仅当$b=\varphi(a)$.

Proof 由以下面积原理立刻知道

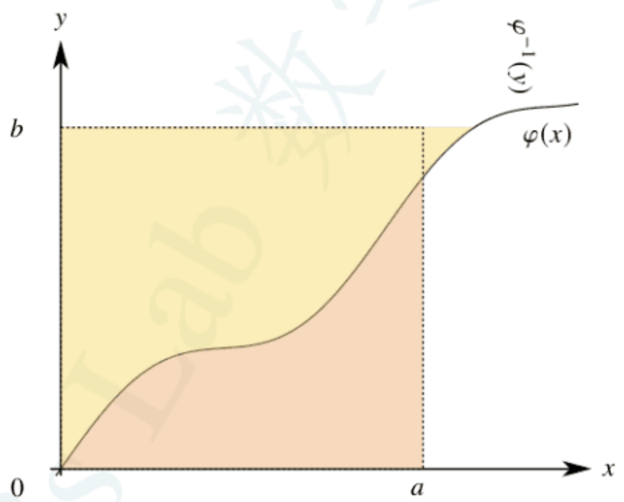


图 2.1

Corollary 2.1 (Yang 不等式)

若p和q满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$则$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$其中等号成立当且仅当$a^p=b^q$

Proof 证法一设函数$\varphi(x)=x^{p-1}$,则它的反函数为$\varphi^{-1}(x)=x^{\frac{1}{p-1}}$.由于$1/p+1/q=1$,故$\frac{1}{p-1}=q-1$.则$\varphi^{-1}(x)=x^{q-1}$.

对φ和φ^{-1}用*Young*不等式可得$ab \leqslant \int_0^a \varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^b \varphi^{-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p}x^p\Big|_0^a + \frac{1}{q}x^q\Big|_0^b = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

等号成立当且仅当$\varphi(a)=b \iff a^{p-1}=b \iff a^p=b^q$.

证法二由于$(\mathrm{e}^x)''=\mathrm{e}^x>0$,因此$\mathrm{e}^x$是一个严格凸函数.由于$1/p+1/q=1$,故

$ab=\exp(\ln a)\exp(\ln b)=\exp\left(\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q\right) \leqslant \frac{1}{p}\exp(\ln a^p)+\frac{1}{q}\exp(\ln b^q)=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

等号成立当且仅当$a^p=b^q$.

Note 满足上面条件的p,q称之为共轭.

Theorem 2.0.4 (连续形式的$Hylder$不等式)

设函数f,g在$[a,b]$上连续.则$\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}$,其中$p>1$且$p,q$共轭.
等号成立当且仅当f,g中有一个为零,或存在λ和$\mu(\lambda\mu>0)$满足$\lambda|f|^p=\mu|g|^q$.

Proof 证明令$A=\dfrac{|f(x)|}{\left[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}}$, $B=\dfrac{|g(x)|}{\left[\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}}$.由$Young$不等式可知

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x}$$

上式两边求a到b的积分得

$$\frac{\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x}{\left[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Longleftrightarrow\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q},$$

等号成立当且仅当$A^p=B^q\Longleftrightarrow|f|^p\int_a^b|g(x)|^q\mathrm{d}x=|g|^q\int_a^b|f(x)|^p\mathrm{d}x$.

注 注令以上不等式中的$p=q=2$,即得连续形式的$Cauchy-Schwarz$不等式.
$\left[\int_a^b|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$,等号成立当且仅当$f,g$中有一个为零,或存在$\lambda$和$\mu(\lambda\mu>0)$满足$\lambda f^2=\mu g^2$.

Theorem 2.0.5 (离散形式的$Hylder$不等式)

设非零向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$均为非负实数.则
$\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}b_i^q\right)^{1/q}$.其中$p,q>1$且它们共轭
等号成立成立当且仅当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$中有一个为零向量,或存在$\lambda,\mu(\lambda\mu>0)$满足$\lambda a_i^p=\mu b_i^q$, $i=1,2,\cdots,n$.

Proof 证明令$A_i=\dfrac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}}$, $B_i=\dfrac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}}$, $i=1,2,\cdots,n$.由$Young$不等式可知

$$\frac{a_ib_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^n b_i^q},\quad i=1,2,\cdots,n.\text{上式两边对}i\text{从}1\text{到}n\text{求和得}$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}b_i^q\right)^{1/q}$$

等号成立当且仅当$A_i^p=B_i^p\Longleftrightarrow a_i^p\sum\limits_{i=1}^n b_i^q=b_i^q\sum\limits_{i=1}^n a_i^p$, $i=1,2,\cdots,n$.

注 令$Hylder$不等式中的$p=q=2$,即得离散化的$Cauchy-Schwarz$不等式.$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2\leqslant(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\Longleftrightarrow(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\leqslant\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$.
等号成立当且仅当向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$线性相关.

Theorem 2.0.6 (连续形式 Minkowski 不等式)

设函数f,g在$[a,b]$上连续，则$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}$.其中$p>1$.

等号成立当且仅当存在$\lambda \geqslant 0$使得$f=\lambda g$或$g=\lambda f$.

二元形式很自然的可以推广到多元的形式如下$\left[\int \left(\sum_{i=1}^n |f_i(x)|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^n \left[\int |f_i(x)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$

Proof 由三角不等式可得

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\mathrm{d}x.$$

其中等号成立当且仅当$fg \geqslant 0$.

由$Hylder$不等式可知

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\mathrm{d}x + \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{(p-1)/p} \left\{\left[\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\right\}$$

其中等号成立当且仅当f和g线性相关.

结合上面两个不等式可知$\left[\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}$.

根据两个不等式的取等条件可知，上式中等号成立当且仅当存在$\lambda \geqslant 0$使得$f=\lambda g$或$g=\lambda f$.

Theorem 2.0.7 (离散形式的$Minkowski$不等式)

设向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.则$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}$ 其中$p>1$.

等号成立当且仅当存在$\lambda \geqslant 0$使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

Proof 由三角不等式可知

$$\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p = \sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{p-1}|a_i+b_i| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_i+b_i|^{p-1}|a_i| + \sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{p-1}|b_i|.$$

其中等号成立当且仅当$a_ib_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

由$Hylder$不等式可知

$$\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{p-1}|a_i| + \sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^{p-1}|b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{(p-1)/p}\left[\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p}\right].$$

其中等号成立当且仅当$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$线性相关.结合上面两个不等式可知

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

根据两个不等式的取等条件可知，上式中等号成立当且仅当存在$\lambda \geqslant 0$使得$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

Theorem 2.0.8 (Minkowski 积分型不等式推广 1)

$$\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{\mathbb{R}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]dy \quad p>1$$

$$\left[\int_a^b\left(\int_c^d |f(x,y)|\,dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_c^d\left[\left(\int_a^b |f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]dy \quad p>1$$

Proof 令$\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dy = H(x)$

$$LHS=\left(\int_{\mathbb{R}}H^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,dy\right)H^{p-1}(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,H^{p-1}(x)\,dx\right)dy\right]^{\frac{1}{p}}\quad(1)$$

利用Hölder不等式

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,H^{p-1}(x)\,dx\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}}(H(x))^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}}H^p(x)\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

带入 (1) 那么有 (先不看 $\frac{1}{p}$ 次不然显得太麻烦)

$$\int_{\mathbb{R}}H^p(x)\,dx\leqslant\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}}H^p(x)\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}dy=\left(\int_{\mathbb{R}}H^p(x)\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\times\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}dy$$

$$\Rightarrow\left(\int_{\mathbb{R}}H^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}dy$$

证毕

Theorem 2.0.9 (积分形式 Hardy 不等式)

$f\geqslant 0\quad p>1$ (自然可以应用到绝对值中)

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p\,dx$$

Proof 令 $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$ 有 $\frac{F(x)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 f(sx)\,ds$

$$(LHS)^{\frac{1}{p}}=\underbrace{\left(\int_0^\infty\left[\int_0^1 f(sx)\,ds\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(sx)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}ds}_{\text{利用积分形式}Minkowski\text{公式}}\quad(1)$$

$$\int_0^\infty f^p(sx)\,dx=s^{-1}\int_0^\infty f^p(sx)\,dxs=s^{-1}\int_0^\infty f^p(x)dx$$

带入 (1) 那么 $(LHS)^{\frac{1}{p}}=\int_0^1\left(s^{-1}\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}ds=\int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}ds\ \times\ \int_0^1 s^{\frac{-1}{p}}\,ds=\frac{p}{p-1}\int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$

那么 $(LHS)^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{p}{p-1}\int_0^1\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}ds=\frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$

两边同p次即可

Theorem 2.0.10 (离散 Hardy 不等式)

$a_n\geqslant 0;\ A_n=\sum_{i=1}^n a_i;\quad p>1\ ;\sum_{i=1}^\infty a_i^p$ 收敛, 则

$$\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{A_n}{n}\right)^p=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^\infty a_n^p$$

Proof 令 $b_n=\frac{A_n}{n}$,

$$b_n^p-\frac{p}{p-1}b_n^{p-1}a_n$$

$$=b_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right)+\frac{(n-1)p}{p-1}\left(b_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(b_{n-1}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le b_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right)+\frac{(n-1)p}{p-1}\left(\frac{p-1}{p}b_n^p+\frac{1}{p}b_{n-1}^p\right)\quad[\text{用}Yang\text{不等式}]$$

$$=nb_n^p\left(1-\frac{p}{p-1}\right)+\frac{n-1}{p-1}b_{n-1}^p$$

$$=\frac{1}{p-1}\left[(n-1)b_{n-1}^p-nb_n^p\right]$$

求和有 $\sum_{n=1}^{N} b_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} b_n^{p-1}a_n \le -\frac{1}{p-1}Nb_N^p \le 0.$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} b_n^p &\le \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} b_n^{p-1}a_n\\ &\le \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(b_n^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{【Holder 不等式】}\\ &= \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

化简并移项可得 $\sum_{n=1}^{N} b_n^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{N}a_n^p$.令 $N\to\infty$即得欲证不等式

Theorem 2.0.11

设 $f\in C[0,+\infty), f(x)\ge 0, p>1$.令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则 (可削弱到 $f\in L^p$)

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}F(x)\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p dx.$$

Proof 前面的证明找的是裂项相消，而这题考虑导数.让 $G(x)=\frac{F(x)}{x}$, 则与前面定理类似，考虑

$$\begin{aligned}&\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p-\frac{p}{p-1}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)\\ =&G^p-\frac{p}{p-1}G^{p-1}(xG(x))'\\ =&-\frac{1}{p-1}(xG(x))'=-\frac{1}{p-1}\left(\frac{F^p}{x^{p-1}}\right)'.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^A\left(\frac{F}{x}\right)^p dx &\le \frac{p}{p-1}\int_0^A\left(\frac{F}{x}\right)^{p-1}f(x)dx\\ &\le \frac{p}{p-1}\left(\int_0^A\left(\frac{F}{x}\right)^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^A f^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

让 $A\to\infty$即可

Theorem 2.0.12 (切比雪夫不等式)

切比雪夫不等式 (构造重积分) :

对 $p(x)\in R[a,b], p(x)\ge 0, f(x), g(x)$在 $[a,b]$相同单调性, 则成立 :

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

Theorem 2.0.13 (哈达玛不等式)

哈达玛不等式

$f(x)$是 $[a,b]$上的下凸函数, 则 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$

Proof 一方面 : $\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{\text{记忆公式,其实就是换元}x=a+b-y} \int_a^b f(b+a-x)dx$

此时 $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(b+a-x)]dx \geq \int_a^b f\left(\frac{x+b+a-x}{2}\right)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

另外一方面 (积累区间可以转化成 $[0,1]$想法) : $x = x(t), a = x(0), b = x(1)$, 所以取$x = \frac{b-a}{1-0}t + a$

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(a+(b-a)t)dt = \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt \leq \int_0^1 (1-t)f(a)+tf(b)dt = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

因此我们完成了证明.

Theorem 2.0.14 (康托洛维奇不等式)

设函数$f \in C[a,b]$且$\forall x \in [a,b]$有$0 < m \leq f(x) \leq M$

$$\Longrightarrow (b-a)^2 \leq \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(M+m)^2(b-a)^2}{4Mm}$$

Proof 对于左边不等式，由柯西不等式可得 : $\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(x)\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2 = (b-a)^2$

对于右边不等式，由于 $(f(x)-m)(f(x)-M) \leq 0$即$f(x) + \frac{Mm}{f(x)} \leq M+m$从而

$$2\sqrt{\int_a^b f(x)dx * \int_a^b \frac{Mm}{f(x)}dx} \leq \int_a^b f(x)dx + \frac{Mm}{f(x)}dx \leq (M+m)(b-a)$$

化简之后得到 $\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(M+m)^2(b-a)^2}{4Mm}$

Proposition 2.1

1.设$n \geqslant 2$, 实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$都大于-1, 并且它们有着相同的符号.证明：$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$.

2.设$a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 2)$都是正数, 且$a_1+a_2+\cdots+a_n < 1$.
证明：
(1)$\dfrac{1}{1-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} > \prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
(2)$\dfrac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} > \prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k) > 1-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

3.设$x, y \geqslant 0, m, n$为正整数.求证：$x^m y^n + x^n y^m \leqslant x^{m+n}+y^{m+n}$, 等号当且仅当$x=y$时成立.

4.设n为正整数, 且$x \geqslant 0, y \geqslant 0$.求证：当$n>1$时, $\dfrac{x^n+y^n}{2} \geqslant \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$, 等号当且仅当$x=y$时成立.

5.设$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 且$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.证明Chebychnv(切比雪夫) 不等式：$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \leqslant n \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Proof 1.因为$a_1, a_2, ..., a_n$是同号的, 所以总有$a_n(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1}) > a_n$
因此
$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$
$=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})+a_n(1+a_n)$
$>(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})+a_n$
$>(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-2})+a_{n-1}+a_n$
$>1+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n$.

2.
利用上题, 我们有$1/\left(1-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) > 1/\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k) = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-a_k} > \prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1+\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.
(2)在 (1.1)式中用$-a_k$代替a_k后不等式仍然正确

3.这是因为$(x^m-y^m)(x^n-y^n) \geqslant 0$, 且等号成立当且仅当$x=y$.

4.证明当$n=2$时不难验证结论成立.假设对于$n-1$的情形结论已经成立, 那么由上题知
$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{x^{n-1}+y^{n-1}}{2} \cdot \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{x^n+y^n+xy^{n-1}+x^{n-1}y}{4} \leqslant \dfrac{x^n+y^n}{2}$.因此结论普遍成立.

5.因为$0 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_ib_i+a_jb_j-a_jb_i-a_ib_j) = 2n\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i - 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$
所以$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \leqslant n\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$.

第 3 章 一元积分

3.1 不定积分基本计算公式与方法

Theorem 3.1.1

1. $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$
2. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0; a \neq 1)$
3. $\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$
4. $\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
5. $\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
6. $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$
7. $\int \csc x \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$
8. $\int \frac{1}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
9. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
10. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
12. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$
14.

Proposition 3.1

1. $\int \tan^n x \mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \mathrm{d}x$
2. $\int \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[-\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \mathrm{d}x\right]$
3. $\int \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[\cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \mathrm{d}x\right]$
4. $\int \sec^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left[\sec^{n-2} x \cdot \tan x + (n-2)\int \sec^{n-2} x \mathrm{d}x\right]$
5. $\int \csc^n x \mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left[-\csc^{n-2} x \cdot \cot x + (n-2)\int \csc^{n-2} x \mathrm{d}x\right]$
6. $\int \frac{1}{(a^2 \pm x^2)^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{(a^2 \pm x^2)^{n-1}} \mathrm{d}x\right]$

Proof $\int \tan^n x \mathrm{d}x = \int \tan^{n-2} x \left(\sec^2 x - 1\right) \mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \mathrm{d}x$

将一个 $\sin x$ 拿进去为 $-\cos x$

将一个 $\cos x$ 拿进去为 $\sin x$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(a^2+x^2)^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n} \mathrm{d}x\right] = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{(a^2+x^2)^n} \mathrm{d}x^2\right]$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \frac{1}{2}\int x\left(a^2+x^2\right)^{-n} \mathrm{d}\left(x^2+a^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[x\left(a^2+x^2\right)^{-n+1} - \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} dx\right]$$

Theorem 3.1.2 (万能公式)

令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ 则

1. $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$　　2. $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

3. $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$　　4. $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

Proposition 3.2

$$1.\frac{1}{a\pm b\sin x\,(\cos x)}\Longrightarrow\begin{cases}\text{万能公式}\\ \cos x\longrightarrow 2\cos^2\dfrac{x}{2}-1\longrightarrow\text{同除以}\cos^2\dfrac{x}{2}\\ \sin x\longrightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\longrightarrow\text{同除以}\cos^2\dfrac{x}{2}\end{cases}$$

$$2.\frac{1}{a\pm b\sin^2 x\,(\cos^2 x)}\Longrightarrow\frac{1}{m\sin^2 x+n\cos^2 x}\longrightarrow\frac{\sec^2 x}{m\tan^2 x+n}\longrightarrow\text{令}\tan x=u$$

$$3.\frac{1}{k\tan x+b}\Longleftrightarrow\frac{a\sin x\,(\cos x)}{m\sin x+n\cos x}\Longrightarrow\text{分子写为}m\sin x+n\cos x\text{与}m\cos x-n\sin x\text{的线性组合}$$

$$4.\frac{1}{m\sin x+n\cos x}\Longrightarrow\text{万能公式或辅助角合一公式}$$

$$5.\frac{\sin^2 x\,(\cos^2 x)}{m\sin x+n\cos x}\Longrightarrow\text{改写为}k\frac{m^2\sin^2 x-n^2\cos^2 x}{m\sin x+n\cos x}+l\frac{1}{m\sin x+n\cos x}\left(1=\text{即}\sin^2 x+\cos^2 x\right)s$$

Proposition 3.3

$$\int x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\cos nx+nx\sin nx}{n^2}+C=\frac{1}{n^2}\begin{vmatrix}(x)' & (\cos nx)'\\ x & \cos nx\end{vmatrix}+C$$

$$\int x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{\sin nx-nx\cos nx}{n^2}+C=\frac{1}{n^2}\begin{vmatrix}(x)' & (\sin nx)'\\ x & \sin nx\end{vmatrix}+C$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C=\frac{1}{a^2+n^2}\begin{vmatrix}\mathrm{e}^{ax})' & (\sin nx)'\\ \mathrm{e}^{ax} & \sin nx\end{vmatrix}+C.$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos nx+n\sin nx)}{a^2+n^2}+C=\frac{1}{a^2+n^2}\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{ax})' & (\cos nx)'\\ \mathrm{e}^{ax} & \cos nx\end{vmatrix}+C$$

3.2 牛顿莱布尼兹公式

Theorem 3.2.1 (NewTon-Lebnitz Theorem)

$prove$: 若f在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数F, 则$F'(x)=f(x), x\in\Longrightarrow$ 则$f(x)$ 可积，且 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Proof $proof$: 要证$\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0;$ 当 $||T||<\delta;$ 有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|<\varepsilon$

对于任意分割 $||T||=\{a=x_0,x_1\cdots x_n=b\}$，在每个小区间上对$F(x)$使用拉格朗日中值定理；

则分别存在$\eta_i\in[x_{i-1},x_i]; i=1,2\cdots n;$

$st.F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\,(*)$；因为连续在闭区间上一定一致连续

所以$\forall\varepsilon>0;\exists\delta_1>0; st.x',x''\in[a,b]; and\,|x'-x''|<\delta$; 有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i\right|=\left|\sum_{i=11}^{n}[f(\xi_i)-f(\eta_i)]\Delta x_i\right|<\varepsilon\cdot\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\right|=(b-a)\varepsilon$

$\Rightarrow$ 则f在 $[a,b]$ 上可积。且成立

Note $tips$: 1° : 条件可以弱化为不需要原函数F，因为连续一定有原函数

2° : 条件可弱化为f在 $[a,b]$ 上可积即可。F在 $[a,b]$ 上连续，且除个别点以外有$F'(x)=f(x)$

3°连续的函数有原函数，但是不连续的函数也可能有原函数

Corollary 3.1

f在 $[a,b]$ 上可积即可。F在 $[a,b]$ 上连续，且除个别点以外有$F'(x)=f(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

Proof $proof$: 做分割$T=\{a=x_0,x_1\cdots x_n=b\}$并且使其包含是的$F'(x)\neq f(x)$的个别点；在 $[x_{i-1},x_i]$ 上用拉格朗日；则 $\exists\eta_i\in[x_{i-1},x_i]\; st.F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i$令 $|T|\to 0$即可

3.3 可积理论

Theorem 3.3.1 (可积理论必要条件)

必要条件：可积 $\Rightarrow$ 有界

Proof $proof$：反证法，若无界那么对于任意一个分割T，总会存在一个Δ_k，f在其上无界，即$\exists\xi_k\in\Delta_k\ st.\left|f(\xi_k)\right|>\frac{M+G}{\Delta x_k}$
在$i\neq k$的各个小区间上任取ξ_i；记$G=\left|\sum_{i\neq k}f(\xi_i)\Delta x_i\right|$ and $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\geqslant\left|f(\xi_k)\Delta_k\right|-\left|\sum_{i\neq k}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|>M$矛盾

Theorem 3.3.2 (可积第二充要条件)

充要条件：$\forall\varepsilon>0;\exists$分割$T$；$st.\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

Theorem 3.3.3 (可积理论充分条件)

1°：若$f\in C_{[a,b]}\Rightarrow f\in R_{[a,b]}$ (反之不然) (即w_i可以任意小)
2°：f是$[a,b]$上的单调函数 $\Rightarrow f\in R[a,b]$ (即虽然w_i不可以任意小，但是是有界的可以用划分来替代)
3°：若f为区间$[a,b]$上的只有有限个间断点的有界函数 $\Rightarrow f\in R_{[a,b]}$ (二者综合)
4°：闭区间上的分段连续函数一定可积 ($only$ 只需要分段表示讨论即可)
5°：$f(x)$在$[a,b]$上有界，且其间断点仅仅有有限个聚点，$\Rightarrow f(x)\in R_{[a,b]}$

Proof $proof$：由连续知道一致连续；$\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0$; 对$\forall x',x''\in[a,b]$；$st.\left|x'-x''\right|<\delta\ have\ \left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$
因而只要使$[a,b]$上的分割足够小$<\delta$；就可以使得$w_i=M_i-m_i=\sup_{x',x''}\left|f(x')-f(x'')\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$
$\Rightarrow\sum_T w_i\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_T\Delta x_i=\varepsilon$

$proof$：设f为增函数，$w_i=f(x_i)-f(x_{i-1})$；于是$\sum_T w_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-f(x_{i-1})\right]|T|=\left[f(b)-f(a)\right]|T|$
所以$\forall\varepsilon>0;let\ |T|<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\Rightarrow\sum_T w_i\Delta x_i<\varepsilon\Rightarrow f\in R_{[a,b]}$

$proof$：不是一般性证明一个间断点的情形假设为$c\in(a,b)$；分为$[a,c-\delta]\cup[c-\delta,c+\delta]\cup[c+\delta,b]$；$\forall\varepsilon>0$
所以在$[a,c-\delta]$与$[c+\delta,b]$上f是连续的，那么存在$T_1,T_2\in[a,c-\delta]$与$[c+\delta,b]$ $st.\sum_{T_1}w_i\Delta x_i<\varepsilon$ $\sum_{T_2}w_i\Delta x_i<\varepsilon$
$[c-\delta,c+\delta]$上分割T_3；我们记(a,b)的上下确界为M,m；此时我们有$\sum_{T_3}w_i\Delta x_i\leqslant(M-m)\cdot2\times\delta<\varepsilon$
$\left(只需\delta<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}\right)$那么综合起来就有分割$T=T_1+T_2+T_3$ 成立
($tips$：若函数为$[a,b]$上的单调函数且有无穷个间断点的函数一定可积由2°这告诉我们有无限个间断点的函数也可能可积)

$proof$：不妨设$c\in[a,b]$；$\because\lim_{n\to\infty}a_n=c\Rightarrow\exists N,n>N;\ st.\left|a_n-c\right|<\delta$
那么在$[a,c-\delta]$与$[c+\delta,b]$上还有有限个间断点 $\Rightarrow$ 有界且只有有限个间断点可积
$\exists T_1$，T_2 $st.\sum_{T_1}w_i\Delta x_i<\varepsilon$ $\sum_{T_2}w_i\Delta x_i<\varepsilon$;
在$[c-\delta,c+\delta]$上，那么$\sum_{T_3}w_i\Delta x_i\leqslant w_0\cdot2\delta$ (其中w_0为$[a,b]$整个的振幅) 所以只要δ小于$\frac{\varepsilon}{w_0}$即可由数列极限易得

Problem 3.1 eg：证明黎曼函数在$[0,1]$上可积，且$\int_0^1 R(x)\,dx=0$

Proof $proof$：已知黎曼函数在$[0,1]$以及一切一切无理点处连续，而在$(0,1)$上一切有理点都不连续，在图像中画一条

$\dfrac{\varepsilon}{2}$的线在此水平直线上只有函数图象中的有限个点，这些点的所对应的自变量可以被含于属于分割T的有限个小区间内$|T|$足够小，这些个有限个小区间的总长度可以为任意小，而T中其余小区间上函数的振幅不大于$\dfrac{\varepsilon}{2}$，两部分合起来即可$\forall\varepsilon>0$; 使得$\dfrac{1}{q}>\dfrac{\varepsilon}{2}$的点有理点只有有限个，设为$r_1,r_2\cdots r_k$; 对 $[0,1]$ 上做分割T;
并把小区间分为两类$\left\{\Delta x_i'\,(i=1,2\cdots m)\right\}$ and $\left\{\Delta x_i''\,(i=1\cdots n-m)\right\}$
其中$\left\{\Delta x_i'\right\}$为含有$r_i$中的点，这类小区间的个数$\leqslant 2k$ (当r_i都为T的分割点才有$2k$)；而$\Delta x_i''$为T中不含有r_i的小区间。
于是针对$\Delta x_i''$；$w_i''<\dfrac{\varepsilon}{2}$; 那么$\displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} w_i''\Delta x_i''<\dfrac{\varepsilon}{2}$； 针对$\Delta x_i'$振幅会小于$\dfrac{1}{2}$； $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} w_i'\Delta x_i'\leqslant\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i'\leqslant\dfrac{1}{2}\times 2k\times|T|$ 那么只要让$T<\dfrac{\varepsilon}{2k}$合起来即可；已经证明可积了，那么根据定义把所有特殊点全部取为ξ_i无理点，那么$\displaystyle\int_0^1 R(x)\,dx=0$

Proposition 3.4

性质：若f,g在$[a,b]$上可积$\Rightarrow fg$在$[a,b]$上也可积

Proof $proof$：因为f,g在$[a,b]$上可积$\Rightarrow f,g$在$[a,b]$上也有界$\Rightarrow |f|,|g|\leqslant M$
$\forall\varepsilon>0;\exists T'\ T'';st.\displaystyle\sum_{T'} w_i^f\Delta x_i<\varepsilon\ \sum_{T''} w_i^g\Delta x_i<\varepsilon$ 令$T=T'+T''$

$$\Rightarrow w_i^{fg}=\sup_{x',x''}\left\{|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\right\}\leqslant\sup_{x',x''}\left\{[|g(x')|\cdot|f(x')-f(x'')|+|f(x'')|\cdot|g(x')-g(x'')|]\right\}$$

$$\Rightarrow LHS\leqslant Mw_i^f+Mw_i^g\ \Rightarrow\sum_T\omega_i^{f\cdot g}\Delta x_i\leqslant M\sum_{T'}\omega_i^f\Delta x_i+M\sum_{T''}\omega_i^g\Delta x_i<M\cdot\varepsilon+M\cdot\varepsilon=2M\varepsilon$$

Theorem 3.3.4

$prob$：设f，g均为定义在$[a,b]$上的有界函数，

prove：若仅仅在$[a,b]$中有限个点处$f(x)\neq g(x)$那么当f $[a,b]$可积$\Rightarrow g(x)$也可积且$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

Proof $proof$：设$f(x),g(x)$仅在$\alpha_1\cdots\alpha_k$处不同，记$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=I$；那么$\exists\delta_1$；$|T|<\delta_1$; $\left|\displaystyle\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$;

现在我们去估计$\left|\displaystyle\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i-I\right|$；

$$\left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i-I\right|\leqslant\left|\sum_T g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_T f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|$$
$$\leqslant\sum_T|g(\xi_i)-f(\xi_i)|\Delta x_i+\varepsilon$$
$$\leqslant|T|\cdot\sum_T|g(\xi_i)-f(\xi_i)|+\varepsilon$$

当$\xi_i\neq\alpha_i$时候，$|g(\xi_i)-f(\xi_i)|=0$所以$\displaystyle\sum_T|g(\xi_i)-f(\xi_i)|$中至多只有$k$项不为0; 我们令$M=\displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant k}\left\{|f(\alpha_i)-g(\alpha_i)|\right\}$
$\displaystyle\sum_T|f(\xi_i)-g(\xi_i)|\Delta x_i\leqslant Mk|T|$ 所以只需要取$\delta=\min\left\{\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{Mk}\right\}$ 那么当$|T|<\delta$时，上式子就会$<2\varepsilon$

Proposition 3.5

$prob$：设函数f在$[a,b]$上有定义，$\forall\varepsilon>0$; 存在$[a,b]$上的可积函数g $st.|f(x)-g(x)|<\varepsilon$

$prove$：f在$[a,b]$上可积

Proof $proof$：由题干知道$\forall\varepsilon>0;\exists T\ st.\sum_T w_i^g\Delta x_i<\varepsilon$
下面来估计$\displaystyle\sum_T w_i^f\Delta x_i\leqslant\sum_T w_i^{f-g}\Delta x_i+\sum_T w_i^g\Delta x_i<2\varepsilon(b-a)+\varepsilon$

Problem 3.2 $prob$：求$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$其中$f(x)=\begin{cases}2x-1, & -1\leqslant x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

solve :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{0} (2x-1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{0} + (-\mathrm{e}^{-x})|_0^1$$
$$= -2 - \mathrm{e}^{-1} + 1 = -\left(\mathrm{e}^{-1} + 1\right).$$

我们发现$x=0$处的值有$2x-1 \to e^{-x}$；这并不影响由于$\left\{ \begin{array}{c} 2x-1 \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2x-1 \quad -1 \leqslant x < 0 \quad x=0\text{取}e^{-0}=1 \end{array} \right\}$

这两个函数在 $[-1,0]$ 上都有界, 而且只有$x=0$处不同值其它处均相等。

根据上文知道因为$2x-1 \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$可积 $\Rightarrow 2x-1 \quad -1 \leqslant x < 0 \quad x=0$取$e^{-0}=1$也可积且积分值相同

此外根据$N-L$公式$f(x)$ 可积只需要$F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，那么只要是有限个点$F'(x) \neq f(x)$

还是能有 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ 那么在此题中$F(x) \left\{ \begin{array}{c} x^2 - x \quad -1 \leqslant x < 0 \\ -e^{-x} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array} \right\}$

我们发现并不连续在$x=0$补充为$F(x) \left\{ \begin{array}{c} x^2 - x \quad -1 \leqslant x < 0 \\ -e^{-x}+1 \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array} \right.$ 所以积分值为$F(1) - F(-1)\}$

Proposition 3.6

若f是以T为周期的周期函数, 那么若 $\int_0^T f(t)dt$可积 $\Rightarrow \int_a^{a+T} f(t)dt$也可积且等于 $\int_0^T f(t)dt$

Proof 因为 $\int_0^T f(t)dt$可积那么$\forall \varepsilon > 0.$存在一个分割$T : \{0 = x_0, x_1 \cdots x_n = b\}$ $st.$ $\sum_{i=1}^{n} w_i \Delta x_i < \varepsilon$

那么针对 $\int_a^{a+T} f(t)dt$我们做分割$T' : \{a = x_0', x_1' \cdots x_n' = a+T\}$ 那么对应的$\Delta x_i'$上的$w_i' = w_i$

同样也有 $\sum_{i=1}^{n} w_i' \Delta x_i' < \varepsilon \Rightarrow \int_a^{a+T} f(t)dt$也可积

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$$

所以只需要证明 $\int_a^0 f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt = 0.$这时 $\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(x+T)dx\ (x = t-T) = \int_0^a f(x)dx$

证毕

Theorem 3.3.5 (可积函数用阶梯函数与连续函数逼近)

1.设$p : [a,b] \to \mathbb{R}.$

如果有分割$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使得在每一个子区间 (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, 2, \cdots, n)$上, p为常值函数

则称p为 $[a,b]$上的阶梯函数.

若f在 $[a,b]$上可积

求证 : 对任给的$\varepsilon > 0$, 必存在 $[a,b]$上的阶梯函数p和q, 使得在 $[a,b]$上, 有$p \leqslant f \leqslant q$, 并且 $\int_a^b (q(x) - p(x))\mathrm{d}x < \varepsilon.$

2.设f在 $[a,b]$上可积.

求证 : 对任给的$\varepsilon > 0$, 必存在 $[a,b]$上的连续函数p和q, 使得在 $[a,b]$上, 有$p \leqslant f \leqslant q$, 并且 $\int_a^b (q(x) - p(x))\mathrm{d}x < \varepsilon$

Proof 1.证明因为f在 $[a,b]$上可积, 所以对任意的$\varepsilon > 0$, 存在分割$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$使得 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$

作阶梯函数

$$q(x)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x), & x\in(x_{i-1},x_i)\\ f(x_i), & x=x_i,\end{cases}$$

$$p(x)=\begin{cases}\inf\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x), & x\in(x_{i-1},x_i)\\ f(x_i), & x=x_i,\end{cases},$$

这样就有 $\int_a^b (q(x)-p(x))\mathrm{d}x=\sum\limits_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon$

2.因为f在$[a,b]$上可积,所以对任意的$\varepsilon>0$,存在分割$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$使得$\sum\limits_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon/2$.

先按1.式作出函数p和q.现在取定一个足够小的正数δ,并记$M_i=\sup\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x), m_i=\inf\limits_{x\in(x_{i-1},x_i)} f(x)$.

如果$M_i\leqslant M_{i+i}$,就用线性函数在$[x_i-\delta,x_i]$上代替$q(x)$

如果$M_i>M_{i+1}$,就用线性函数在$[x_i,x_i+\delta]$上代替$q(x)$.

如果$m_i\leqslant m_{i+i}$,就用线性函数在$[x_i,x_i+\delta]$上代替$p(x)$

如果$m_i>m_{i+1}$,就用线性函数在$[x_i-\delta,x_i]$上代替$p(x)$.

这样就得到了连续函数p和q,且满足$p\leqslant f\leqslant q$.易见当δ足够小时有$\left|\sum\limits_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i-\int_a^b (q(x)-p(x))\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

从而 $\int_a^b (q(x)-p(x))\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\sum\limits_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$

3.3.1 达布上和, 下和

Definition 3.1

设函数f在区间$[a,b]$上有界.给定$[a,b]$的一个分割$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

把$f([x_{i-1},x_i])$的上确界和下确界分别记作M_i和$m_i(i=1,2,\cdots,n)$.令

$\bar{S}(f,\pi):=\sum\limits_{i=1}^n M_i\Delta x_i,\quad \underline{S}(f,\pi):=\sum\limits_{i=1}^n m_i\Delta x_i.$

我们把$\bar{S}(f,\pi)$与$\underline{S}(f,\pi)$分别称为函数$f(x)$关于分割π的*Darboux*上和 (*upper Darboux sum*)

与*Darboux*下和 (*lower Darboux sum*)

Note 接下来,我们来研究上和与下和.类比数列(或函数)的上极限与下极限,我们可以猜测上和与下和可能有以下结论:

(1)所有上和组成的集合有下界,从而有下确界;所有下和组成的集合有上界,从而有上确界.

我们暂且把这个下确界和上确界分别称为上积分与下积分.

(2)在某个过程中,下和单调递增且有上界,上和单调递减且有下界,因此它们都有极限,它们的极限恰好是上积分与下积分.

(3)任何有界函数都存在上积分与下积分.函数*Riemann*可积当且仅当它的上积分等于下积分.

(4)显然我们会有给定一个分割π有$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\overline{S}(f,\pi)$

Theorem 3.3.6

给定一个分割π,相对于任何点集$\{\xi_i\}$而言,上和是所有积分和的上确界,下和是所有积分和的下确界.即

$\overline{S}(f,\pi)=\sup\limits_{\{\xi_i\}}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,\quad \underline{S}(f,\pi)=\inf\limits_{\{\xi_i\}}\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$

Proof 对于任何点集$\{\xi_i\}$而言,上和与下和分别是上界与下界.现证明它们分别是全体积分和的最小上界与最大下界.

$\forall\varepsilon>0$,在各个Δ_i上由于M_i是$f(x)$的上确界,故可选取点$\xi_i\in\Delta_i$,使$f(\xi_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$.于是有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \sum_{i=1}^{n}\left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \overline{S}(f,\pi) - \varepsilon.$$

这就证明了在给定分割下$\overline{S}(f,\pi)$是全体积分和的上确界.类似地可证$\underline{S}(f,\pi)$是全体积分和的下确界.

Theorem 3.3.7

设给定一个分割π,在此基础上增加p个分点得到π^*我们有

$\overline{S}(f,\pi) \geqslant \overline{S}(f,\pi^*) \geqslant \overline{S}(f,\pi) - wp\,\|\pi\| \qquad \underline{S}(f,\pi) + wp\,\|\pi\| \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{S}(f,\pi^*)$

指出上和不增.下和不减

Proof 归纳法的思想，我们就先证明一个分点的情况.该分点必然落到了Δ_k中分成了Δ'_k和Δ''_k

那么$\overline{S}(f,\pi) - \overline{S}(f,\pi^*) = M_k\Delta x_k - (M'_k\Delta x'_k + M''_k\Delta x''_k) = (M_k - M'_k)\Delta x'_k + (M_k - M''_k)\Delta x''_k$

我们还有$m \leqslant M'_k\,(M''_k) \leqslant M_k \leqslant M$

$\Rightarrow 0 \leqslant \overline{S}(f,\pi) - \overline{S}(f,\pi^*) \leqslant (M-m)\Delta x'_k + (M-m)\Delta x''_k = w\Delta x_k \leqslant w\,\|\pi\|$

利用归纳法即可

Theorem 3.3.8

已知两个分割π_1和π_2

必定有$\overline{S}(f,\pi_1) \geqslant \underline{S}(f,\pi_2)$

Proof 令$\pi = \pi_1 + \pi_2$那么,由上和不增，下和不减我们有$\overline{S}(f,\pi_1) \geqslant \overline{S}(f,\pi) \geqslant \underline{S}(f,\pi) \geqslant \underline{S}(f,\pi_2)$

Definition 3.2

设函数f在区间$[a,b]$上有界

f在$[a,b]$上的所有*Darboux*上和组成的集合的下确界称为f在$[a,b]$上的*Darboux*上积分 (*upper Darboux integral*)

f在$[a,b]$上的所有*Darboux*下和组成的集合的上确界称为f在$[a,b]$上的*Darboux*下积分 (*lower Darboux integral*)

简称上积分与下积分,分别记作：
$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \inf\{\bar{S}(f,\pi) \mid \pi \text{ 是}[a,b]\text{的一个分割}\} = \inf_{\pi}\bar{S}(f,\pi).$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{\underline{S}(f,\pi) \mid \pi \text{ 是}[a,b]\text{的一个分割}\} = \sup_{\pi}\underline{S}(f,\pi).$$

当f的上积分和下积分都等于$I \in \mathbb{R}$时,我们称f在$[a,b]$上*Darboux*可积 (*Darboux integrable*)

称I是f在$[a,b]$上的*Darboux*积分 (*Darboux integral*).

Theorem 3.3.9

设函数f在区间$[a,b]$上有界.作$[a,b]$的一个分割π.则

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\bar{S}(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x. \qquad \lim_{\|\pi\|\to 0}\underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof $\forall\varepsilon > 0; \exists\pi_0$使得$\underline{S}(f,\pi_0) > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}$设$\pi_0$一共有$l$个分割点 (不含 a,b) ,则对于$[a,b]$的任一分割π,当$\|\pi\| < \varepsilon/(2l\omega+1)$时

可知$\underline{S}(f,\pi) \geqslant \underline{S}(f,\pi_0+\pi) - l\omega\,\|\pi\| \geqslant \underline{S}(f,\pi_0) - l\omega\,\|\pi\| > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} - l\omega\cdot\frac{\varepsilon}{2l\omega+1} > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{I} - \varepsilon.$

因此$\underline{I} - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$.于是可知$\lim_{\|\pi\|\to 0}\underline{S}(f,\pi) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$

性质 1.设函数 $f(x) \in O[a,b], \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

2.设函数 $f(x), g(x) \in O[a,b]$, 且 $f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$

3.设函数 $f(x) \in O[a,b], c \in [a,b] \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$

4.设函数 $f(x), g(x) \in O[a,b] \Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx \geqslant \overline{\int_a^b} (f+g)\,dx. \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leqslant \underline{\int_a^b} (f+g)\,dx$

5.设函数 f, g 在 $[a,b]$ 上有界，对于 $c \geqslant 0$ 有 $\overline{\int_a^b} cf(x)\,dx = c\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \underline{\int_a^b} cf(x)\,dx = c\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

6.设函数 f, g 在 $[a,b]$ 上有界，对于 $c \leqslant 0$ 有 $\overline{\int_a^b} cf(x)\,dx = c\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \qquad \underline{\int_a^b} cf(x)\,dx = c\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Theorem 3.3.10

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.则以下4个命题等价：

$1^\circ f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $Riemann$ 可积.

2° 作分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.设 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅为 $\omega_i (i = 1, 2, \cdots)$.则 $\lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$

3° 对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在 $[a,b]$ 的一个分割 π 使得 $\bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$.

$4^\circ f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $Darboux$ 可积.

Proof (i) 证明 $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$.若 1° 成立, 令 $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 无论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中如何选取都有 $I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < I + \frac{\varepsilon}{3}$

因而有 $I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \bar{S}(f,\pi) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}$.因此 $0 \leqslant \bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow 0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$.于是可知 $\lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$

(ii) 证明 $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$.若 2° 成立, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都存在一个 $[a,b]$ 的分割 π 使得 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$

(iii) 证明 $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$, 若 3° 成立, 则对于任一 $\varepsilon > 0$ 都有 $0 \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$.

令 $\varepsilon \to 0$ 得 $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 于是可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $Darboux$ 可积.

$(iiii)$ 证明 $4^\circ \Rightarrow 1^\circ$.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $Darboux$ 可积, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.

故对于任一分割 π 都有 $\underline{S}(f,\pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \bar{S}(f,\pi)$.

令上式中的 $\|\pi\| \to 0$, 由 $Darboux$ 定理可知 $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\| \to 0} \underline{S}(f,\pi) \leqslant \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \lim_{\|\pi\| \to 0} \bar{S}(f,\pi) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.

由夹逼定理可知, 极限 $\lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在.于是可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $Riemann$ 可积.

3.3.2 勒贝格可积理论

Definition 3.3

设$E \subseteq \mathbb{R}$.若对任意$\varepsilon > 0$, 存在至多可数个开区间$\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$组成$E$的一个开覆盖, 满足$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |I_n| \leqslant \varepsilon$

则称E是一个零测度集 ($nullset$), 简称零测集

Proposition 3.7

空集是零测集

Proposition 3.8

设$A \subseteq B$, 若B是一个零测集，那么A也为一个零测集

Theorem 3.3.11

设A是至多可数集 $\Rightarrow A$为零测集

Proof 不妨设A为无限可数集, $A = \{a_1 \cdots a_n \cdots\}.\forall\varepsilon > 0$,

令$I_n = \left\{a_n - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right\} \quad n = 1, 2 \cdots$ 显然I_n是A的一个开覆盖且是可数的

此时$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

Note 注意: 至多可数集一定为零测集, 但是不可数集也有可能是零测集合也有可能为非零测集

Theorem 3.3.12

至多可数个零测集的并集仍是零测集.

Proof 不妨设可数个零测集$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$.则对于任意给定的$\varepsilon > 0$都存在一个开区间列$\{I_{n1}, I_{n2}, \cdots\}$使得

$A_n \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_{ni} (n = 1, 2, \cdots)$, 且$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_{ni}| < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$此时$\{I_{ni} : n, i = 1, 2, \cdots\}$仍是一列开区间

它显然是$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$的一个开覆盖, 且满足$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_{ni}| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$.于是可知$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$仍是一个零测集.

Theorem 3.3.13 ($Lebesgue - Vitali$定理)

设函数f在区间$[a, b]$上有界.则f在$[a, b]$上$Riemann$可积$\Leftrightarrow f$在$[a, b]$上的不连续点组成的集合是一个零测集.

Proof

必要性：

由题干知道$D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{1/n}$那么若证明了$\forall\delta > 0, D_\delta$都是零测集, 那么根据定理4.2.12知道$D(f)$也就是零测集

在$[a, b]$上做分割$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b.\quad D_\delta \subseteq \{x_0, x_1 \cdots x_m\} \cup \left\{(x_{i-1}, x_i)\right.$某些小区间中含有不连续点$\left.\right\}$

基于此思想我们令$\Lambda = \left\{i \middle| \; D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \varnothing\right\}$.

所以$D_\delta \subseteq \left[\bigcup\limits_{i\in\Lambda} (x_{i-1}, x_i)\right] \cup \left[\bigcup\limits_{i=0}^{m} \left(x_i - \dfrac{\varepsilon}{4(m+1)}, x_i + \dfrac{\varepsilon}{4(m+1)}\right)\right]$

下面我们希望对上述$x_0 \sim x_m$用小区间盖住, 然后含不连续点的小区间.这二者长度和能够充分小就证明了零测集

第一步：$\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\Delta x_i \geqslant \sum\limits_{i\in\Lambda} w_i\Delta x_i \geqslant \delta\sum\limits_{i\in\Lambda} \Delta x_i$由黎曼可积条件我们知道$\forall\varepsilon > 0$, 那么$\exists$对应的分割$\pi$, 有$\sum\limits_{i=1}^{m} w_i\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon\delta}{2}$

所以得到 $\sum_{i\in\Lambda}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$

第二步：对$x_0\sim x_m$，构造 $\left(x_i-\frac{\varepsilon}{4(m+1)},x_i+\frac{\varepsilon}{4(m+1)}\right)$ 那么 $\bigcup_{i=0}^{m}\left(x_i-\frac{\varepsilon}{4(m+1)},x_i+\frac{\varepsilon}{4(m+1)}\right)=\frac{\varepsilon}{2}$

那么开区间族$I_n=\left(\bigcup_{i\in\Lambda}\Delta x_i\right)\cup\left(\bigcup_{i=0}^{m}\left(x_i-\frac{\varepsilon}{4(m+1)},x_i+\frac{\varepsilon}{4(m+1)}\right)\right)$是可数的且长度 $<\varepsilon$

所以$D_\delta\subseteq I_n$因此不连续点是一个零测集合

Proof 关键思想根据推论**??**

充分性：

设$D(f)$是一个零测集,$\forall\varepsilon>0$, 存在$D(f)$的开覆盖$\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$使得即$\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i)<\frac{\varepsilon}{2w_{[a,b]}}$

令$K=[a,b]\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)$那么$\exists\delta>0, st.\ x\in K, y\in[a,b]$ 且 $|x-y|<\delta$有 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

令$\Lambda_1=\{i|\ K\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing\}\quad \Lambda_2=\{i|\ K\cap(x_{i-1},x_i)=\varnothing\}\left(\text{这说明对应的 }(x_{i-1},x_i)\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)\right)$

则 $\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i=\sum_{i\in\Lambda_1}w_i\Delta x_i+\sum_{i\in\Lambda_2}w_i\Delta x_i$

其中 $\sum_{i\in\Lambda_1}w_i\Delta x_i$我们有

$w_i=\sup\{|f(z_1)-f(z_2)|:z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i]\}$

$\leqslant\sup\{|f(z_1)-f(y_i)|+|f(y_i)-f(z_2)|:z_1,z_2\in[x_{i-1},x_i],y_i\in K\cap(x_{i-1},x_i)\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

所以 $\sum_{i\in\Lambda_1}w_i\Delta x_i<(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}$

其中 $\sum_{i\in\Lambda_2}w_i\Delta x_i$我们有

$\sum_{i\in\Lambda_2}w_i\Delta x_i<w_{[a,b]}\sum_{i\in\Lambda_2}\Delta x_i\leqslant w_{[a,b]}\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i-\alpha_i)<\frac{\varepsilon}{2w_{[a,b]}}w_{[a,b]}=\frac{\varepsilon}{2}$

所以 $\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i=\sum_{i\in\Lambda_1}w_i\Delta x_i+\sum_{i\in\Lambda_2}w_i\Delta x_i<\varepsilon$

则黎曼可积

Note 设零测集$E_0\subseteq E.P$是一个与E中元素有关的命题.若对于任一$x\in E\setminus E_0$, 命题P都成立, 则P在E上几乎处处 (*almost everywhere*)成
于是以上定理可以说成：有界函数f在 $[a,b]$上*Riemann*可积当且仅当f在 $[a,b]$几乎处处连续.

Corollary 3.2

设函数f在 $[a,b]$上有界.若f在 $[a,b]$上只有至多可数个间断点, 则f在 $[a,b]$上*Riemann*可积.

设函数f在 $[a,b]$上*Riemann*可积.则$|f|$也在 $[a,b]$上*Riemann*可积.

设函数f和g在 $[a,b]$上*Riemann*可积.则fg也在 $[a,b]$上*Riemann*可积.

设函数f在 $[a,b]$上*Riemann*可积.若 $[a_1,b_1]\subseteq[a,b]$, 则f在 $[a_1,b_1]$ 上*Riemann*可积.

设函数f在 $[a,b]$和 $[b,c]$上都*Riemann*可积, 则$f(x)$在 $[a,c]$上*Riemann*可积.

设函数T满足$T(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$, 其中$q>0,p,q\in\mathbb{Z}^*$, 且$p,q$互素.

则T在任一有限区间 $[a,b]$上都*Riemann*可积, 且 $\int_a^b T(x)\mathrm{d}x=0$

设函数f在 $[a,b]$上连续, g在 $[c,d]$上可积.若$g([c,d])\subseteq[a,b]$.则$f\circ g$在 $[c,d]$上可积.

Proof 证明由于至多可数集是零测集, 由$Lebesgue$定理可知f在 $[a,b]$上$Riemann$可积.

由于f在 $[a,b]$上$Riemann$可积, 由$Lebesgue$定理可知$D(f)$是一个零测集.
由于$D(|f|)\subseteq D(f)$, 因此$D(|f|)$也是一个零测集. 由$Lebesgue$定理可知$|f|$也在 $[a,b]$上$Riemann$可积

由于函数f和g在 $[a,b]$上$Riemann$可积, 由$Lebesgue$定理可知$D(f)$和$D(g)$都是零测集.
由于$D(fg)\subseteq D(f)\cup D(g)$, 因此$D(fg)$也是一个零测集. 由$Lebesgue$定理可知$fg$也在 $[a,b]$上$Riemann$可积.
这是因为f,g若都在x_0点连续那么fg也在x_0连续. 所以fg的不连续点至少是f，g中一个的不连续点

把函数f在 $[a,b]$上的不连续点集记作$D(f,[a,b])$. 由于f在 $[a,b]$上$Riemann$可积
由$Lebesgue$定理可知$D(f,[a.b])$是一个零测集. 由于 $[a_1,b_1]\subseteq[a,b]$, 故$D\left(f,[a_1,b_1]\right)$ 也是一个零测集.
由$Lebesgue$定理可知f也在 $[a_1,b_1]$ 上$Riemann$可积.

由于f在 $[a,b]$和 $[b,c]$上都$Riemann$可积, 由$Lebesgue$定理可知$D(f,[a,b])$和$D(f,[b,c])$都是零测集.
由于$D(f,[a,c])=D(f,[a,b])\cup D(f,[b,c])$, 因此$D(f[a,c])$也是一个零测集.
由$Lebesgue$定理可知$1/f$也在 $[a,c]$上$Riemann$可积.

由可知, 函数T在任一无理点都连续, 在任一有理点都不连续, 因此$D(T)=\mathbb{Q}$是一个零测集.
由$Lebesgue$定理可知T在任一有限闭区间都$Riemann$可积. 由$Riemann$积分的定义可知 $\int_a^b T(x)\mathrm{d}x=0$

设$C=[c,d]\backslash D(g)$, 则$f\circ g$在C上连续. 因此$D(f\circ g)\subseteq D(g)$. 由于$g$在上 $[c,d]$上$Riemann$可积
由$Lebesgue$定理可知$D(g)$是一个零测集, 因此$D(f\circ g)$也是一个零测集. 由$Lebesgue$定理可知$f\circ g$在 $[c,d]$上$Riemann$可积.

Example 3.1 注若f在 $[a,b]$上连续改成f在 $[a,b]$上$Riemann$可积, 则结论不成立. 举例说明：

设$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $\quad T(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$

显然f和T都是在$\mathbb{R}$上任一有限闭区间上$Riemann$可积. 而$f[T(x)]=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$

这是$Dirichlet$函数, 它在$\mathbb{R}$上任一有限闭区间上都不可积.

Corollary 3.3

单调函数一定可积

Proof 根据 Froda 定理 **??**即可

3.4 积分中值定理和上限函数

Theorem 3.4.1 (积分第一中值定理)

(积分第一中值定理) 若f 在 $[a,b]$上连续, 则至少存在一点$\xi \in [a,b], st. \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

Proof $proof$: 由于f 在 $[a,b]$上连续, 因此存在最大值M 和最小值m. 由$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b]$,
$\Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a), \Rightarrow m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$. 再由连续函数的介值性, 至少存在一点$\xi \in [a,b]$, 使得
$\Rightarrow f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,

Theorem 3.4.2 (推广的第一积分中值定理)

1.$f \in R[a,b], g(x) \in R[a.b]$ 则存在$\eta \in \left[\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x), \sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)\right]$ 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \eta\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

2.若$f \in C[a,b]$ 且$g(x) \in R[a,b]$ 且$g(x)$在 $[a,b]$上不变号,
则至少存在一点$\xi \in [a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Proof $proof$: 不妨设$g(x) \geqslant 0, x \in [a,b]$. 这时有$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), x \in [a,b]$, 其中$M, m$ 分别为f 在 $[a,b]$上的.
最大、最小值, 由定积分的不等式性质, 得到$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 则由上式知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$, 从而对任何$\xi \in [a,b]$, 都成立.
若 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$, 则得$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M$. 由连续函数的介值性, 必至少有一点$\xi \in [a,b]$, 使得$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$,

Corollary 3.4

进一步证明积分第一中值定理 (包括定理9.7和定理9.8) 中的中值点$\xi \in (a,b)$

Proof 先来证明 : $f \in C[a,b]$; 则$\exists\xi \in (a,b)$ 满足 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$
构造$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$则$F(x)$ 函数在 $[a,b]$ 上连续, (a,b) 上可导
由拉格朗日中值定理知 : $\exists\xi \in (a,b)$ 满足$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

Proof 证明推广的积分第一中值定理2. (为方便起见一开始就不妨设g是大于等于0)
因为$f(x)$在 $[a,b]$上连续, 故$f(x)$有最大值和最小值（记为M和m), 即$\forall x \in [a,b]$, 有$m \leqslant f(x) \leqslant M$.
因此$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.$(*)$
(1)若$m = M$, 则$f(x)$为常数, $m \equiv f(x) \equiv M$, 式 $(*)$ 变成等式, (a,b)的每个x都可作为ξ满足公式（属于平凡情况无须讨论）
(2)若$G = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 也是平凡的因为 : 此时式（$*$）左右两端都为零, 所以 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0. \forall\xi \in (a,b)$, 都成立.
(3)若$G = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$($G < 0$类似可证), 此时式 $(*)$ 等价于$m \leqslant \mu \xlongequal{\text{记}} \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M$.
下面分4种情况进行讨论
(i) 当$m = \mu = M$时, $f(x)$为常数, 即$\forall x \in (a,b)$都可作为ξ.

(ii) 当$m<\mu<M$时, 利用f连续的介值性, 知$\exists\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=\mu=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$, 满足成立

(iii) 当$m<\mu=M$, 即$\mu=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}=M$时, 两边同乘 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, 得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x$

亦即 $\int_a^b (M-f(x))g(x)\mathrm{d}x=0$(1)

因 $(M-f(x))g(x)\geqslant 0$

$\Longrightarrow\forall\,[x',x'']\subset[a,b]$, 恒有 $\int_a^b (M-f(x))g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x'}^{x''}(M-f(x))g(x)\mathrm{d}x$.(2)

由于$g(x)$可积, $g(x)$在 $[a,b]$上的$Darboux$下和有极限 : $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\overset{\text{记}}{=\!=}G>0$($\lambda$是最大" 小区间" 的长度).

因此, 当分划足够细密时, 有$\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\geqslant\dfrac{G}{2}$从而至少有一个小区间设为第$k$个小区间: $[x_{k-1},x_k]$)使得对应的$m_k\geqslant\dfrac{G}{2(b-a)}$

上述式子是一定存在.否则, 对每个$m_i<\dfrac{G}{2(b-a)}$, 有$\sum\limits_{k=1}^{n}m_i\Delta x_i<\dfrac{G}{2(b-a)}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_i=\dfrac{G}{2}$, 与$\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\geqslant\dfrac{G}{2}$矛盾

用小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 取代 (2) 式里的 $[x',x'']$, 则由 (1) (2) 有

$$0=\int_a^b (M-f(x))g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_{k-1}}^{x_k}(M-f(x))g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_{k-1}}^{x_k}(M-f(x))m_k\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_{k-1}}^{x_k}(M-f(x))\frac{G}{2(b-a)}\mathrm{d}x\geqslant 0$$

此式说明 : $\int_{x_{k-1}}^{x_k}(M-f(x))\dfrac{G}{2(b-a)}\mathrm{d}x=0$.又$G>0$

故$\forall x\in[x_{k-1},x_k]$, 有$f(x)\equiv M=\mu$

$$\Longrightarrow f(x)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\ (\forall x\in[x_{k-1},x_k]\text{ 成立})$$

即 : $\forall x\in(x_{k-1},x_k)$ 都可选作ξ, 使得$f(\xi)=\mu$, 满足式公式 (2)获证.

(iv) 当$m=\mu<M$时, 类似iii）可证.

Proposition 3.9

prove : 若f 在$[a,b]$上可积, 则由(1)式所定义的函数$\Phi(x)$ 即积分上限函数, 在$[a,b]$上连续. 更进一步为 Lipschitz 连续

Proof *proof* : 对$[a,b]$上任一确定的点x, 只要$x+\Delta x\in[a,b]$, 按定义式

$\Delta\Phi=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t$.因$f$ 在$[a,b]$上有界, 可设$|f(t)|\leqslant M, t\in[a,b]$.于是, 当$\Delta x>0$时, 有

$|\Delta\Phi|=\left|\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant M\Delta x$; 当$\Delta x<0$时, 则有$|\Delta\Phi|\leqslant M|\Delta x|$.

由此得到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi=0$, 即证得$\Phi$ 在点x 连续.由x 的任意性, Φ在$[a,b]$上处处连续.

Proposition 3.10

prove : 若f在 $[a,b]$上连续, 则所定义的积分上限函数Φ 在 $[a,b]$上处处可导,
且$\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x), x\in[a,b]$.

Proof *proof* : 对 $[a,b]$上任一确定的x, 当$\Delta x\neq 0$且$x+\Delta x\in[a,b]$时, 按定义式和积分第一中值定理, 有

$\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(x+\theta\Delta x),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$

因f 在点x 连续, 故有$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\theta\Delta x)=f(x)$.由$x$ 在 $[a,b]$上任意性, 证得Φ 是f 在 $[a,b]$上的一个原函数.

若函数g在 $[a,b]$上非负且单调递减.那么应该存在$\eta\in(a,b)$, 使得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$定义的曲边梯形面积等于一个长和宽分别为$g(a)$和$\xi-a$的矩形面积.

这个结论可以表述为：设函数g在 $[a,b]$上非负且单调递减, 则存在$\eta\in[a,b]$使得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=g(a)(\eta-a)$.

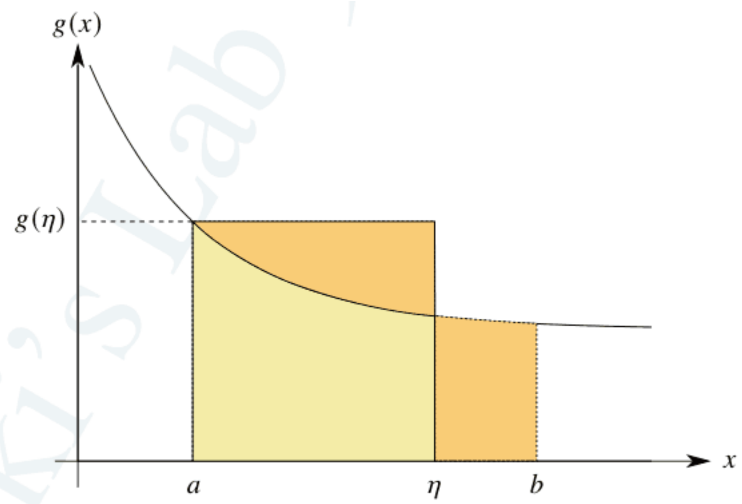


图 3.1

这个结论不难证明.只需令$\varphi(x)=g(a)(x-a)$.显然φ是一个连续函数.由于$\varphi(a)\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\varphi(b)$.

由介值定理可知存在$\eta\in[a,b]$使得$\varphi(\eta)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.这就是 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=g(a)(\eta-a)$.这就是第二种积分中值定理.

仿照第一种积分中值定理, 我们可以把在上述结论中塞入另一个函数, 让等式变成：

$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\eta f(x)\mathrm{d}x$类似地, 可以先令$\varphi(x)=g(a)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

显然φ是一个连续函数, 因此只需证明 $\min\limits_{x\in[a,b]}\varphi(x)\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le\max\limits_{x\in[a,b]}\varphi(x)$.然后根据介值定理即可知道结论正确.

Theorem 3.4.3 (Bonnet 积分第二中值定理形式 1)

prove：(积分第二中值定理)设函数f 在$[a,b]$上可积.

(i)若函数g 在$[a,b]$上减, 且$g(x)\geqslant 0$, 则存在$\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$;

(ii)若函数g 在$[a,b]$上增, 且$g(x)\geqslant 0$, 则存在$\eta\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x$.

注意只要 g 函数在 (a,b) 区间内不恒为常数即可改变为开区间

Proof 下面只证 (i), 类似地可证 (ii).

设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b]$.

由于f在 $[a,b]$上可积, 因此F在 $[a,b]$上连续, 从而存在最大值M和最小值m.

若$g(a)=0$, 由假设$g(x)\equiv 0, x\in[a,b]$, 此时对任何$\xi\in[a,b]$, 定理的式子恒成立.

故不妨设设$g(a)>0$,

这时要证明的式子即为：$\exists\xi$满足$F(\xi)=\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

$\Longleftrightarrow$ 证明$m\leqslant\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M$

$\Longleftrightarrow$ 证明$mg(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant Mg(a)$,

下证明此式子

由条件f有界, 设$|f(x)| \leqslant L, x \in [a,b]$; 而$g$为单调函数必为可积函数,
从而$\forall \varepsilon > 0$, 必有分割$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使$\sum\limits_T \omega_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{L}$.

现把$I = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$按积分区间可加性写成

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

对于I_1有 $|I_1| \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})| \cdot |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant L \cdot \sum\limits_{i=1}^n \omega_i^g \Delta x_i < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

对于I_2, 由于$F(x_0) = F(a) = 0$和 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{x_{i-1}} f(x)\mathrm{d}x = F(x_i) - F(x_{i-1})$,

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \\
&= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
&= g(x_0)[F(x_1) - F(x_0)] + g(x_1)[F(x_2) - F(x_1)] + \cdots + g(x_{n-1})[F(x_n) - F(x_{n-1})] \\
&= F(x_1)[g(x_0) - g(x_1)] + \cdots + F(x_{n-1})[g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})] + F(x_n) g(x_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b) g(x_{n-1})
\end{aligned}
$$

再由$g(x) \geqslant 0$且为递减, 使得其中$g(x_{n-1}) \geqslant 0, g(x_{i-1}) - g(x_i) \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$.且有$F(x_i) \leqslant M, i = 1, 2, \cdots, n$
估计

$$
I_2 \leqslant M \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i-1}) - g(x_i)] + M g(x_{n-1}) = M g(a).
$$

同理由$F(x_i) \geqslant m, i = 1, 2, \cdots, n$又有$I_2 \geqslant m g(a)$.

$\Longrightarrow -\varepsilon + m g(a) \leqslant I \leqslant M g(a) + \varepsilon \Longrightarrow m g(a) \leqslant I \leqslant M g(a)$,

Theorem 3.4.4 (Bonnet 积分第二中值定理形式 2)

设函数f 在$[a,b]$上可积.若g 为单调函数, 则存在$\xi \in [a,b]$,
使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a) \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$.
注意只要 g 函数在 (a,b) 区间内不恒为常数即可改变为开区间

Proof *proof*: 若g 为单调递减函数, 令$h(x) = g(x) - g(b)$, 则h 为非负, 递减函数.由定理存在$\xi \in [a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(a) \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = [g(a) - g(b)] \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.由于 $\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - g(b) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,
因此证得

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= g(b) \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + [g(a) - g(b)] \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x \\
&= g(a) \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b) \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

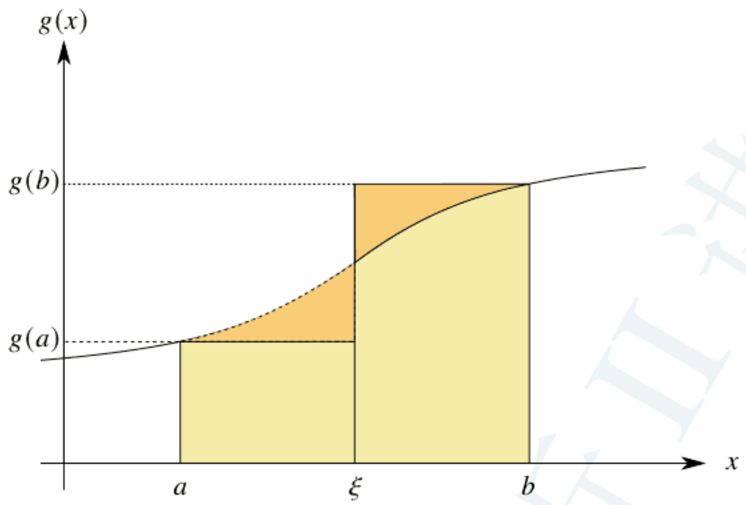


图 3.2

Corollary 3.5 (推广积分第二中值定理)

因为改变有限个点的值不影响函数可积性与积分值.
所以我们适当修改$f(x)$该单调函数在端点处的取值,改为A,B但是需要保证原来的单调性
所以
若$f(x)$单调递减$A\geq f(a+0)$与$B\leq f(b-0)$,
若$f(x)$单调递增$A\leq f(a+0)$与$B\geq f(b-0)$,
用A,B代替$f(a)$与$f(b)$的值,这样$f(x)$的单调性也不会发生改变,从而我们可以得到这样的结果:
$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + B\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$这里的$\xi$依旧是区间$[a,b]$中的某个数,具体值依赖于$A,B$的选取.

Theorem 3.4.5

$prob$:若在$[a,b]$上f为连续函数,g为连续可微的单调函数,
$prove$:存在$\xi\in[a,b]$,使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$.

Proof $proof$:相比于积分第二中值定理这里的条件更强了(f可积$\to$连续 g单调$\to$单调且连续可微)
设$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$,则$F'(x)=f(x)$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x) = g(x)F(x)|_a^b - \int_a^b g'(x)F(x)\mathrm{d}x = g(b)F(b) - \int_a^b g'(x)F(x)\mathrm{d}x$$

由假设$g(x)$为单调函数,故$g'(x)$不变号,从而根据推广的积分第一中值定理,存在$\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)F(b) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - [g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

Proposition 3.11

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 若$f(x)$在$[a,b]$上除x_0处外均连续

$$
\begin{cases}
f(x) & F(x)=\int_a^x f(t)d\mathrm{t} \\
\text{连续} & \text{连续且可导数且} F'(x_0)=f(x_0) \\
\text{可去间断点} & \text{连续且可导数且} F'(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x) \\
\text{跳跃间断点} & \text{连续但不可导且} F'_-(x_0)=f\left(x_0^-\right); F'_+(x_0)=f\left(x_0^+\right)
\end{cases}
$$

3.5 定积分相关性质与余项

3.5.1 Wallis 公式与相关公式

Theorem 3.5.1

$solve:\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots.$

二者相等且有

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

Proof 当$n\geqslant 2$时,用分部积分求得

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$
$$=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n.$$

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2},\quad n\geqslant 2. J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1$$

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\quad J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\mathrm{d}x,\Rightarrow\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}<\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!},$$

$$A_m=\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m+1}<\frac{\pi}{2}<\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m}=B_m.$$

$$\Rightarrow 0<B_m-A_m=\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\frac{1}{2m(2m+1)}<\frac{1}{2m}\cdot\frac{\pi}{2}\to 0(m\to\infty),\text{所以}\lim_{m\to\infty}(B_m-A_m)=0.\text{而}\frac{\pi}{2}-A_m<B_m-A_m,$$

故得 $\lim_{m\to\infty}A_m=\frac{\pi}{2}$

Theorem 3.5.2 (Wallis 公式)

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}$
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\sqrt{\pi}$
3. $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{\pi}{2}.$

Proof 1.由上个定理的夹逼定理知道

2.注以上公式开方后可得

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{[(2n)!!]^2}{(2n-1)!!(2n)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$$

3.计算得

$$
\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{2k-1} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{2k-1} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \\
&= \frac{1}{2n+1} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)^2}.
\end{aligned}
$$

即得 $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 3.12

设 $f(x)$ 为连续函数

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \qquad \int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi} \cos^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x \text{ (拆开利用区间再现)}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 4\int_0^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x & n\text{为偶数} \\ 0 & n\text{为奇数} \end{cases} \text{(利用周期性)}$$

Proof *proof* : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \xlongequal{\text{令}x=\frac{\pi}{2}-t} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx \xlongequal{\text{令}x=\pi-t} \int_{\pi}^{0} (\pi-t)f(\sin t)dt &= \int_0^{\pi} (\pi-t)f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t)dt \\
&= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx
\end{aligned}
$$

$\therefore \int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

Proposition 3.13

已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 T 的可积函数, 则对任意的实数 a, 都有 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x$.

Proof 令 $x = T+u$, 则有 $\int_T^{T+a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(T+u)\mathrm{d}(T+u) = \int_0^a f(u)\mathrm{d}u = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$, 所以

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^T f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

Theorem 3.5.3 (定积分换元法)

定积分换元法

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, φ' 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 且 $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b,\quad \varphi([\alpha,\beta])\subseteq[a,b]$,

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Proof *proof* : 由于 f 在 $[a,b]$ 上连续, 因此它的原函数存在. 设 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 由复合函数微分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

可见 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数. 因为 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 根据

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Theorem 3.5.4

(定积分分部积分法)若$u(x),v(x)$为$[a,b]$上的可微函数,且$u'(x)$和$v'(x)$都在$[a,b]$上可积,

则有定积分分部积分公式:$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$

Proof *proof*:

因为uv 是$uv'+u'v$ 在$[a,b]$上的一个原函数 $\Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [u(x)v'(x)+u'(x)v(x)]\mathrm{d}x = u(x)v(x)|_a^b.$

移项即可

Theorem 3.5.5

定积分换元法增强版本:

设φ 为$[\alpha,\beta]$上的单调可微函数,且φ' 可积.如果f 在区间$\varphi([\alpha,\beta])$上可积,$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$,

$\Rightarrow$ 则$f(\varphi(t))\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上可积,且$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Proof *proof*:不妨设φ 是单调递增函数.任取$[\alpha,\beta]$的一个分割$\pi:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$,

则得到$[a,b]$的一个如下分割$\pi':a=\varphi(\alpha)=x_0\leqslant\varphi(t_1)=x_1\leqslant\cdots\leqslant\varphi(t_n)=x_n=b$

这个分割中可能有相同的分点.根据微分中值定理,存在$\zeta_i\in(t_{i-1},t_i)$,使得$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\zeta_i)(t_i-t_{i-1})$

特别地,因为φ' 可积,从而是有界函数,上式就表明当$\|\pi\|$ 趋于零时,$\|\pi'\|$ 也趋于零.

由φ 的单调性知$\varphi(\zeta_i)\in[\varphi(t_{i-1}),\varphi(t_i)]=[x_{i-1},x_i]$,因此下面的和$\sum_{i=1}^n f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))$

仍为f 在$[a,b]$上的一个Riemann和,且$\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^n f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))=\int_a^b f(x)dx$

另一方面,任取$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$,考虑函数$f(\varphi(t))\varphi'(t)$关于分割π 的Riemann和$\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$,我们有如下估计

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^n f(\varphi(\zeta_i))(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))-\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\right|\\
\leqslant&\left|\sum_{i=1}^n [f(\varphi(\zeta_i))-f(\varphi(\xi_i))](\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))\right|+\left|\sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))(\varphi'(\zeta_i)-\varphi'(\xi_i))(t_i-t_{i-1})\right|\\
\leqslant&\sum_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i+\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{i=1}^n\omega_i(\varphi')\Delta t_i
\end{aligned}$$

根据f 和φ' 的可积性可知,当$\|\pi\|\to0$时最后不等号的右端趋于零因此$f(\varphi(t))\varphi(t)$的Riemann和收玫,且极限为f 在$[a,b]$定积分

Theorem 3.5.6

prob:设$\varphi(t)$在$[a,b]$上连续,$E=\varphi([a,b]),f(x)$在E 上为可微凸函数,则有

prove:$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right)$

Proof *proof*:$let\ \frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\,dt=c;\ \ f$是 E 上的凸函数 $\Rightarrow f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$\Rightarrow f(\varphi(t))\geqslant f(c)+f'(c)(\varphi(t)-c)$

$\int_a^b f(\varphi(t))\,dt\geqslant\int_a^b f(c)\,dt+\int_a^b f'(c)(\varphi(t)-c)\,dt=(b-a)f(c)+f'(c)\int_a^b\varphi(t)\,dt-(b-a)f'(c)c=(b-a)f(c)$

$\Rightarrow\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))\mathrm{d}t\geqslant f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(t)\mathrm{d}t\right)\quad Q.E.D.\square$

Theorem 3.5.7

若f和g可积则有

(Schwarz) 不等式 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$取等号当且仅当 f,g 线性相关

闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式：$\left[\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$

Proof $proof$：若$f(x)$与$g(x)$可积，则$f^2(x), g^2(x), f(x)-g(x)$都可积，且对任何实数$t$，$[tf(x)-g(x)]^2$ 也可积，

又$[tf(x)-g(x)]^2 \geqslant 0$，故 $\int_a^b [tf(x)-g(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0 \Rightarrow t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - 2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$

$\Rightarrow \varDelta \leqslant 0 \Rightarrow \left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 - \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$

$proof$：

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x + 2\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \left[\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

故 $\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$

3.5.2 积分余项的泰勒公式

Theorem 3.5.8

设函数$f \in C^{n+1}(a,b)$，则$\forall x_0 \in (a,b)$都有

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x)$

其中$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t, \quad a < x < b.$

Proof 容易知道$R_n^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$.（这一点把$R_n(x)$写在等号的右边两边求导即可）

反复用分部积分法可得

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(x_0) = \int_{x_0}^x R_n'(t)\mathrm{d}(t-x) = (t-x)R_n'(t)\Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x (t-x)R_n''(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^x R_n''(t)\mathrm{d}(t-x)^2$$

$$= -\frac{1}{2}(t-x)^2R_n''(t)\Big|_{x_0}^x + \frac{1}{2}\int_{x_0}^x (t-x)^2R_n'''(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x_0}^x (t-x)^2R_n'''(t)\mathrm{d}t = \cdots$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\int_{x_0}^x (t-x)^n R_n^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

注 注带积分余项的$Taylor$公式可以导出带$Lagrange$余项和带$Cauchy$余项的$Taylor$公式.由于$(x-t)^n$定号，由积分中值定理可知

存在$\xi \in (x_0, x)$使得$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{n+1}(\xi)\int_{x_0}^x (x-t)^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}f^{n+1}(\xi)\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\Big|_x^{x_0} = \frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$.

这正是$Lagrange$余项.

如果把被积函数$(x-t)^n f^{(n+1)}(t)$看作1和$(x-t)^n f^{(n+1)}(t)$的乘积，则由积分中值定理可知

存在$\eta \in (x_0, x)$使得$R_n(x) = \frac{1}{n!}(x-\eta)^n f^{(n+1)}(\eta)\int_{x_0}^x \mathrm{d}t = \frac{1}{n!}(x-\eta)^n f^{(n+1)}(\eta)(x-x_0)$.

这正是$Cauchy$余项.

注 $Peano$：要求在x_0点n阶可导

$Larange$、$Cauchy$、$Hölder$：要求在(a,b)有$n+1$阶导数

积分：$C^{n+1}(a,b)$

3.6 定积分应用

3.6.1 平面图形面积

Proposition 3.14

设一条没有自交点的封闭曲线的参数方程为$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$. 其中$x(t)$和$y(t)$满足所需要的连续和可导条件.
当t从α变动到β时, 点 $(x(t),y(t))$从A点出发按逆时针方向遍历曲线一周回到A, 其中A的横坐标a是$x(t)$在 $[\alpha,\beta]$上的最小值.
则Γ围成的图形面积为$S=-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\mathrm{d}t$.

Proof 由题意可知$x(\alpha)=x(\beta)=a$.设$x(t)$在 $[\alpha,\beta]$上的最大值为b.取一点B使得B的横坐标为b
设$\gamma\in[\alpha,\beta]$满足$x(\gamma)=b$.设A到B的曲线方程为$y=f_1(x)$, B到A的曲线方程为$y=f_2(x)(a\leqslant x\leqslant b)$
则在 $[a,b]$上有$f_2(x)\geqslant f_1(x)$.于是封闭曲线围成的图形面积为
$$S=\int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x=\int_\beta^\gamma y(t)\mathrm{d}x(t)-\int_\alpha^\gamma y(t)\mathrm{d}x(t)=-\int_\alpha^\beta y(t)\mathrm{d}x(t)=-\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$$
用分部积分法可得$S=-x(t)y(t)|_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta x(t)\mathrm{d}y(t)=\int_\alpha^\beta x(t)\mathrm{d}y(t)=\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t$.
于是可知$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\mathrm{d}t$.
类似可证, A的横坐标如果是 $[\alpha,\beta]$上的最大值, 命题也成立.以上命题是$Green$公式的一个特例.

Definition 3.4 (极坐标型面积)

下面介绍用极坐标表示的曲线围成的图形面积的计算方法.
我们知道圆$r=a$和射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$围成的图形是一个扇形, 它的面积为$S=\frac{\beta-\alpha}{2\pi}\cdot\pi a^2=\frac{1}{2}a^2(\beta-\alpha)$.
下面来看一般情况.设极坐标中的曲线$r=r(\theta)$, 为了计算它与射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$围成的面积
我们可以仿照直角坐标中定义曲边梯形面积的做法.对 $[\alpha,\beta]$作分割$\pi:\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta$.
在小区间 $[\theta_{i-1},\theta_i]$ 中任取一点ξ_i.令$\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$.
于是夹在$\theta=\theta_{i-1},\theta=\theta_i$上半径为$r(\xi_i)$ 的小扇形面积为$\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i,\quad i=1,2,\cdots,n$
作$Riemann$和得$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n r^2(\xi_i)\Delta\theta_i$.类似地, 令分割的宽度 $\|\pi\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta\theta_i\to 0$,
我们把这个极限 (如果存在) 定义为曲线$r=r(\theta)$与射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$围成的面积:
$$S:=\frac{1}{2}\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n r^2(\xi_i)\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

3.6.2 曲线弧长

Definition 3.5

$Definition$: 设$C = \widetilde{AB}$是一条没有自交点的非闭的平面曲线，在C上从A到B依次取分点，记 $\| T \| = \max_{i \le i \leqslant n} | P_{i-1}P_i |$ ，$s_T = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$
表示最长弦的长度和折线的总长度。若存在有限极限 $\lim_{|T| \to 0} s_T = s$; 则称C是可求长的，并把s定义为C的弧长

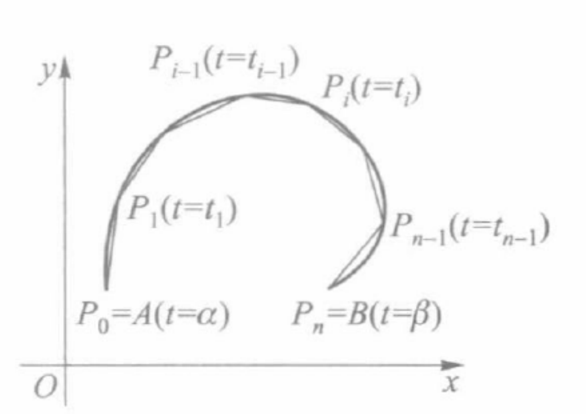


图 3.3

Theorem 3.6.1

$Theorem$: 设曲线C是一条没有自交点的非闭的平面曲线, 由参数方程$x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha, \beta]$;
若$x(t), y(t) \in C^1_{[\alpha,\beta]}$，则$C$是可求长的，$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x\prime(t)]^2 + [y\prime(t)]^2} \mathrm{d}t$.
如果把参数方程$\begin{cases} x = x'(t) \\ y = y'(t) \end{cases}$ 记作$\boldsymbol{r}'(t)$, 则$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \|\boldsymbol{r}'(t)\|$.因此弧长公式可以简化为$S(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \|\boldsymbol{r}'(t)\| \mathrm{d}t$.
对于显式曲线$y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$.可以把它看作参数方程$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ ， $a \leqslant t \leqslant b$.
于是它的弧长公式为$S(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} \mathrm{d}t$

Proof $Proof$: 对C作任意分割$T = \{P_0, P_1 \cdots P_n\}$ 并设P_0与P_n分别对应$t = \alpha$与β; 且$P_i(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i)), i = 1, 2, \cdots, n-1$.
相应的与T对应的得到关于 $[\alpha, \beta]$ 内的一个分割$T\prime : \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$.
$Lemma1°$: 下面证明 : $\lim_{\|T\| \to 0} |T'| = 0$.反证法，若 $\lim_{|T| \to 0} |T'| \neq 0$; 则$\exists \varepsilon_0 > 0; \forall \delta > 0$; 都可以找到分割$T$，使得 $|T| < \delta$
; 同时 $|T'| > \varepsilon_0$; 从而C上可以找到两个点$Q\prime, Q\prime\prime$; $st. |Q'Q''| < \delta$; 而对应的参量 $|t' - t'\prime| \geqslant \varepsilon_0$; 依次取点列$\delta = \frac{1}{n}, n = 1, 2 \cdots$
则得到两个点列 $\{Q'_n\}$ $\{Q''_n\}$ 和对应的 $\{t'_n\}$ $\{t''_n\}$ 满足 $|Q'_nQ''_n| < \frac{1}{n}$ $|t'_n - t''_n| \geqslant \varepsilon_0$ 由致密性定理$\exists \{t'_{n_k}\}$ and $\{t''_{n_k}\}$ and $t^*, t^{**} \in [\alpha, \beta]$

在T每个小区间$\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ 上由微分中值定理$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i, \xi_i \in \Delta_i$; $\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i, \eta_i \in \Delta_i$
从而曲线C的内接折线总长度为$s_T = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x\prime(\xi_i)]^2 + [y\prime(\eta_i)]^2} \Delta t_i$.; $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可积
因而根据定义只需证明 $\lim_{\|T\| \to 0} s_T = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x\prime(\xi_i)]^2 + [y\prime(\xi_i)]^2} \Delta t_i$, RHS即为定理中右边的定积分下面进行估计
其中 $\left| \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2} \right| \leqslant | y\prime(\eta_i) - y\prime(\xi_i) |, i = 1, 2, \cdots, n$.因为$y'(t) \in C[\alpha, \beta]$; 从而一致连续
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0$; 那么只要当 $|T'| < \delta$; $\xi_i, \eta_i \in \Delta_i$就有 $| y\prime(\eta_i) - y\prime(\xi_i) | < \varepsilon$因此

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta_i-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\right|\Delta_i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|y\prime(\eta_i)-y\prime(\xi_i)|\,\Delta_i<\varepsilon(\beta-\alpha)$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta_i\Rightarrow\text{取极限对 }|T|\to0\text{则 }|T'|\to0\text{成立}$$

Problem 3.3 性质：若$\widetilde{AB}$弧可求长，那么若D是$\widetilde{AB}$弧上的一点 $\Rightarrow$ $\widetilde{AD}$和$\widetilde{DB}$是可求长的

to prove it we should prove some Lemmas as follow

$Lemma1^\circ$：记$W=\left\{s_T \mid T\text{是}\widetilde{AB}\text{上的一个分割}\right\}\Rightarrow s_T\leqslant s$则$W$是一个有界集

$Proof$：$\forall s_T\in W$, 必有$s_T\leqslant s$; 若不然存在$\widetilde{AB}$的一个分割$T(0)$，$st.s_{T(0)}>s$; 在$T(0)$基础上增加分点得到新分割$T(1)$；则$s_{(T_1)}\geqslant s_{(T_0)}>s$从而 $\lim\limits_{|T'|\to0}s_{T(1)}\geqslant s_{T(0)}>s;\Rightarrow s>s$矛盾

$Lemma2^\circ$：设$\widetilde{AB}$弧长为$s\Rightarrow s=sup\{W\}$

$Proof$：$s_T\leqslant s;\forall s_T\in W$; 另外$\lim_{|T|\to0}s_T=s$所以$\forall\varepsilon>0$; 存在分割$T$，$st.\ s_T>s-\varepsilon\Rightarrow s=sup\{W\}$

$Lemma3^\circ$：记$W'=\left\{s_{T'}\mid T'\text{是}\widetilde{AD}\text{的一个分割}\right\}$; $W''=\left\{s_{T''}\mid T''\text{是}\widetilde{DB}\text{的一个分割}\right\}$

$\Rightarrow W'\,and\,W''$有界，且记$s'=sup\{W'\}$; $s''=sup\{W''\}$; $s=s'+s''$

$Proof$：设T'是$\widetilde{AD}$的分割。T''是$\widetilde{DB}$的分割；$T=T'+T''$; 是$\widetilde{AB}$的一个分割，且$s_T=s_{T'}+s_{T''},s_{T'}\leq s_T,s_{T''}<s_T$,;

所以$W'\,and\,W''$有界且 $\sup\limits_{T'T''}s_T=\sup\limits_{T'T''}(s_{T'}+s_{T'})=\sup\limits_{T'}s_{T'}+\sup\limits_{T''}s_{T'}=s'+s''$; 所以$s=\sup\limits_{T}s_T\geqslant\sup\limits_{T'T''}s_T=s'+s''$

另一方面 $\lim\limits_{|T|\to0}s_T=s$那么针对包含$D$为分割点的来说$\exists\delta>0\ st.\ s-\varepsilon<s_T=s_{T'}+s_{T''}$

$\Rightarrow\sup(s_{T'}+s_{T''})=s'+s''>s-\varepsilon\Rightarrow s\leqslant s'+s''\Rightarrow s=s'+s''$

$Lemma4^\circ$：$\widetilde{AD}$长度为s'; $\widetilde{DB}$长度为s''

$Proof$：下面证明 $\lim\limits_{\|T'\|\to0}s_{T'}$; 存在，使用反证法：若 $\lim\limits_{\|T'\|\to0}s_{T'}\neq s'\Rightarrow\exists\varepsilon_0>0;\forall\delta>0;\exists|T'|<\delta$;

但$s_{T'}\leqslant s'-\varepsilon\ and\ s_{T'},\leqslant s''\Rightarrow s_{T'}+s_{T''}=s_T\leqslant s''+s'-\varepsilon=s-\varepsilon$与 $\lim\limits_{|T|\to0}s_T=s$矛盾；因而可求长

3.6.3 旋转体体积与旋转曲面面积

最后我们来讨论以下空间中曲面面积.这是个一个很复杂的主题,我们暂时只讨论最简单的情况：旋转曲面.
我们可以采用研究曲线弧长类似的方法.
设直角坐标平面上的曲线$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. 现在$\Gamma$在 $[\alpha,\beta]$上非负且连续可导.
把Γ绕x轴旋转一周得到旋转曲面P.与计算弧长时类似,在Γ上取$n+1$个点$\Pi:A_0,A_1,\cdots,A_n$
它们对应着参数区间 $[\alpha,\beta]$上的分点：$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$.
这时曲线上的第i段$A_{i-1}A_i$的弧长可以近似为$\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i$.
于是这段曲线旋转而成的面积可以近似为$2\pi y(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i$.
当$\|\pi\|\to 0$时上式的极限就可以定义为该旋转曲面的面积.
用一样的方法可以证明$\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}2\pi y(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\eta_i)]^2}\Delta t_i=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$.
于是就得到旋转曲面P的面积公式$S(P)=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$.
如果Γ的方程是显式方程$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则旋转曲面的面积为$S(P)=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,\mathrm{d}x$

3.7 积分原函数间断点关系反例

Theorem 3.7.1
可积不一定有原函数有原函数也不一定可积

Proof $proof: eg:$ 在区间上存在跳跃间断点没有原函数但是可积（有限个点不相同也可积分）；
$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & 0<x\leqslant 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & 0<x\leqslant 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 但不可积因为当$x\to 0$无界

Theorem 3.7.2
若函数f有原函数，f是不连续的 $\Rightarrow$ f不可能有第一类间断点
若f有震荡间断点 $\Rightarrow$ 可能有原函数

Proof $proof:$ 由前文知道
$proof: eg\ f(x)=\begin{matrix} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad x=0 \end{matrix}$ $F(x)=\begin{matrix} x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{matrix}$ 就为一个例子
同时$g(x)\begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $G(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 为一个正常没有原函数的例子}

Theorem 3.7.3
若f有无穷间断点 $\Rightarrow$ 不可能有原函数

Proof 假设在f定义区间D上有无穷间断点x_0; 且$F'(x)=f(x)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\to\infty$
$F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=\infty \Rightarrow F'(x_0)$ 不存在 $\Rightarrow$ 即$f(x_0)$ 不存在矛盾

Theorem 3.7.4
（由前文知道f有界，若有有限个间断点可积这也说明不连续的函数可能可积）
无穷多个间断点可能可积（有有限个聚点）

Proof $proof: eg$黎曼函数无穷多个可去间断点；$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0, \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots \end{cases}$ 无穷多个跳跃间断点

Theorem 3.7.5
普通闭区间上黎曼可积$f\in R[a,b] \Longrightarrow |f|\in R[a,b]$ 且$f^2\in R[a,b]$
但若闭区间上$|f|\in R[a,b] \nRightarrow f\in R[a,b]$；$f^2\in R[a,b]\nRightarrow f\in R[a,b]$

Proof 可以去取 $=\begin{cases} 1 & x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q} \\ -1 & [-1,1]\cap\mathbb{Q}^c \end{cases}$

3.8 反常积分

3.8.1 无穷积分基本判别法

Proposition 3.15

设函数f.若以下积分都收敛：$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

则对于任一$a' \in \mathbb{R}$都有 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

Proof 我们有等式：$\int_{a'}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a'}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$

由于 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，因此令以上等式中的$b \to \infty$得 $\int_{a'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a'}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

这表明 $\int_{a'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛.同理可知 $\int_{-\infty}^{a'} f(x)\mathrm{d}x$也收敛且 $\int_{-\infty}^{a'} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{a'} f(x)\mathrm{d}x.$

两式相加即得 $\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a'}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$

上面的命题表明我们定义的无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$是良定义的.

Definition 3.6

设$\mathbb{R}$上的函数f.令$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$

若上式右边的极限存在，则称这个极限为无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的$Cauchy$主值 $(Cauchy - principal - value)$.

显然存在$Cauchy$主值是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的必要但不充分条件.

Theorem 3.8.1 (无穷积分柯西收敛定理)

无穷积分 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0. \exists G \geqslant a;$， 只要$u_1, u_2 > G.$， 有$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\, dx\right| < \varepsilon$

Proof $\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$收敛 $\Leftrightarrow \lim_{u\to+\infty} \int_{a}^{u} f(x)\, dx = \lim_{u\to+\infty} F(u)$ 是否存在利用函数极限的柯西准则即可

Theorem 3.8.2

若无穷积分 $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收敛，则 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

Proof 若无穷积分 $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$收玫，则$\forall\varepsilon > 0$，都存在$a_0 > a$使得当$a_1, a_2 > a_0$时 $\int_{a_1}^{a_2} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$

于是$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \int_{a_1}^{a_2} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$.于是可知 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

Proposition 3.16 (无穷积分性质)

1.保持线性组合

2.若f在$\forall\,[a,u]$有限区间可积，$a<b \Rightarrow \int_a^{+\infty}$ 与 $\int_b^{+\infty}$ 同敛散

3.若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0;\exists G>0;st.\left|\int_u^{+\infty} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$

4.若f,g,h是$[a,+\infty)$上的连续函数，且$h\leqslant f\leqslant g$；若 $\int_a^{+\infty} h$和 $\int_a^{+\infty} g$都收敛 $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f$也收敛

Theorem 3.8.3 (非负函数无穷积分收敛有界定理)

设$[a,+\infty)$上的一个非负函数f.

则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛 $\Leftrightarrow \exists\forall A>a$, 函数$f$在$[a,A]$上都可积, 且 $\int_a^{A} f(x)\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界.

Theorem 3.8.4 (非负函数无穷积分比较审敛法)

函数定义在$[a,+\infty)$，若$\exists X>0;st.\forall x\in[X,+\infty)$有$0\leqslant f(x)\leqslant K\varphi(x)$,$K$为正常数

$$\Rightarrow\begin{cases}\int_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx\text{收敛}\Rightarrow\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\text{收敛}\\ \int_a^{+\infty} f(x)\,dx\text{发散}\Rightarrow\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx\text{发散}\end{cases}$$

公理 3.1 (p 积分)

设p积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, $a>0$.当$p\le 1$时积分发散, 当$p>1$时积分收玫.

Theorem 3.8.5 (非负函数无穷积分比较判别法极限形式)

设$[a,+\infty)$上的非负函数f和g.若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

(1)当$0<l<+\infty$时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同敛散.

(2)当$l=0$时, 若积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

(3)当$l=+\infty$时, 若积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也发散.

Example 3.2 判断以下无穷积分的敛散性：$\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\mathrm{d}x,\quad a>0.$

Proof 由于$\frac{x^2}{x^4-x^2+1}\sim\frac{1}{x^2},\quad x\to+\infty$.且积分 $\int_a^{+\infty} 1/x^2\mathrm{d}x$收敛, 由非负函数无穷积分的比较判别法可知原积分也收敛.

Example 3.3 判断以下无穷积分的敛散性：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,\quad a>0.$

Proof 由于$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\sim\frac{\pi/2}{x^3},\quad x\to+\infty$.

且积分 $\int_a^{+\infty} 1/x^3 \mathrm{d}x$ 收敛, 由非负函数无穷积分的比较判别法可知原积分也收敛.

Theorem 3.8.6 (柯西判别法与极限形式)

$Cauchy$判别法：f非负。且在任何有限区间上可积 (在定理2中用p积分来比较)

当$x \to +\infty$时, $\begin{cases} 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^p} \text{ 且} p > 1 \Rightarrow \text{收敛} \\ f(x) \geqslant \dfrac{1}{x^p} \text{ 且} p \leqslant 1 \Rightarrow \text{发散} \end{cases}$

$Cauchy$判别法极限形式 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p f(x) = \lambda$

$\Rightarrow \begin{cases} p > 1 \text{ 且} 0 \leqslant \lambda < +\infty \Rightarrow f \text{收敛} \\ p \leqslant 1 \text{且} 0 < \lambda \leqslant +\infty \Rightarrow f \text{发散} \end{cases}$

3.8.2 无穷积分归结原理与级数

设无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收玫.现在在 $[a,+\infty)$取一个数列,使得它的首项是a且递增趋于$+\infty$.

于是就可以把曲边梯形分割成一列小曲边梯形,因此 $\int_a^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$.

令$n\to\infty$可得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x$.这表明收玫的无穷积分总是可以用一个级数表示.

事实上无穷积分可以看作一个函数的极限,因此由函数极限的$Heine$归结原理立刻可以得到无穷积分的归结原理.

Theorem 3.8.7 (无穷积分归结原则)

设 $[a,+\infty)$上的函数f.

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = A\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall$趋于$+\infty$的数列$\{a_n\}\subseteq[a,+\infty)$ $(a_1=a)$ 都有 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = A$.

Corollary 3.6

证明：积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛于$I \Longleftrightarrow$ 对任一递增趋于$+\infty$的数列$\{A_n\}$ $(A_1=a)$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$收玫于$I$.

Proof 根据海涅归结原理

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收玫于$I$的 $\Longleftrightarrow$ 对任意递增趋于$+\infty$的数列$\{A_n\}$ $(A_1=a)$ 成立$I=\lim_{n\to\infty}\int_a^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$.

如果只存在一个趋于$+\infty$的数列$\{a_n\}$ $(a_1=a)$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = A$.则不足以推得对应的积分收玫.反例是很容易想到的.

Example 3.4

设无穷积分 $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$

令$a_n=n\pi(n=1,2,\cdots)$,则 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\cos x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\mathrm{d}x = 0$.

但是 $\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\cos x\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\sin a$.因此积分 $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$发散.

Theorem 3.8.8

设 $[a,+\infty)$上的非负函数f.

若存在一个递增趋于$+\infty$的数列$\{a_n\}$ $(a_1=a)$,使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$收敛,则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$.

Proof 由于$\{a_n\}$递增趋于$+\infty$,故$\forall E>0$,都存在$N\in\mathbb{N}^*$使得$a_N\le E<a_{N+1}$.

由于$f(x)$非负,故 $\sum_{n=1}^{N-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a_N} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^{E} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^{a_{N+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x$收敛.令上式$N\to\infty$,由夹逼定理可知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛.且等式成立.

Problem 3.4 证明：积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$收敛.

Proof 证明因为被积函数是非负的,故只要证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 收敛即可.

因为 $\sin^2 x$ 是周期 π 的偶函数,故当 $n\geqslant 1$ 时,有

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x &\leqslant (n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x}\\
&= 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x}\\
&\leqslant 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+n^6\sin^2 x}\\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(n^3\tan x\right)}{1+\left(n^3\tan x\right)^2}\\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\
&\leqslant \frac{2\pi^2}{n^2}.
\end{aligned}$$

由此即知级数收敛,因而原积分收敛.

3.8.3 无穷积分狄利克雷判别法和阿贝尔判别法

Theorem 3.8.9 (积分版本 Abel 定理)

设函数f在 $[a,b]$上可积, g在 $[a,b]$上单调.若$\forall x\in[a,b]$都有都$\exists M>0$使得$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leq M$

则$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leq M[|g(a)|+2|g(b)|]$

Proof 由于f在 $[a,b]$上可积, g在 $[a,b]$上单调, 由第二积分中值定理II可知

存在$\xi[a,b]$使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$

由于$\forall x\in[a,b]$都有都$\exists M>0$使得$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leq M$

故$\left|\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\right|\leq 2M$.于是可知$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leq M(|g(a)|+2|g(b)|)$.

Theorem 3.8.10 (无穷积分狄利克雷判别法)

设无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.若满足

1°函数g在 $[a,+\infty)$上单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

2°函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在 $(a,+\infty)$上有界, 即$\exists M>0$使得$\forall x\in(a,+\infty)$都有$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leq M$.

$\left(\text{由证明过程知道实际上只要保证当}x\text{充分大的时候都会有}\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|\leq M.\text{成立即可}\right)$

则无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

Proof

由条件设$\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant M, u\in[a,+\infty)$.任给$\varepsilon>0$, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, 因此$\exists G\geqslant a$, 当$x>G$有 $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{4M}$

又因g为单调函数, 利用积分第二中值定理 (定理9.11)的推论, 对于任何$u_2>u_1>G$, 存在$\xi\in[u_1,u_2]$

使得$\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(u_1)\int_{u_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x+g(u_2)\int_{\xi}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x$.于是有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant |g(u_1)|\cdot\left|\int_{u_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|+|g(u_2)|\cdot\left|\int_{\xi}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&=|g(u_1)|\cdot\left|\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{u_1} f(x)\mathrm{d}x\right|+ \\
&\quad |g(u_2)|\cdot\left|\int_a^{u_2} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&<\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon
\end{aligned}
$$

由柯西准则知收敛

Theorem 3.8.11 (阿贝尔判别法)

设无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.若满足

1°函数g在 $[a,+\infty)$上单调有界.

2°无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.则无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

Proof 由于g在 $[a,+\infty)$上单调有界, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-l]=0$.

因此当$x \to +\infty$时, 函数$g(x)-l$单调趋于零. 由于$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收致, 故$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$有界

由无穷积分的$Dirichlet$判别法可知$\int_a^{+\infty} f(x)[g(x)-l]\mathrm{d}x$收敛.

由于$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)[g(x)-l]\mathrm{d}x + l\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. 且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 因此$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

3.8.4 瑕积分

Definition 3.7

设函数f在$[a,b)$上有定义.对于任一$0<\varepsilon<b-a$, f在$[a,b-\varepsilon]$上都可积.

若$\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$存在且有限, 则可以引入记号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$.

并称以上积分收敛, 此时我们称f在$[a,b)$上$Riemann$可积.否则称以上积分发散.这样的积分称为暇积分.其中b称为瑕点.

Definition 3.8

设$\mathbb{R}$上的函数f.令$PV\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$.

若上式右边的极限存在, 则称这个极限为瑕积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的$Cauchy$主值$(Cauchy-principal-value)$, 其中$c$是瑕点.

Theorem 3.8.12 (瑕积分柯西收敛定理)

瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(瑕点为a)收玫 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 只要$u_1,u_2\in(a,a+\delta)$, 总有$\left|\int_{u_1}^b f(x)\mathrm{d}x - \int_{u_2}^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Proposition 3.17 (瑕积分性质)

保持线性组合

可加性

$\int_a^b$ 与 $\int_a^c$ 属于(a,b)同敛散

Theorem 3.8.13 (非负函数瑕积分的比较判别法与极限形式)

设函数f和g.当x充分靠近$a(a<x)$时有$0\le f(x)\le g(x)$.则

(1)若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

(2)若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散, 则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$也发散.

设$(a,b]$上的非负函数f和g.若$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(1)当$0<l<+\infty$时, 积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同敛散.

(2)当$l=0$时, 若积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

(3)当$l=+\infty$时, 若积分$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也发散.

Proposition 3.18 (瑕积分 p 积分)

瑕积分p积分讨论以下瑕积分的敛散性 : $\int_0^a \dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}, \quad a>0.$

Proof (i)当$p=1$时.由于$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x|_0^a=+\infty$.因此原积分发散.

(ii)当$p\neq 1$时.由于$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_0^a=\begin{cases}\frac{a^{1-p}}{1-p}, & p<1\\ +\infty, & p>1\end{cases}$.

因此当$p<1$时原积分收敛,当$p\geqslant 1$时原积分发散.

Proposition 3.19 (Beta 函数)

判断以下积分的敛散性:$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$

Proof 注意到:当$p<1$时$x=0$是瑕点,当$q<1$时$x=1$是瑕点.

因此考虑把积分拆成两部分:$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\quad a\in(0,1)$.

(i)当$0<p<1$时

$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1},\quad x\to 0$.此时$\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x$收敛,由比较判别法可知$\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$也收敛.

(ii)当$0<q<1$时

$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1},\quad x\to 1$此时$\int_a^1(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$收玫,由比较判别法可知$\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$也收玫.

综上可知当$p>0$且$q>0$时原积分收敛.

Proposition 3.20 (Gamma 函数)

判断以下积分的玫散性:$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, s>0$时收敛

Proof 当$s<1$时$x=0$是瑕点,因此考虑把积分拆成两部分:$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

(i)由于$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\sim x^{s-1},\quad x\to 1$.因此当$0<s<1$时$\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛.

当$s>1$时$\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$时可积的常义积分.

(ii)由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=0$因此$\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$总是收敛的.综上可知当$s>0$时原积分收敛.

Theorem 3.8.14 (非负函数瑕积分柯西判别法)

设f是定义在$(a,b]$上的非负函数,a为其瑕点,且在任何$[u,b]\subset(a,b]$上可积.

如果$(x-a)^p f(x)=\lambda$,则有$\Rightarrow\begin{cases}(i)\text{当}p<1, 0\leqslant\lambda<+\infty\text{时}, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{收敛}\\ (ii)\text{当}p\geqslant 1, 0<\lambda\leqslant+\infty\text{时}, \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{发散}.\end{cases}$

Theorem 3.8.15 (瑕积分狄利克雷与阿贝尔判别法)

(狄利克雷判别法)

设a为$f(x)$的瑕点,函数$F(u)=\int_u^v f(x)\mathrm{d}x$在$(a,b]$上有界,函数$g(x)$在$(a,b]$上单调且$\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$

则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收玫.

(阿贝尔判别法)

设a为$f(x)$的瑕点,瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收玫,函数$g(x)$在$(a,b]$上单调且有界,则瑕积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

3.9 反常积分的例子与重要性质与重要典型判别

Example 3.5 无穷积分收敛但是被积函数不收敛到 0

设 $[1/2,+\infty)$上的函数 $f(x)=\begin{cases}4n^2(x-n)+2, & x\in\left[n-\dfrac{1}{2n^2},n\right], \quad n=1,2,\cdots.\\ -4n^2(x-n)+2, & x\in\left(n,n+\dfrac{1}{2n^2}\right], \quad n=1,2,\cdots.\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases}$.

则积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收玫, 但当$x\to+\infty$时$f(x)$不收玫于0.

Proof

(i)令$a_n=(2n+1)/2(n=0,1,\cdots)$.可知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

由定理可知积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 且 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(ii)由于$f(n)\equiv 2$.由$Heine$定理可知当$x\to+\infty$时$f(x)$不收敛于0.

Example 3.6 无穷积分收敛但是被积函数不收敛到 0

设函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}$.则积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛, 但当$x\to+\infty$时$f(x)$不收敛于0.

Proof

(i)由于$\sin^2 x$是周期为π的偶函数, 因此当$n\geq 1$时

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}&\leq(n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x}=2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x}\\&\leq 2(n+1)\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+n^6\sin^2 x}=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\left(n^3\tan x\right)}{1+\left(n^3\tan x\right)^2}\\&=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\cdot\frac{\pi}{2}\leq\frac{2\pi^2}{n^2}.\end{aligned}$$

由正项级数的比较判别法可知以下级数收敛 : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$.于是由定理可知原积分也收敛.

(ii)由于$f(n\pi)=\dfrac{n\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2(n\pi)}=n\pi\to+\infty$.由$Heine$定理可知当$x\to+\infty$时$f(x)$不收敛于0.

Example 3.7无穷积分当$x\to+\infty$被积函数不一定$\to 0$甚至可能无极限, 无界

例如 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin x^2dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$由狄利克雷判别法收敛但是$\sin x^2$当$x\to+\infty$时无极限

例如 $\displaystyle\int_1^{+\infty}x\sin x^4dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{4t}dt$由狄利克雷判别法收敛, 但是$x\sin x^4$当$x\to+\infty$无极限甚至无界

Example 3.8 反常积分收敛但是平方不可积 (也可以用来说明两个函数相乘不一定收敛)

例如 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{3/4}}\mathrm{d}x$收敛但是 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$

Example 3.9举例说明 : 存在不单调递减的函数$f(x)$使得 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 但$f(x)$在$+\infty$的极限不存在

例如$f(x)=\sin\left(x^2\right)$, 显然$f(x)$在 $[1,+\infty)$上不单调, 且通过换元$t=x^2$可得 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

由于对任意的$M>0$, 有$\left|\displaystyle\int_1^M\sin t\,\mathrm{d}t\right|<2$, 同时$\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$在 $[1,+\infty)$上单调递减, 且 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{t}}=0$

由狄利克雷判别法可知 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.但 $f(x)$ 在 $+\infty$ 的极限不存在.

Proposition 3.21

(I) 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(II) 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 则 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必定收敛.

(III) 证明：若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收玫, 则 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right), x\to+\infty$.

(IV) 证明：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(V) 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $+\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(VI) 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $+\int_a^{+\infty} f'(x)$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Proof 证：如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增, 则或者 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 或者存在实数 A 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

(1)若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 则存在 $M>0$, 对任何 $x\geqslant M$, 有 $f(x)>1$.

于是对任何 $u>M$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^M f(x)\mathrm{d}x+\int_M^u f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_a^M f(x)\mathrm{d}x+u-M\to+\infty(u\to+\infty),\end{aligned}$$

这与无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收玫相矛盾

(2)若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 且 $A>0$, 则存在 $M>0$, 对任何 $x\geqslant M$, 有 $f(x)>\frac{A}{2}$.

于是对任何 $u>M$, 有

$$\begin{aligned}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^M f(x)\mathrm{d}x+\int_M^u f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_a^M f(x)\mathrm{d}x+(u-M)\cdot\frac{A}{2}\to+\infty(u\to+\infty),\end{aligned}$$

这与无穷积分 $\int_{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收玫相矛盾.

若 $A<0$, 类似地也会得到这样的矛盾. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 当 $f(x)$ 单调递减同理可证

Proof 由已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 即当 $x\to+\infty$ 必 $\exists x'>0$, 使当 $x\geqslant x'$ 时, 相应的 $f(x)$ 的值总在 $0\sim1$ 之间

此时必有 $f^2(x)\leqslant|f(x)|$ 由定理1知, 当 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛时必有 $f^2(x)$ 收敛, 即 $\int_{\mathrm{a}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛时必有 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

Proof 设 $f(x)$ 单调递减, 则必有 $f(x)\geqslant0$ 否则若存在 $x=b$ 使 $f(x)<0$, 则当 $x>b$ 时 $f(x)\leqslant f(b)<0$,

从而 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散与已知条件矛盾.由 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

对 $\forall\varepsilon>0,\exists M>a$, 当 $x>M$ 时, 有 $\frac{\varepsilon}{2}>\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(x)\cdot\int_{\frac{x}{2}}^x \mathrm{d}t=\frac{x}{2}f(x)$ 故有 $0<xf(x)\leqslant\varepsilon$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0.\therefore f(x)=0\left(\frac{1}{x}\right), x\to+\infty$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Proof $\because f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使当 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\ (*)$

又因 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛所以对 $\varepsilon_1=\delta\varepsilon,\exists M>a$, 使当 $x>M$ 时, 有 $\left|\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|<\delta\varepsilon\ (**)$

考虑积分 $\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t$, 当 $x<t<x+\delta$ 时由 $(*)$ 有 $f(t)-\varepsilon<f(x)<f(t)+\varepsilon$

从而 $\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t-\delta\varepsilon\leqslant\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t+\delta\varepsilon$ 即 $\left|\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}x-\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\delta\cdot\varepsilon\ (***)$

于是 $x>M$ 时由 $(**)$ 及 $(***)$ 知

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\frac{1}{\delta}\left|\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\frac{1}{\delta}\left[\left|\int_x^{x+\delta} f(x)\mathrm{d}t-\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_x^{x+\delta} f(t)\mathrm{d}t\right|\right]<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, 那么存在$\varepsilon_0>0$, 对任意的$A>1$, 存在$x_0>A$, 使得 $|f(x_0)|\geq 2\varepsilon_0$.
而$f(x)$一致连续, 所以存在$\delta>0$, 使得对任意的$x',x''\in[1,+\infty)$, 只要 $|x'-x''|\leq\delta$, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0$.
特别地, 当$x\in[x_0,x_0+\delta]$ 时, 有$|f(x)|\geq|f(x_0)|-|f(x)-f(x_0)|>2\varepsilon_0-\varepsilon_0=\varepsilon_0$.
同时$f(x)$还与$f(x_0)$ 同号.因此$\left|\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x\right|=\int_{x_0}^{x_0+\delta}|f(x)|\mathrm{d}x\geq\int_{x_0}^{x_0+\delta}\varepsilon_0\,\mathrm{d}x=\varepsilon_0\delta>0$.
由柯西准则可知 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散, 这与已知矛盾, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Proof 利用反证法即可

Proof 利用定义就转化为了上题

注 但如$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x^2} & x>1\end{cases}$ 对于 (II) 条件虽然满足但是却得到不一样的结论这是我们要注意要在任何区间可积

Proposition 3.22

讨论 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}$的收敛性

Proof (i)当$p>1$时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$绝对收敛.这是因为$\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^p}, x\in[1,+\infty)$, 而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 当$p>1$时收敛,
故由比较原则推知 $\int_1^{+\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|\mathrm{d}x$收敛

(ii)当$0<p\leqslant 1$时, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$条件收敛.这是因为对任意$u\geqslant 1$, 有$\left|\int_1^u \sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos 1-\cos u|\leqslant 2$,
而$\dfrac{1}{x^p}$ 当$p>0$时单调趋于$0(x\to+\infty)$, 故由狄利克雷判别法推知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$当$p>0$时总是收敛的
另一方面, 由于$\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|\geqslant\dfrac{\sin^2 x}{x}=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{\cos 2x}{2x}, x\in[1,+\infty)$, 其中 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_2^{+\infty}\dfrac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$满足 Dirchlet 条件, 收敛.
而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{2x}$是发散的, 因此当$0<p\leqslant 1$时该无穷积分不是绝对收敛的, 所以它是条件收敛的.
(iii) $p<=0$利用柯西准则能够证明发散

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\begin{cases} p>1 & \text{绝对收敛}\\ 0<p\leqslant 1 & \text{条件收敛}\\ p\leqslant 0 & \text{发散}\end{cases}$$

Proposition 3.23

讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin bx}{x^\lambda}\mathrm{d}x(b\neq 0)$, λ 取何值时绝对收敛或条件收敛.

Proof 显然我们该积分可能是存在瑕点的因而我们需要分类讨论。不防假设$b>0$; 令$bx=u$

$$\Rightarrow LHS=b^{\lambda-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u^\lambda}du=b^{\lambda-1}\left[\underbrace{\int_0^1\frac{\sin u}{u^\lambda}du}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u^\lambda}du}_{I_2}\right]$$

针对I_2根据前文我们显然有$I_2=\begin{cases}\lambda>1 & \text{绝对收敛}\\ 0<\lambda\leqslant 1 & \text{条件收敛}\\ \lambda\leqslant 0 & \text{发散}\end{cases}$ $\left(\text{其中}\lambda\leqslant 0\text{时用柯西准则当}k\to+\infty\text{有}\left|\int_{2k\pi+\frac{\pi}{4}}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin u}{u^\lambda}du\right|\geqslant\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}\text{发散}\right)$

针对I_1 $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\sin u}{u^\lambda}=u^{1-\lambda}$显然当$1-\lambda\geqslant 0\Leftrightarrow\lambda\leqslant 1$不为瑕点为定积分 (自然绝对收敛)

此外 $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\sin u}{u^\lambda}\cdot u^{\lambda-1}=1\Rightarrow\lambda-1<1\Leftrightarrow\lambda<2$时收敛又在$\int_0^1$上恒正即为绝对收敛，$\lambda\geqslant2$发散

$$\Rightarrow I_1=\begin{cases}\lambda\leqslant1 & \text{定积分绝对收敛}\\1<\lambda<2 & \text{有瑕点绝对收敛}\\\lambda\geqslant2 & \text{发散}\end{cases}\quad\Rightarrow I=\begin{cases}\text{当}0<\lambda\leqslant1\text{时,非正常积分}I\text{条件收敛}\\\text{当}1<\lambda<2\text{时,}I\text{绝对收敛}\\\text{当}\lambda\leqslant0\text{或}\lambda\geqslant2\text{时,}I\text{发散.}\end{cases}$$

Proposition 3.24

f反常黎曼可积 $\nRightarrow|f|$反常黎曼可积的

f^2反常黎曼可积 $\nRightarrow|f|$反常黎曼可积的

Proof 特别注意若在反常积分中

$\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^{1/2}}\mathrm{d}x$由狄利克雷判别法知道收敛,但是仅仅是条件收敛

故：f反常黎曼可积 $\nRightarrow|f|$反常黎曼可积的　同理　f^2反常黎曼可积 $\nRightarrow|f|$反常黎曼可积的

3.10 积分计算专题

Proposition 3.25

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Proof $I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2$

而 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\mathrm{d}x \xlongequal{令2x=t} \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin t dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t\mathrm{d}t\right)$

而 $\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin t\mathrm{d}t \xlongequal{令u=t-\pi/2} \int_0^{\pi/2} \ln\cos u\mathrm{d}u = I$

故 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\mathrm{d}x = I$

$\Longrightarrow 2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2$

$\Longrightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

Proposition 3.26

证明：$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\sin x}\mathrm{d}x \begin{cases} < \frac{\pi}{2R}\left(1-\mathrm{e}^{-R}\right), & R > 0, \\ > \frac{\pi}{2R}\left(1-\mathrm{e}^{-R}\right), & R < 0, \\ = \frac{\pi}{2}, & R = 0. \end{cases}$

Proof

Proposition 3.27

1.求证：$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$.(提示：将被积函数表示为余弦函数之和.)

2. $\int_0^{\pi} \left(\sin\frac{nx}{2}/\sin\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

Proof 1.利用 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+x/2)}{2\sin x/2} - \frac{1}{2}$

2.因为

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2((n+1)x/2) - \sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x = \pi$$

所以取$n = 0, 1, 2, ...$时的情形累加就得到 $\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \mathrm{d}x = n\pi$

注意正弦函数也拥有平方差公式：$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$.

Proposition 3.28

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Proof $=\int_0^{\pi/4}\ln\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\ln\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\pi/4}\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt-\int_0^{\pi/4}\ln\cos x\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{8}\ln 2$

Proof 考虑函数$\varphi(a)=\int_0^1\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx$, 则$\varphi(0)=0,\varphi(1)=I$, 且

$\varphi'(a)=\int_0^1\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx=\frac{1}{1+a^2}\int_0^1\left[\frac{-a}{1+ax}+\frac{x+a}{1+x^2}\right]dx=\frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}a\right].$

因此两边在 $[0,1]$上积分可得$I=\varphi(1)-\varphi(0)=-I+\frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln 2}{2}$

从而$I=\frac{\pi\ln 2}{8}$.

Theorem 3.10.1 (狄利克雷积分)

计算下列积分：

(1)$J=\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx(p>0,b>a)$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$;

Proof (1)首先, $\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xydy$.再由 $|e^{-px}\cdot\cos xy|\le e^{-px}$

且 $\int_0^{+\infty}e^{-px}dx$收玫可知 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\cdot\cos xydx$关于$y$在 $[a,b]$上一致收玫.

于是

$J=\int_0^{+\infty}e^{-px}\left(\int_a^b\cos xydy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}e^{-px}\cos xydx\right)dy$

$$=\int_a^b\left[e^{-px}\cdot\frac{y\sin xy-p\cos xy}{p^2+y^2}\right]\Bigg|_0^{+\infty}dy=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}dy=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

(2)在 (1)中令$a=0,b=1$, 则当$p>0$时, $\int_0^{+\infty}e^{-px\frac{\sin x}{x}}dx=\arctan\frac{1}{p}$.

记$\varphi(p)=\int_0^{+\infty}e^{-px\frac{\sin x}{x}}dx(p\ge 0)$.由$\varphi(p)$在$p\ge 0$上连续.于是, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{p\to 0^+}\varphi(p)=\lim_{p\to 0^+}\arctan\frac{1}{p}=\frac{\pi}{2}$.

(2) 狄利克雷积分收敛性的说明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

考虑$f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\int_0^x\sin t\mathrm{d}t$.显然当$x\to+\infty$时$f$递减趋于零.由于$\left|\int_0^x\sin t\mathrm{d}t\right|\le\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=2$.

故g有界.由$Dirichlet$判别法可知原积分收敛.

注意到$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right)$.同理可证 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$收玫.而 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$发散.因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散.

由比较判别法可知 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$也发散.这就说明$Dirichlet$积分条件收玫.

Lemma 3.1

已知$f\in C[0,+\infty)$, 设$a>0,b>0$.证明：

(1)如果f在 $[0,+\infty)$上连续, 且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$存在, 那么 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}$

(2)如果f在 $[0,+\infty)$上连续, 且 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收玫, 那么 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$

(3)如果f在$(0,+\infty)$上连续, $f(+\infty)$存在, 且$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收玫, 那么$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$

(4) 如果$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛, 此时$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}$

Proof (1)使用积分第一中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x - \int_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{b\Delta}^{a\Delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= f(\eta)\int_{b\Delta}^{a\Delta} \frac{\mathrm{d}x}{x} - f(\xi)\int_{b\delta}^{a\delta} \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= (f(\eta)-f(\xi))\ln\frac{a}{b},
\end{aligned}$$

其中η介于$a\Delta$和$b\Delta$之间而ξ介于$a\delta$和$b\delta$之间, 因此

令$\Delta \to +\infty, \delta \to 0^+$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = (f(+\infty)-f(0))\ln\frac{a}{b} = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

(2)这是因为 $\lim\limits_{\Delta\to+\infty}\int_{b\Delta}^{a\Delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 0.$

(3)这是因为 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int_{b\delta}^{a\delta} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = 0$

(4) 因为 $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛

故$\forall\varepsilon > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon a}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

此时,

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x &= \int_{\varepsilon a}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int_{\varepsilon b}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_b^a \frac{f(\varepsilon x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= f(\varepsilon\xi)\int_b^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

令$\varepsilon \to 0^+$得 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}$

Theorem 3.10.2 (*Frullani* (傅汝兰尼积分))

由引理得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}.$$

3.11 黎曼引理

Theorem 3.11.1 (黎曼引理)

设$f(x)$在 $[a,b]$上可积, g是以$T>0$为周期的函数, 在 $[0,T]$上可积,

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Proof 不妨设$g(x)\geqslant 0$不然我们可以令上式变为$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\{g(nx)-c\}\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T\{g(x)-c\}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

并不改变证明式子，此时令$c=\inf g(x)$即可因为g可积有界

因$g(x)$以T为周期, 因此$g(nx)$以$\frac{T}{n}$为周期, 当n充分大时, $[a,b]$含有$g(nx)$的多个周期.

为了把区间变成$\frac{T}{n}$的整倍数, 取足够大的正整数m, 使得 $[A,B]=[-mT,mT]\supset[a,b]$.

这时 $[A,B]$相当$g(nx)$的$2mn$个周期.令$F(x)=\begin{cases} f(x), x\in[a,b],\\ 0,\quad x\in[A,B]\backslash[a,b],\end{cases}$

于是$F(x)$在 $[A,B]$上可积, 且$I_n\equiv\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_A^B F(x)g(nx)\mathrm{d}x.$

将 $[A,B]2mn$等分, 作分划$A=x_0<x_1<\cdots<x_{2mn}=B.$

每个小区间恰是$g(nx)$的一个周期, 小区间长度等于$\frac{T}{n}$.于是

$$I_n=\int_A^B F(x)g(nx)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{2mn}\int_{x_{i-1}}^{x_i}F(x)g(nx)\mathrm{d}x.$$

注意到$g(x)\geqslant 0$, 应用第一积分中值定理, 得$I_n=\sum\limits_{i=1}^{2mn}c_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\mathrm{d}x$, 其中$c_i: m_i\equiv\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}F(x)\leqslant c_i\leqslant M_i\equiv\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}F(x).$

因 $[x_{i-1},x_i]$ 是$g(nx)$的一个周期, 令$nx=t$, 则

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{T}{n}}g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t.$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\sum_{i=1}^{2mn}c_i\frac{T}{n}.$$

且有 $\sum\limits_{i=1}^{2mn}m_i\frac{T}{n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{2mn}c_i\frac{T}{n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{2mn}M_i\frac{T}{n}.$

其左、右两端分别为$F(x)$在 $[A,B]$上的$Darboux$和.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_A^B F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Theorem 3.11.2

若$f(x)$在 $[a,b]$上可积, $g(x)$是以T为周期的函数, 且在 $[0,T]$上可积.试证 :

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Proof *Lemma* :

先证$a\leqslant c<d\leqslant b\Rightarrow\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_c^d g(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{d-c}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x.$

此时$\exists m(\lambda),n(\lambda)\in\mathbb{Z},\quad$ s.t.$(n-1)T\leqslant\lambda c<nT,\quad mT\leqslant\lambda d<(m+1)T$.于是

$$mT-nT<\lambda(d-c)<(m+1)T-(n-1)T\Longrightarrow\frac{d-c}{T}-\frac{2}{\lambda}<\frac{m-n}{\lambda}<\frac{d-c}{T}$$

$$\Longrightarrow\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{m-n}{\lambda}=\frac{d-c}{T}$$

$$\begin{aligned}\int_c^d g(\lambda x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda c}^{\lambda d}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\left[\int_{\lambda c}^{nT}g(t)\mathrm{d}t+\int_{nT}^{mT}g(t)\mathrm{d}t+\int_{mT}^{\lambda d}g(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{\lambda}\left[\int_{\lambda c}^{nT}g(t)\mathrm{d}t+(m-n)\int_0^T g(t)\mathrm{d}t+\int_{mT}^{\lambda d}g(t)\mathrm{d}t\right],\end{aligned}$$

$$\left|\int_c^d g(\lambda x)\mathrm{d}x - \frac{d-c}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{(n-1)T}^{nT}|g(t)|\mathrm{d}t + \left|\frac{m-n}{\lambda} - \frac{d-c}{T}\right|\int_0^T |g(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_{mT}^{(m+1)T}|g(t)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^T |g(t)|\mathrm{d}t + \left|\frac{m-n}{\lambda} - \frac{d-c}{T}\right|\int_0^T |g(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{\lambda}\int_0^T |g(t)|\mathrm{d}t \to 0(\lambda \to +\infty).$$

下面证明主定理：

可将g写成$g = g^+ - g^-$, 而仅需在$g \geqslant 0$的情形下证明题目.

对 $[a,b]$的任一固定的分划$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_P = b$ 与令$M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$

$$\sum_{i=1}^P m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(\lambda x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^P \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^P M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\mathrm{d}x$$

令$\lambda \to +\infty$, 利用*Lemma*

$$\sum_{i=1}^P m_i \frac{\Delta x_i}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x \leqslant \varlimsup_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^P M_i \frac{\Delta x_i}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x$$

再令 $\|P\|$ 分割细度 $\to 0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Theorem 3.11.3 (反常积分黎曼引理)

设$f(x)$在 $[a,+\infty)$上绝对可积, $g(x)$是周期为T的函数，在 $[0,T]$上正常可积, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof 因为$g(x)$为可积周期可积函数故可以设$|g(x)|$与$\left|\frac{1}{T}\int_0^T g\mathrm{d}x\right| \leqslant M$

由$f(x)$绝对可积性质知道$\forall\varepsilon > 0, \exists G > 0$使得 $\int_G^{+\infty}|f|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{M}$

且对于上述的G由黎曼引理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^G f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^G f(x)\mathrm{d}x.$

故$\exists N > 0,$, 当$n \geqslant N$时就有 $\left|\int_a^G f\cdot g(nx)\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_0^T g\mathrm{d}x\int_a^G f\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$

那么当$n \geqslant N$时则有

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)g(nx)\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.\right|$$
$$\leqslant \left|\int_a^{+\infty} fg(nx)\mathrm{d}x - \int_a^G fg(nx)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^G f\cdot g(nx)\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_0^T g\mathrm{d}x\int_a^G f\mathrm{d}x\right| + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g\mathrm{d}x\int_a^G f\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_0^T g\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f\mathrm{d}x.\right|$$
$$= \left|\int_G^{+\infty} fg(nx)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^G f\cdot g(nx)\mathrm{d}x - \frac{1}{T}\int_0^T g\mathrm{d}x\int_a^G f\mathrm{d}x\right| + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g\mathrm{d}x\int_G^{+\infty} f\mathrm{d}x\right|$$
$$< M\int_G^{+\infty}|f|\mathrm{d}x + \varepsilon + M\int_G^{+\infty}|f|\mathrm{d}x < 3\varepsilon$$

第 4 章 级数理论

4.1 数项级数

4.1.1 级数柯西收敛准则, 有界、比较、对数判别法

Definition 4.1 (等比级数)

等比级数 $\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$

前n项的和$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.

当$|q| < 1$时, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$;

当$|q| > 1$时, 数列 $\{S_n\}$ 发散;

当$q = 1$时, $S_n = n \to +\infty$;

当$q = -1$时, $S_n = \begin{cases} 0, & \text{当} n \text{ 为偶数时}, \\ 1, & \text{当} n \text{ 为奇数时}, \end{cases}$ $\{S_n\}$ 也没有极限.

综上所述, 等比级数当且仅当$|q| < 1$时才是收玫的, 其和为$\frac{1}{1-q}$.

Theorem 4.1.1 (柯西收敛准则)

$\sum u_n$收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; \forall n, m > N; st. |S_n - S_m| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; \forall m > N; p \in N_+; \left|u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p}\right| < \varepsilon$

Corollary 4.1

设单调递减的非负数列 $\{a_n\}$.若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收玫, 则$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Proof 由$Cauchy$收敛原理可知, 对于$\forall\varepsilon > 0$都$\exists N \in \mathbb{N}^*$使得当$n > N$时 $|a_{n+1} + \cdots + a_{2n}| = a_{n+1} + \cdots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

由于 $\{a_n\}$ 单调递减, 故$2na_{2n} \le 2\left(a_{n+1} + \cdots + a_{2n}\right) < \varepsilon$.故$2na_{2n} \to 0$.

另一方面, 由于 $\{a_n\}$ 单调递减, 因此 $(2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n+1} + a_{2n+1} \le 2na_{2n} + a_{2n+1} \to 0$.

这表明 $\{na_n\}$ 的偶子列和奇子列都是无穷小, 于是可知$na_n \to 0$.

注 上例的逆命题不成立.设$a_n = 1/(n\ln n)$, 则$na_n \to 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\ln n)$发散.

注 去掉 $\{a_n\}$ 单调结论结论不一定成立例如 : $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & else \end{cases}$

Theorem 4.1.2 (级数收敛的必要条件)

若 $\sum u_n$收敛 $\Rightarrow u_n \to 0$

性质

(I) 若 $\sum u_n, \sum v_n$收敛 $\Rightarrow \forall con\tan t\ c$, d $\sum cu_n + dv_n$也收敛且收敛到$c\sum u_n + d\sum v_n$

(II) 改变，增减，减少级数的有限项不改变级数的收敛性

$(III)\sum u_n$与$\sum ku_n\ (k\neq 0)$的敛散性一致

$(IV)\sum u_n,\sum v_n$都发散， $\Rightarrow \sum u_n+v_n$未必发散；但若$\sum u_n,\sum v_n$通项非负都发散则$\sum u_n+v_n$必发散

(V)：若$\sum u_n$收敛$\Rightarrow$任意加括号不改变敛散性和求和；反面：若加括号反散$\Rightarrow$原级数发散

Proposition 4.1

若新加了括号的级数为$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})$收玫,且在同一括号里有相同的符号则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛,且两个级数有相同的和.

Proof 设新级数的部分和数列为$A_n(n=1,2,\cdots)$.设$A_n\to S$.设原级数的部分和数列为S_k.
由于括号中的项都同号,故当k从k_{n-1}变动到k_n时,S_k将从A_{n-1}单调地变化到A_n,即$A_{n-1}\le S_k\le A_n$ 或$A_n\le S_k\le A_{n-1}$.
当$k\to\infty$时$n\to\infty$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}A_{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}A_n=S$.
由夹逼定理可知$S_k\to S$.这表明原级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛,且两个级数有相同的和.

Definition 4.2 (调和级数)

1.对$n\in\mathrm{N}^*$,设$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$.求证：$\{a_n\}$发散.当$\alpha\leqslant 1$时

2.对$n\in\mathrm{N}^*$,设$a_n=1+\frac{1}{2^a}+\cdots+\frac{1}{n^a}$,这里$a>1$.求证：$a_n$收敛.

Proof 当$\alpha\leqslant 0$时显然，当$0<\alpha<1$我们知道$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$
下证$\alpha=1$时调和级数发散即可
很明显,$\{a_n\}$是严格递增数列,即满足条件$a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$.我们只需证明这个数列没有上界.
事实上,对$k\in\mathrm{N}^*$,有

$$\begin{aligned}
a_{2^k}&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
&\geqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\
&=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{个}}=1+\frac{k}{2}\quad(k=0,1,\cdots).
\end{aligned}$$

因此$\{a_n\}$是无界的.

很明显,$\{a_n\}$是严格递增数列.易知

$$\begin{aligned}
a_{2^k-1}&=1+\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{1}{7^a}\right)+\left(\frac{1}{8^a}+\cdots+\frac{1}{15^a}\right)\quad+\cdots+\left(\frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^a}+\cdots+\frac{1}{\left(2^k-1\right)^a}\right)\\
&\leqslant 1+\frac{2}{2^a}+\frac{4}{4^a}+\frac{8}{8^a}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{\left(2^{k-1}\right)^a}\\
&=1+\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{4^{a-1}}+\cdots+\frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^{a-1}}\\
&=1+\frac{1}{2^{a-1}}+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^{k-1}\\
&=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^k}{1-\frac{1}{2^{a-1}}}<\frac{2^{a-1}}{2^{a-1}-1}.
\end{aligned}$$

至此,已证明$\{a_n\}$有一子列$\{a_{2^n-1}\}$是有上界的.因为$\{a_n\}$是递增数列,由此得知$\{a_n\}$也有上界,从而$\{a_n\}$是收玫数列.

Theorem 4.1.3 (正项级数的有界判别法)

$\sum u_n$中各项均大于等于零，则S_n单调递增；则$\sum u_n$收敛$\Leftrightarrow S_n$收敛$\Leftrightarrow S_n$有界

注 可以用该判别法判断调和级数发散

Theorem 4.1.4 (正项级数的比较判别法)

若$\sum u_n,\sum v_n$均正项；若$\exists N>0$；$\forall n>N$有$u_n\leqslant v_n\Rightarrow\begin{cases}\sum v_n\text{收敛}\Rightarrow\sum u_n\text{收敛}\\\sum u_n\text{发散}\Rightarrow\sum v_n\text{发散}\end{cases}$

Proof 不失一般性，设$a_n\le b_n(n=1,2,\cdots)$.令$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和分别为$S_n$和$T_n$.则$S_n\le T_n(n=1,2,\cdots)$.

(1)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收玫，则$\{T_n\}$有界，则$\{S_n\}$也有界，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收玫.

(2)若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则$\{S_n\}$无界，则$\{T_n\}$也无界，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也发散.

注 注以上定理只对正项级数成立.设$a_n=-1/n,b_n=1/n^2$，则$a_n\le b_n(n=1,2,\cdots)$.此时，虽然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收玫，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

Theorem 4.1.5 (正项级数比较判别法极限形式)

$\sum u_n,\sum v_n$均正项；$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l\Rightarrow\begin{cases}0<l<+\infty\ \text{同敛散}\\l=0\ \ \sum v_n\text{收敛}\Rightarrow\sum u_n\text{收敛}\\l=+\infty\ \ \sum v_n\text{发散}\Rightarrow\sum u_n\text{发散}\end{cases}$

Proof (1)设$0<l<+\infty$.由于$a_n/b_n\to l$，故$\forall\varepsilon=l/2>0$，当n充分大时$\left|\dfrac{a_n}{b_n}-l\right|<\dfrac{l}{2}\Longleftrightarrow\dfrac{1}{2}l<\dfrac{a_n}{b_n}<\dfrac{3}{2}l\Longleftrightarrow\dfrac{1}{2}lb_n<a_n<\dfrac{3}{2}lb_n$.

由以上不等式可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$同敛散.

(2) 设$l=0$.由于$a_n/b_n\to0$，因此当n充分大时$\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|<1\Longleftrightarrow0<a_n<b_n$.由以上不等式可知，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收玫，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

(3) 设$l=+\infty$.由于$a_n/b_n\to+\infty$，因此当n充分大时$\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|>1\Longleftrightarrow a_n>b_n>0$.由以上不等式可知，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也发散.

Note 比较判别法不仅可以直接用于判断正项级数的玫散性性，还可以派生出很多别的判别法.
如果以几何级数为比较对象，可以得到所谓的根值判别法 (*roottest*).

Theorem 4.1.6 (柯西根值判别法)

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

(1)当n充分大时，若$\sqrt[n]{a_n}\le q$其中$0<q<1$，则级数收玫.

(2)若存在无穷多个n满足$\sqrt[n]{a_n}\ge1$，则级数发散.

Proof (1) 若$0<q<1$，则几何级数q^n收敛.当n充分大时，由条件可知$\sqrt[n]{a_n}\le q\Longleftrightarrow a_n\le q^n$.

由正项级数的比较判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

(2)若存在无穷多个n满足$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, 则a_n不收敛于0, 于是可知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

Theorem 4.1.7 (柯西根值判别法极限形式)

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.令$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$

(1)当$q < 1$时, 级数收敛.

(2)当$q > 1$时, 级数发散.

(3) 当$q = 1$时, 无法判断敛散性.

Proof (1)当$q < 1$时, 存在$\varepsilon > 0$使得$q + \varepsilon < 1$.由于$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$, 故当$n$充分大后$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$.于是可知级数收敛.

(2)当$q > 1$时, 由于$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$, 故数列$\{\sqrt[n]{a_n}\}$存在一个子列收敛于$q$.这表明有无穷多个$n$满足$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$.

由正项级数的$Cauchy$判别法可知级数发散.

(3)设$a_n = \dfrac{1}{n}$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n^2}$.则$\sqrt[n]{a_n} \to 1$和$\sqrt[n]{b_n} \to 1$, 但级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散, 而$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

于是可知当$q = 1$时, 无法判断敛散性.

Theorem 4.1.8 (比值判别法)

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.当n充分大后, 若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.则

(1)当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛.

(2)当$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散.

Proof 存在N, 当$n > N$时$\dfrac{a_{N+1}}{a_N} \leq \dfrac{b_{N+1}}{b_N}$, $\quad \dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \leq \dfrac{b_{N+2}}{b_{N+1}}$, $\quad \cdots, \quad \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \leq \dfrac{b_n}{b_{n-1}}$.

把以上各式相乘得$\dfrac{a_n}{a_N} \leq \dfrac{b_n}{b_N} \iff a_n \leq \dfrac{a_N}{b_N} b_n \iff \dfrac{b_N}{a_N} a_n \leq b_n$.

由正项级数的比较判别法可知当$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收玫时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收玫, 当$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散.

Corollary 4.2

设$a_n > 0, 0 < \alpha \leq 1, \beta > 1$, 证明

(1)若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散

(2)若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\beta}$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

Proof (1)由于$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{\alpha} = \dfrac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{(n-1)^{\alpha}}$, 由命题上个比值判别法可知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.(2)同 (1).

Theorem 4.1.9 (D'Alembert 判别法)

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.当$n$充分大后

(1)若存在$q<1$,满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq q$,则级数收敛.

(2)若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$,则级数发散.

从以上判别法的条件可知,只有单调数列(当n充分大后)才适用以上判别法.

Theorem 4.1.10 (D'Alembert 判别法极限形式)

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.令$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=Q,\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$.

(1)若$q<Q<1$,则级数收敛.

(2)若$1<q<Q$,则级数趋于$+\infty$.

(3)若$Q=1$或$q=1$,则无法判断敛散性.

Proof (1) 当$Q<1$时,存在$\varepsilon>0$使得$Q+\varepsilon<1$.由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=Q$.故当$n$充分大后$a_{n+1}/a_n<Q+\varepsilon<1$.于是可知级数收敛.

(2)当$1<q$时,存在$\delta>0$使得$q-\delta>1$.由于$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$.故当$n$充分大后$a_{n+1}/a_n>q-\delta>1$.于是可知级数发散.

(3)证明同$Cauchy$根值判别法.

注若$q<1<Q$,则说明在n充分大后数列不单调,因此不适用以上判别法.

注 能不能像$Cauchy$判别法那样,由$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q>1$即能断言$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散?

结论是否定的.以例7.2中的级数为例,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=+\infty,$$

所以$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty>1$但该级数却是收玫的.

Theorem 4.1.11 (比值判别法和 D'Alembert 判别法联系)

则$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

Proof

只证明最右边的不等式.令$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$.

当$q=+\infty$时不等式显然成立.

下设$q\in\mathbb{R}$.对于$\forall\varepsilon>0;\exists N\in\mathbb{N}^*$当$n>N$时$a_{n+1}/a_n<q+\varepsilon$.于是$\dfrac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,\quad\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\quad\cdots,\quad\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<q+\varepsilon.$

把以上各式相乘得 e$\dfrac{a_n}{a_N}<(q+\varepsilon)^{n-N}\iff a_n<a_N(q+\varepsilon)^{n-N}\iff\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(q+\varepsilon)^{-N}}(q+\varepsilon)$.

令$n\to\infty$取上极限得$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq q+\varepsilon$。令$\varepsilon\to 0$可知$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq q$.

以上不等式表明凡是$DAlembert$比值判别法可以判别的一定可以用$Cauchy$根值判别法判别,反之不然.

因此$Cauchy$根值判别法要比$DAlembert$判别法更强一些.

但反之不然.仍以例7.2中的级数为例,因为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}1\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$.故用$Cauchy$判别法知其收玫.

但知$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0,\quad\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$

故用$D'Alembert$判别法不能判别它收敛或发散.

Corollary 4.3

设数列$\{a_n\}$.若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$.则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$

Example 4.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$

Proof 由$Stolz$定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$.因此所求极限也是1.

Theorem 4.1.12 (柯西根值判别法与 D'Alembert 判别法的适用范围)

设收玫的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.若它的收玫性可以用$Cauchy$根值判别法或$D'.Alembert$判别法判别

即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$或 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q<1$.则对于任一$r\in(q,1)$都有$a_n=o\left(r^n\right)$.

Proof 若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(a_{n+1}/a_n\right)=q$或$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$, 由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
故$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leq q$.由于$q<r<1$, 故存在$\delta>0$使得$q+\delta<r$.
于是当n充分大时$\sqrt[n]{a_n}<q+\delta\Longleftrightarrow a_n<(q+\delta)^n$令$p=\frac{q+\delta}{r}<1$.则$q+\delta=pr$.
于是$a_n<p^nr^n$.由于$p<1$, 因此$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r^n}=\lim\limits_{n\to\infty}p^n=0$
这表明对于任一$r\in(q,1)$都有$a_n=o\left(r^n\right)$.

4.1.2 积分与级数联系

Proposition 4.2

对于任一$p>-1$都有$\lim_{n\to\infty}(1^p+2^p+\cdots+n^p)=+\infty$.且$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$.

Proof 当$p>0$时x^p在$[0,1]$上连续且有界.当$-1<p<0$时,$\displaystyle\int_0^1 x^p\mathrm{d}x$是一个收敛的瑕积分.
因此当$p>-1$时x^p在$[0,1]$上$Riemann$可积.于是我们可以利用$Riemann$积分的定义把极限转化为$Riemann$积分:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

Theorem 4.1.13 (面积原理)

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上非负.

若$f(x)$在$[a,b]$上单调递增则$\displaystyle(b-a)f(a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le(b-a)f(b)$.

若$f(x)$在$[a,b]$上单调递减,则$\displaystyle(b-a)f(a)\ge\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge(b-a)f(b)$.

Proof 证明只证明单调递增的情况.由于对于任一$x\in[a,b]$都有$f(a)\le f(x)\le f(b)$.
由$Riemann$的保序性可知$\displaystyle\int_a^b f(a)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(b)\mathrm{d}x\iff(b-a)f(a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le(b-a)f(b)$.

特别地,当函数$f(x)$在区间$[a,a+1]$上非负且单调递增时$\displaystyle f(a)\le\int_a^{a+1}f(x)\mathrm{d}x\le f(a+1)$.
如果用和式来近似积分,那么就需要估计这种近似的误差.利用以上的面积原理,可以得到以下和式与积分的误差估计式.

Theorem 4.1.14 (离散和的误差估计)

设函数f在$[a_0,+\infty)$上非负且单调递增.任取a,b,只要$a_0\le a\le b$且存在$n\in\mathbb{Z}$满足$a\le n\le b$
有$\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{a\le n\le b}f(n)\right|\le f(b)$.

以上结论也可以写成带大O的等式:$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{a\le n\le b}f(n)+O[f(b)]$.

Proof 令$A=\begin{cases}a, & a\in\mathbb{Z}\\ [a]+1, & a\notin\mathbb{Z}\end{cases}$, $B=\begin{cases}b, & b\in\mathbb{Z}\\ [b], & b\notin\mathbb{Z}\end{cases}$.
由于$f(x)$在$[a_0,+\infty)$上非负且单调递增,由面积原理可知$\displaystyle f(k)\le\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\le f(k+1),\quad k=A,A+1,\cdots,B-1$.
把上述不等式从A到$B-1$全部相加得$\displaystyle f(A)+\cdots+f(B-1)\le\int_A^B f(x)\mathrm{d}x\le f(A+1)+\cdots+f(B)$.
由积分的可加性可知$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x+\int_A^B f(x)\mathrm{d}x+\int_B^b f(x)\mathrm{d}x$.
结合两个式子可得
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_a^A f(x)\mathrm{d}x+\int_B^b f(x)\mathrm{d}x+f(A)+\cdots+f(B-1).$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^A f(x)\mathrm{d}x+\int_B^b f(x)\mathrm{d}x+f(A+1)+\cdots+f(B).$$
于是可知$\displaystyle-f(b)\le\int_a^A f(x)\mathrm{d}x+\int_B^b f(x)\mathrm{d}x-f(B)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{a\le n\le b}f(n)\le\int_a^A f(x)\mathrm{d}x+\int_B^b f(x)\mathrm{d}x-f(A)\le f(b)$.

Example 4.2 当$p>0$时函数$f(x)=x^p$在$[1,+\infty)$上非负且单调递增.由离散和误差估计可知

$$n^p \geq \left|\sum_{k=1}^{n} k^p - \int_1^n x^p \mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} k^p - \frac{n^{p+1}-1}{p+1}\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{n} k^p - \frac{n^{p+1}}{p+1}\right|$$

以上不等式可以写成 $\sum_{k=1}^{n} k^p = \dfrac{n^{p+1}}{p+1} + O\left(n^p\right)$

不仅知道了 $\sum_{k=1}^{n} k^p \sim \dfrac{n^{p+1}}{p+1}$, $\quad n \to \infty$.还知道了误差的阶.

Example 4.3 函数 $f(x) = \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负且单调递增.由离散和误差估计可知

$\ln n \geq \left|\sum_{k=1}^{n} \ln k - \int_1^n \ln x \mathrm{d}x\right| = |\ln n! - n\ln n + n - 1|$.以上不等式可以写成 $\ln n! = n\ln n - n + 1 + O(\ln n)$.

以上不等式可以整理为

$|\ln n! - \ln n^n + \ln \mathrm{e}^n - \ln \mathrm{e}| \leq \ln n \Longleftrightarrow \ln\dfrac{1}{n} \leq \ln\dfrac{n!\mathrm{e}^{n-1}}{n^n} \leq \ln n. \Longleftrightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{n!\mathrm{e}^{n-1}}{n^n} \leq n \Longleftrightarrow \dfrac{n^{n-1}}{\mathrm{e}^{n-1}} \leq n! \leq \dfrac{n^{n+1}}{\mathrm{e}^{n-1}}$.

这样就得到了阶乘 $n!$ 的一个估计式.但这个估计式没有 *Stirling* 公式精确.

Theorem 4.1.15 (级数和积分联系定理)

设函数 f 在 $[a_0, +\infty)$ 上非负且单调递减.则 $\forall a \geq a_0$ 以下极限都存在且有限：

$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{a\leq k\leq n} f(k) - \int_a^n f(x)\mathrm{d}x\right] = \alpha.\quad$ 且 $-\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \leq \alpha \leq f(A) - \int_a^A f(x)$

其中 $A = \begin{cases} a, & a \in \mathbb{Z} \\ [a]+1, & a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

如果还满足 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则 $\forall x \geq a_0 + 1$ 都有 $\left|\sum_{a_0\leq k\leq x} f(k) - \int_{a_0}^x f(t)\mathrm{d}t - \alpha\right| \leq f(x-1)$.

可以用大 O 记号写成 $\sum_{a_0\leq k\leq x} f(k) = \int_{a_0}^x f(t)\mathrm{d}t + \alpha + O[f(x-1)]$.

Proof (i) 令 $g(n) = \sum_{a\leq k\leq n} f(k) - \int_a^n f(x)\mathrm{d}x$ 下面来证明数列 $g(n)$ 单调递减有下界.

由面积原理可知

$$g(n) - g(n+1) = \sum_{a\leq k\leq n} f(k) - \int_a^n f(x)\mathrm{d}x - \sum_{a\leq k\leq n+1} f(k) + \int_a^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x - f(n+1) \geq 0.$$

因此 $g(n)$ 单调递减.由于

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{k=A}^{n} f(k) - \int_a^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=A}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right] + f(n) - \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{k=A}^{n-1}[f(k) - f(k)] + f(n) - \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \geq -\int_a^A f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由单调有界定理可知 $g(n)$ 收敛.

由于 $g(n)$ 单调递减, 故 $-\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \leq g(n) \leq g(A) = f(A) - \int_a^A f(x)\mathrm{d}x$.

令 $n \to \infty$ 即可得到

(ii) 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, 则

$$\begin{aligned} g(x) - \alpha &= \sum_{a\leq k\leq x} f(k) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{a\leq k\leq n} f(k) - \int_a^n f(t)\mathrm{d}t\right] &&= -\int_{[x]}^x f(x)\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=[x]+1}^{n} f(k) - \int_{[x]}^n f(t)\mathrm{d}t\right] \\ &= -\int_{[x]}^x f(x)\mathrm{d}x - \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=[x]+1}^{n}\int_{k-1}^k f(k)\mathrm{d}t - \sum_{k=[x]+1}^{n}\int_{k-1}^k f(t)\mathrm{d}t\right] &&= -\int_{[x]}^x f(t)\mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=[x]+1}^{n}\int_{k-1}^k [f(t) - f(k)]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

下面来估计$g(x)-\alpha$的上界和下界.

$$g(x)-\alpha \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=[x]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(t)-f(k)]\mathrm{d}t \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=[x]+1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(k-1)-f(k)]\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=[x]+1}^{n}[f(k-1)-f(k)]=\lim_{n\to\infty}[f([x])-f(n)]=f([x])\le f(x-1).$$
$$g(x)-\alpha \ge -\int_{[x]}^{x}f(t)\mathrm{d}t \ge -(x-[x])f([x]) \ge -f([x]) \ge -f(x-1).$$

成立.

Theorem 4.1.16 (欧拉常数)

存在常数γ满足$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Proof 由于函数$f(x)=1/x$在$[1,+\infty)$上非负且单调递减, 由定理可知

$\lim_{n\to\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma.$

这里的γ是$Euler$常数. 由于$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, 因此$\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n-\gamma\right|\le\frac{1}{n-1}\le\frac{2}{n}$.

于是可得$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$

之前只得出了$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n$, 其中$\varepsilon_n$是一个无穷小. 但不知道$\varepsilon_n$的具体信息. 得到了对调和级数更精确的估计.

Theorem 4.1.17 (Cauchy 积分判别法)

设函数f在$[1,+\infty)$上非负且单调递减, 则以下无穷级数与无穷积分同敛散 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n),\quad \int_{1}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x.$

Example 4.4 讨论以下级数的敛散性 : $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$.

Proof 设函数$f(x)=1/(x\ln^p x)$, 则$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递减. 由于 $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^p x}=\begin{cases}\ln\ln x\big|_2^{+\infty}, & p=1\\ \left.\dfrac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right|_2^{+\infty}, & p\neq 1\end{cases}$.

因此当$p>1$时$\displaystyle\int_{2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛, 当$p\le 1$时发散. 由$Cauchy$积分判别法可知原级数与$\displaystyle\int_{2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$有相同的敛散性.

注 按前面例子中的方法, 利用$Cauchy$积分判别法可以判断以下类型的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n},\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln^p\ln n},\quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n\ln^p\ln\ln n},\cdots.$$

它们的结论都是统一的 : 当$p>1$时收敛, 当$p\le 1$时发散.

4.1.3 其余判别法

Proposition 4.3 (对数判别法-p 级数)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.令 $b_n = \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$.当 n 充分大时,

(1)若存在 $\delta > 0$ 使得 $b_n \geq 1+\delta$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收玫

(2)若 $b_n \leq 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Proof (1)由于存在 $\delta > 0$ 使得 $b_n \geq 1+\delta$, 故 $\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \geq 1+\delta \Longleftrightarrow \ln\dfrac{1}{a_n} \geq \ln n^{1+\delta} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a_n} \geq n^{1+\delta} \Longleftrightarrow a_n \leq \dfrac{1}{n^{1+\delta}}$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\delta}$ 收敛, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2)由于 $b_n \leq 1$, 故 $\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \leq 1 \Longleftrightarrow \ln\dfrac{1}{a_n} \leq \ln n \Longleftrightarrow a_n \geq \dfrac{1}{n}$.由于调和级数发散, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Proposition 4.4 (对数判别法-p 级数极限形式)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.若以下极限存在 : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = r$.则

(1)当 $r > 1$ 时, 原级数收敛.

(2)当 $r < 1$ 时, 原级数发散.

(3)当 $r = 1$ 时, 无法判断.

Note 于是, 我们需要更加精细的判别法来判别收玫速度比几何级数慢的级数.

考虑把正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与收玫的 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p (p > 1)$ 比较.

由比值判别法可知, 若满足 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p$.则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收玫.

改写以上不等式得 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^p = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p = 1+\dfrac{p}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad n\to\infty$.

因此 $n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq p+o(1) > 1, \quad n\to\infty$.由此引出了以下判别法.

Theorem 4.1.18 (Rabbe 判别法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.令 $R_n = n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 当 n 充分大时

(1)若存在 $r > 1$ 满足 $R_n \geq r$, 则级数收敛.

(2)若 $R_n \leq 1$, 则级数发散.

Proof (1)由于 $r > 1$, 故存在 $p \in (1, r)$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+1/n)^p - 1}{1/n} = p < r$.

因此当 n 充分大时 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p < 1+\dfrac{r}{n}$ 由于 $R_n \geq r$, 故

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1+\dfrac{r}{n} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p = \dfrac{(n+1)^p}{n^p} \Longleftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{1/(n+1)^p}{1/n^p}$.

由于$p>1$,故p级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^p$收玫,由正项级数的比值判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收玫.

(2)由于$R_n\le 1$,故$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le 1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+1}{n}\Longleftrightarrow\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ge\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1/(n+1)}{1/n}$.

由于调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$发散,由正项级数的比值判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

注 $Raabe$判别法和对数判别法都是和p级数比较得到的,因此属于同一层级的判别法

它们的关系一如$D'Alembert$判别法和根值判别法的关系,即对数判别法比$Raabe$判别法更强一些

因为$Raabe$判别法也只能处理单调数列 (n充分大以后) 的情况.

和$D'Alembert$判别法类似,以上判别法只能对单调数列 (n充分大以后) 有效.

Theorem 4.1.19 (Rabbe 判别法极限形式)

设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

若$R_n=n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\to r$.即$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{r}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right),\quad n\to\infty$.则

(1)当$r>1$时级数收敛.

(2)当$r<1$时级数发散.

(3)当$r=1$时无法判断级数的敛散性.

Proof (1)当$r>1$时,存在$r_0\in(1,r)$.由于$R_n\to r$,故当n充分大时$R_n>r_0>1$.于是可知原级数收玫.

(2)当$r<1$时,由于$R_n\to r$,故当n充分大时$R_n<1$.于是可知原级数发散.

(3)令$a_n=\dfrac{1}{n\ln^p n}$.则$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\dfrac{1}{n\ln^p n}}{\dfrac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left[\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p$

由于$\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}=\dfrac{\ln n(1+1/n)}{\ln n}=1+\dfrac{1}{\ln n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1+o\left(\dfrac{1}{n}\right),\quad n\to\infty$.

故$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right),\quad n\to\infty$.此时$r=1$.

我们已经知道,当$p>1$时级数收玫,当$p\le 1$时级数发散,因此$r=1$时$Raabe$判别法无法判断级数的敛散性.

注 和$D'Alembert$判别法类似,以上判别法的条件也可以减弱为上极限和下极限的形式.

令R_n的上极限为R,下极限为r,则

(1)当$r>1$时,级数收玫.

(2)当$R<1$时,级数发散.

(3)当$r=1$或$R=1$时,无法判断级数的玫散性.

Note 这时,我们应该让$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和一个比$p$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^p(p>1)$级数收玫得更慢的级数来比较.

我们已经知道,当$p>1$时级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}1/(n\ln^p n)$收玫.由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^p}{1/(n\ln^q n)}=0,\quad p,q>1$.

因此$\sum\limits_{n=2}^{\infty}1/(n\ln^q n)\ (q>1)$是比$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^p(p>1)$级数收玫得更慢的级数.

考虑用$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n\ln n^p(p>1)$比较.若$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{\dfrac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}}{\dfrac{1}{n\ln^p n}}=\dfrac{n}{n+1}\left[\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^p$.

则由比值判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.改写以上不等式得 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p$.

由于 $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n(1+1/n)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{\ln n}\left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$

故 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{n+1}{n}\left[1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right]^p = \frac{n+1}{n}\left[1 + \frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right] = 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$

于是 $n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \geq p + o(1) > 1,\quad n\to\infty$.由此引出了以下判别法.

Theorem 4.1.20 (*Bertrand Gauss*判别法)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.令 $B_n = n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$.当 n 充分大时,

(1)若存在 $r > 1$ 满足 $B_n \geq r$, 则级数收敛.

(2)若 $B_n \leq 1$, 则级数发散.

Proof (1)由于 $r > 1$, 故存在 $p \in (1, r)$.由于 $\frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p = 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$

故当 n 充分大时 $\frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p < 1 + \frac{1}{n} + \frac{r}{n\ln n}$.

由于 $B_n \geq r$, 故 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 + \frac{1}{n} + \frac{r}{n\ln n} > \frac{n+1}{n}\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^p \Longleftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n}{n+1}\left[\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^p = \frac{\frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}}{\frac{1}{n\ln^p n}}$.

当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\ln^p n)$ 收敛, 由正项级数的比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2)由于 $B_n \leq 1$, 故 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} \Longleftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n\ln n}{n\ln n + \ln n + 1}$

由于

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\ln(n+1) - (n\ln n + \ln n + 1)\\
=&n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 = n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) > 0.
\end{aligned}
$$

因此 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n\ln n}{n\ln n + \ln n + 1} \geq \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = \frac{\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n\ln n}}$.

由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n\ln n)$ 发散, 由正项级数的比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

和 $D'Alembert$ 判别法类似, 以上判别法只能对单调数列 (n 充分大以后) 有效.

Theorem 4.1.21 (*Bertrand Gauss*判别法极限形式)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.若 $B_n = n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n}\right) \to r$.

即 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{r}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$

(1)当 $r > 1$ 时级数收敛.

(2)当 $r < 1$ 时级数发散.

(3)当 $r = 1$ 时无法判断级数的敛散性.

Proof (1)和 (2)都是显然的.只证明 (3).

令 $a_n = \frac{1}{n\ln n\ln^p\ln n}$.容易知道 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),\quad n\to\infty.$

但我们知道,当$p>1$时级数收攻,当$p\le 1$时级数发散.这表明当$r=1$时无法判断级数的敛散性.

注 和$D'Alembert$判别法类似,以上判别法的条件也可以减弱为上极限和下极限的形式.

令B_n的上极限为R,下极限为r,则

(1)当$r>1$时,级数收攻.

(2)当$R<1$时,级数发散.

(3)当$r=1$或$R=1$时,无法判断级数的攻散性.

Proposition 4.5

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.若$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$,其中$\lambda,\mu$都是常数,$\theta_n$是一个有界量.则级数的敛散性为

	$\lambda>1$	$\lambda<1$	$\lambda=1$
$\mu>1$	收敛	发散	收敛
$\mu<1$	收敛	发散	发散
$\mu=1$	收敛	发散	发散

Proof (i)当$\lambda\ne 1$时,由于$\theta_n=O(1)$,故$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{1}{\lambda}$.$D'Alembert$判别法可知,若$\lambda>1$,则级数收攻,若$\lambda<1$,则级数发散.

(ii)当$\lambda=1$且$\mu\ne 1$时,由于$\theta_n=O(1)$,故$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\mu+\frac{\theta_n}{n^2}\to\mu$.

由$Raabe$判别法可知,若$\mu>1$,则级数收攻,若$\mu<1$,则级数发散.

(iii)当$\lambda=1$且$\mu=1$时,由于$\theta_n=O(1)$,故$B_n=n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\ln n}{n}\theta_n\to 0$.

由$Bertrand$判别法可知级数发散.

Theorem 4.1.22 (Sapagof 判别法)

1.设$\{a_n\}$是正的单调递增序列,证明:级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$当$\{a_n\}$有界时收敛,当$\{a_n\}$无界时发散.

2.设$\{a_n\}$为单调递减的正数列,证明 : $\lim_{n\to\infty}a_n>0\iff$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$收敛,即$\lim_{n\to\infty}a_n=0\iff$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$发散.

Proof 当$\{a_n\}$有界时,由单调有界原理可知$\{a_n\}$收敛,同时$0\le 1-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\le\frac{1}{a_2}(a_{n+1}-a_n)$.

根据$\{a_n\}$收攻可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$收敛,再结合上式级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$也收敛.

当$\{a_n\}$无界时,明显$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$

因此对任意的正整数N,取$n_0=N+1>N$,有$\lim_{p\to\infty}\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0+p+1}}=0$那么存在正整数$p_0$,使得$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0+p_0+1}}<\frac{1}{2}$,进而

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)=\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}\ge\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{n_0+p_0+1}}=\frac{a_{n_0+p_0+1}-a_{n_0+1}}{a_{n_0+p_0+1}}=1-\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0+p_0+1}}>\frac{1}{2}.$$

由柯西准则可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$发散.

Theorem 4.1.23 (库默尔 E.E.Kummer 判别法)

库默尔 ($E.E.Kummer$)判别法.

(i) 设$c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$是使级数$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$发散的一个正数序列.

(ii) 对所考虑的正项级数$\sum a_n$作序列$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$; δ为一正常数

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{若对于} n > N\text{，不等式}\mathcal{K}_n \geqslant \delta\text{成立, 则级数收敛} \\ \text{若 (对于} n > N)\mathcal{K}_n \leqslant 0\text{则级数发散} \end{cases}$$

(极限形式 : 假定序列$\mathcal{K}_n$具有极限 (有限的或无穷的) : $\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}$那么当$\mathcal{K} > 0$时级数收敛, 而当$\mathcal{K} < 0$时级数发散.)

Proof 证明设$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta > 0$(这个不等式, 显然可以认为对所有的$n$都是成立的).

以a_{n+1}乘这个不等式的两端, 得到$c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1} \geqslant \delta \cdot a_{n+1}$ (*) 也就是$c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1} > 0$或$c_n a_n > c_{n+1}a_{n+1}$.

由此推知, 变量$c_n a_n$单调递减, 因而趋于一个有限极限 (因为这变数以0下有界). 于是, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n a_n - c_{n+1}a_{n+1})$收敛,

因为这个级数的前n项的和$c_1 a_1 - c_{n+1}a_{n+1}$具有有限极限. 但在这情形下由不等式 (*) , 根据定理可得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\delta a_{n+1}$收攻

$\Rightarrow \sum a_n$收敛

如果对于$n > N, \mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0$则有$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}$. 因已假定级数$\sum \frac{1}{c_n}$发散

故按照定理, 级数$\sum a_n$发散. 这就是所要证明的.

注 现在我们要说明 : 如何利用库默尔判别法去求得一些作为它的特别情形的重要的收攻性判别法.

例如, 令$c_n = 1$; 使级数$\sum \frac{1}{c_n}$发散的条件被保持着. 我们有 : $\mathcal{K}_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\mathcal{D}_n} - 1$

如果序列$\mathcal{D}_n$趋于极限$\mathcal{D}$, 则$\mathcal{K}_n$趋于极限$\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{D}} - 1$($\mathcal{K} = +\infty$如果$\mathcal{D} = 0$; $\mathcal{K} = -1$, 如果$\mathcal{D} = +\infty$).

当$\mathcal{D} > 1$时, 显然, $\mathcal{K} < 0$, 于是按照库默尔判别法, 级数发散; 如果$\mathcal{D} < 1$, 则$\mathcal{K} > 0$, 于是级数收攻.

可见, 我们重新得到了达朗贝尔判别法.

其次, 令$c_n = n$, 并且看出级数$\sum \frac{1}{c_n}$发散. 表达式$\mathcal{K}_n$有下列的形状 : $\mathcal{K}_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = \mathcal{R}_n - 1$

如果序列$\mathcal{R}_n$趋于极限$\mathcal{R}$, 则$\mathcal{K}_n$趋于极限$\mathcal{K} = \mathcal{R} - 1$($\mathcal{K} = \pm\infty$, 如果$\mathcal{R} = \pm\infty$). 当$\mathcal{R} > 1$时有$\mathcal{K} > 0$,

于是按照库默尔判别法, 级数收攻; 如果$\mathcal{R} < 1$, 则$\mathcal{K} < 0$, 于是级数发散. 我们又得到了拉阿伯判别法.

Problem 4.1 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

Solve: $\sum \frac{n^n}{(n!)^2}$利用比值判别法$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}{(n+1)^2} \to 0$所以收敛再由必要条件知道$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2} \to 0$

Theorem 4.1.24 (叶尔马尔科夫判别法)

提出的独特的判别法在积分判别法的应用范围内是非常好的. 这个判别法的陈述中并不包含积分概念

仍假定函数$f(x)$当$x > 1$时是连续、正的与单调减函数, $\sum a_n$是正项级数

若对充分大的x, 成立不等式$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \leqslant q < 1$, 则级数$\sum a_n$收攻

若对充分大的x, 成立不等式$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \geqslant 1$，则级数$\sum a_n$发散

其中e^x可以用任何单调增加、有连续导数的正函数并满足$\phi(x) > x$的$\phi(x)$代替

Proof 证明设第一个不等式成立,对任意$x \geqslant x_0$有(代换$t=e^u$) $\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(e^u)e^u du \leqslant q\int_{x_0}^{x} f(t)dt$,

由此 $$\begin{aligned}(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt &\leqslant q\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt\right] \\ &\leqslant q\left[\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt - \int_{x}^{e^x} f(t)dt\right] \leqslant q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt,\end{aligned}$$ 因为$e^x > x$在后一方括号内被减项是正的.

在这种情况下$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \leqslant \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$,在不等式两端加上$\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt$,得到$\int_{x_0}^{e^x} f(t)dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = L$

考虑到$e^x > x$从而更有$\int_{x_0}^{x} f(t)dt \leqslant L \quad (x \geqslant x_0)$.则当$x\to\infty$时$\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt$存在有限的极限

按照(柯西)积分判别法级数收玫.

假设现在是第二个不等式成立,那么$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \geqslant \int_{x_0}^{x} f(t)dt$

并且若在不等式两端加上$\int_{x}^{e^{x_0}} f(t)dt$,则$\int_{x}^{e^x} f(t)dt \geqslant \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt = \gamma > 0$

因为,由$x_0 < e^{x_0}$.现在定义序列$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, \cdots$其中令$x_n = e^{x_{n-1}}$;按照已证明的$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt \geqslant \gamma$

于是$\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_2} f(t)dt \geqslant n\gamma$由此显然有$\int_{x_0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = +\infty$由积分判别法,级数发散.

4.1.4 一般项级数判别

注 我们判断一般项级数, 显然一开始如果能够判断其加了绝对值收敛即绝对收敛那是极好的
因此我们可以将上一节的判别法拿过来应用，但注意若绝对值加了发散，原级数仍可能条件收敛
但是达朗贝尔和柯西判别法例外若算出$l>1$可以断定发散了。这是因为当加了绝对值后$l>1$说明通项 $\nrightarrow 0$
自然不加绝对值也绝不可能 $\nrightarrow 0$

Theorem 4.1.25 (莱布尼兹判别法)

(莱布尼茨判别法) 若交错级数满足
(i)数列 $\{u_n\}$ 单调递减; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, 则级数 (1)收敛.

Proof 证考察交错级数的部分和数列 $\{S_n\}$, 它的奇数项和偶数项分别为

$$\begin{cases} S_{2m-1}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})\leq u_1 \\ S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})\geq u_1-u_2 \end{cases}$$

由条件 (i), 上述两式中各个括号内的数都是非负的, 从而数列 $\{S_{2m-1}\}$ 是递减的, 而数列 $\{S_{2m}\}$ 是递增的.
又由条件 (ii)知道 $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m-1}-S_{2m}=\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m}\to 0 \Rightarrow m\to\infty$; $|S_{2m-1}-S_{2m}|<\varepsilon$
$\Rightarrow |S_{2m}|\leqslant |S_{2m-1}|+\varepsilon\leqslant u_1+\varepsilon$ and $|S_{2m-1}|\geqslant |S_{2m}|-\varepsilon\geqslant u_1-u_2-\varepsilon$所以都有极限且极限相等因而收敛

Example 4.5 莱布尼兹判别法条件削弱则无法判断的例子

在$Leibniz$判别法中, 若 $\{a_n\}$ 不是单调递减的, 则结论不成立.例如,

设级数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right]}+(-1)^n}=\frac{1}{\sqrt2-1}-\frac{1}{\sqrt2+1}+\frac{1}{\sqrt3-1}-\frac{1}{\sqrt3+1}+\cdots.$

$$a_{n-2}=\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right]}+(-1)^n},\quad n=3,4,\cdots.$$则$a_n\to0$, 但不是单调递减的.

令$S_n=a_1+\cdots+a_n(n=1,2,\cdots)$, 则

$$\begin{aligned} S_{2n}&=\frac{1}{\sqrt2-1}-\frac{1}{\sqrt2+1}+\frac{1}{\sqrt3-1}-\frac{1}{\sqrt3+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \\ &=\frac21+\frac22+\frac23+\cdots+\frac2n. \end{aligned}$$

因此 $\{S_{2n}\}$ 是发散的, 于是可知原级数也是发散的.

注 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$是一个$Leibniz$级数, 其和为$S$.若用$S_n$代替$S$, 其误差不超过第$n+1$项的绝对值, 即 $|S_n-S|\leqslant a_{n+1}$.
事实上, 由于 $\{S_{2n}\}$ 递增趋于S, 而$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\leqslant S_{2n-1}$, 即 $\{S_{2n+1}\}$ 递减趋于S
所以不论n是奇数还是偶数, 都有 $|S_n-S|\leqslant|S_n-S_{n+1}|=a_{n+1}$.
由证明过程知道$S\leqslant a_1$.这就是说, $Leibniz$级数的和是一个不超过它首项之值的非负数.

Example 4.6

判断以下级数的敛散性 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Proof 由于 $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=(-1)^n\sin\left(\dfrac{\pi^2}{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}\right)$.

令$a_n=\sin\left(\dfrac{\pi^2}{\pi\sqrt{n^2+1}+n\pi}\right)$, $\quad n=1,2,\cdots$.当n充分大时 $\{a_n\}$ 递减趋于零.由$Leibniz$判别法可知原级数收敛.

Lemma 4.1 (阿贝尔变换, 分布求和公式)

记 $\{a_n\},\{b_n\}$ 两个数列; 记$B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_i=a_pB_p-\sum\limits_{i=1}^{p-1}(a_{i+1}-a_i)B_i$

Proof

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}a_ib_i=\sum_{i=1}^{p}a_i\left(B_i-B_{i-1}\right)&=\sum_{i=1}^{p}a_iB_i-\sum_{i=1}^{p}a_iB_{i-1}\\&=\sum_{i=1}^{p}a_iB_i-\sum_{j=0}^{p-1}a_{j+1}B_j\\&=a_pb_p-\sum_{i=1}^{p-1}\left(a_{i+1}-a_i\right)B_i\ (\text{记}B_0=0)\end{aligned}$$

Theorem 4.1.26 (Abel 阿贝尔引理)

(i) $\{a_n\}$ 单调; (ii) $\{B_n\}$ 有界为 M; 其中$B_n=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{i=1}^{p}a_ib_i\right|\leqslant M\left(|a_1|+2\left|a_p\right|\right)$

Proof 由$Abel$变换知道$LHS\leqslant \left|a_p\right|\left|B_p\right|+\sum\limits_{i=1}^{p-1}|a_{i+1}-a_i|\,|B_i|\leqslant \underbrace{M\left[\left|a_p\right|+\left|\sum\limits_{i=1}^{p-1}|a_{i+1}-a_i|\right|\right]\leqslant M\left[|a_1|+2\left|a_p\right|\right]}_{\text{因为单调所以}a_{i+1}-a_i\text{定号}}$

Theorem 4.1.27 (Dirchlet 判别法)

若数列 $\{a_n\}$ 单调, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 又级数 $\sum b_n$的部分和数列有界, 则级数 $\sum a_nb_n$收敛.

Proof 证由于 $\sum b_n$部分和数列$V_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_n$有界, 故存在正数$M$, 使 $|V_n|\le M$, 因此当n,p为任何正整数时,
$\left|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}\right|=\left|V_{n+p}-V_n\right|\le 2M$.又由于数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,
对$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 当$n>N$时, 有 $|a_n|<\varepsilon$.于是有阿贝尔引理得到 $\left|a_{n+1}b_{n+1}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}\right|\le 2M\left(|a_{n+1}|+2\left|a_{n+p}\right|\right)<6M\varepsilon$.

Theorem 4.1.28 (Abel 判别法)

若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, 且级数 $\sum b_n$收敛, $\Rightarrow \sum a_nb_n$收敛

Proof 证由于数列 $\{a_n\}$ 单调有界, 故存在$M>0$, 使 $|a_n|\le M$(阿贝尔引理条件 (i)).又由于级数 $\sum b_n$收敛,
依柯西准则, 对任给正数ε, 存在正数N, 使当$n>N$时, 对任一正整数p, 都有 $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p}b_k\right|<\varepsilon$(阿贝尔引理条件 (ii)).
应用得到 $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p}a_kb_k\right|\le 3M\varepsilon$这就说明级数收玫.

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 单调有界, $\therefore$ $\{a_n\}$ 收玫, 设$a_n\to a,(n\to\infty)$.考虑级数 $\sum(a_n-a)b_n+\sum ab_n$, $\therefore$ a_n-a单调趋于零,
$\because$ $\sum b_n$收敛, $\therefore$ $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$有界, 由狄利克雷判别法可知, 级数 $\sum(a_n-a)b_n$收敛, 又级数 $\sum ab_n$收剑
$\therefore$ 级数 $\sum(a_n-a)b_n+\sum ab_n$收玫, 即 $\sum a_nb_n$收敛.

Example 4.7

判断以下级数的敛散性: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$

Proof (i) 当$x \neq 2k\pi$时.设$a_n = \cos nx, b_n = 1/n(n = 1, 2, \cdots)$.由积化和差公式可知

$$2\sin\frac{x}{2}\cos kx = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

把上式从$k = 1$到$k = n$叠加得$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}$于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

因此$\{a_n\}$的部分和有界.由于$\{b_n\}$单调递减趋于零,由$Dirichlet$判别法可知,原级数收敛.

(ii) 当$x = 2k\pi$时原级数为$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$,故原级数发散.

以上级数定义了一个函数,定义域为$\mathbb{R}\backslash\{2k\pi\}(k \in \mathbb{Z})$.

类似上例,当$x \neq 2k\pi$时,还有类似的不等式: $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$

Example 4.8 设$\{a_n\}$递减趋于0.讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$的敛散性.

Proof 对任意的$x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$都是有界的,所以由狄利克雷判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$收敛.

当$x \neq 2k\pi$时$\sum_{n=1}^{N}\cos nx$是有界的,所以由狄利克雷判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$收敛.

而当当$x = 2k\pi$时$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$收敛性与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛性相同

Proposition 4.6 (p 阶莱布尼兹判别法推广形式)

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的通项递减趋于0, p是任意固定的正整数.

证明:级数$a_1 + \cdots + a_p - a_{p+1} - a_{p+2} - \cdots - a_{2p} + a_{2p+1} + \cdots + a_{3p} - \cdots$是收敛的.提示:用$Leibniz$判别法.

Proof 用S_n表示这个级数的部分和

由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的通项递减趋于0知道当n充分大时a_n就为正项递减趋于0的级数

我们不防就直接设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是一个从a_1起的正项递减的级数

由莱布尼茨判别法知$\{S_{np}\}$是收玫的.(可以写出$b_n = a_{p(n-1)+1} + \cdots + a_{np}$为一组)

上一行具体而言:$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$其中$b_n$是单调递减的这是因为每一组都是$p$个而$a_n$是单调递减而得到的

$b_n \to 0$这是由$a_n \to 0$得到的是因为b_n都是p个无穷小的和

此时实际上我们证明了题干所需证明的级数中以p个为一组的情况

接下来如果不是刚刚好分成p个一组恰好分完的情形如何思考.我们来借鉴一下当初我们证明莱布尼兹判别法

我们证明了$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$该交错级数中$S_{2n}$是单调递增有上界的$S_{2n} \to S$而$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$

而$a_{2n+1} \to 0$从而证明了S_{2n}与S_{2n+1}实际上收敛到同一个值

那么同样的思想我们证明了p个一组恰好分完的情形那么多出的几个 (至多p个有限个) 由于 $\to 0$同理得收敛到同一值

具体我们可以写为

$$a_1 + \cdots + a_p - a_{p+1} - a_{p+2} - \cdots - a_{2p} + a_{2p+1} + \cdots + a_{3p} - \cdots = \lim_{n\to\infty} S_{p\lfloor n/p \rfloor} + (-1)^{\lfloor n/p \rfloor} \sum_{k=p\lfloor n/p \rfloor+1}^{n} a_n = \lim_{n\to\infty} S_{p\lfloor n/p \rfloor}$$是收玫的

4.1.5 绝对与条件收敛与数项级数重排与柯西乘积

Theorem 4.1.29 (绝对收敛级数一定条件收敛)

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

Proof 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛, 由$Cauchy$收敛原理可知, 对于$\forall\varepsilon>0$都$\exists N\in\mathbb{N}^*$使得当$m,n>N$时 $|a_{m+1}|+\cdots+|a_n|<\varepsilon$.

由三角不等式可知 $|a_{m+1}+\cdots+a_n|\leq|a_{m+1}|+\cdots+|a_n|<\varepsilon.Cauchy$收敛原理可知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

Example 4.9 条件收敛未必绝对收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

Problem 4.2

以下级数条件收敛 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$

Proof 由例可知原级数收敛.由例可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos 2n)/n$收敛.

假设 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2 n\right)/n$收敛, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$收敛, 这是不可能的, 因此假设不成立.于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2 n\right)/n$发散.这表明原级数条件收敛.

Theorem 4.1.30

绝对收敛级数 $\sum u_n$

1°绝对收敛级数可任意重排，保持绝对收敛与和不变

2°两个绝对收敛的级数和分别为 A，B；那么这两个级数的乘积的级数仍然绝对收敛且和为 AB

Proof *Lemma*1°先证正项级数满足

设 $\sum u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$是正项级数收敛到$S$。重拍后级数记为 $\sum v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$ 部分和分别用$S_n,\sigma(m)$

$\sigma(m)=v_1+v_2+\cdots+v_m$那么对于$v_k$都有$u_{i_k}$对应 $(1\leqslant k\leqslant m)$，记$n=\max\{i_1,i_2\cdots i_m\}$那么有$\sigma(m)\leqslant S_n$;

由条件正项级数收敛知道S_n有上界S。那么$\sigma(m)$也有上界S；所以也收敛 (因为是正项所以也绝对收敛) 设收敛到σ

那么我们有$\sigma\leqslant S$同理重排是相互的所以$S\leqslant\sigma\Rightarrow\sigma\leqslant S$

*Lemma*2°证明一般级数满足

由题干知道 $\sum|u_n|$收敛；由$Lemma$1知道 $\sum|v_n|$也绝对收敛, 下证也收敛到S

令$p_n=\frac{|u_n|+u_n}{2}$ $q_n=\frac{|u_n|-u_n}{2}$显然两个均为正项。且由$0\leqslant p_n\leqslant|u_n|$ $0\leqslant q_n\leqslant|u_n|$ $p_n+q_n=|u_n|$ $p_n-q_n=u_n$

从上式 $\because|u_n|$绝对收敛那么p_n与q_n也是绝对收敛的。$S=\sum u_n=\sum p_n-\sum q_n$

那么对于v_n同理会有 $\sum v_n=\sum p'_n-\sum q'_n$; 其中 $\sum p'_n$、$\sum q'_n$是 $\sum p_n$、$\sum q_n$的重排

那么根据$Lemma$1知道收敛的正项级数重排后，和不变。从而 $\sum v_n=\sum p'_n-\sum q'_n=\sum p_n-\sum q_n=S$

实际上如果原数列是条件收敛那么我们经过重排可以使得重排后达到任何我们预先给定的值包括发散

Proof 证以S_n表示级数 $\sum|w_n|$的部分和, 即$S_n=|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|$ 其中$w_k=u_{i_k}v_{j_k}(k=1,2,\cdots,n)$

记$m=\max\{i_1,j_1,i_2,j_2,\cdots,i_n,i_n\},A_m=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_m|,B_m=|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_m|$

则必有$S_n \le A_m B_m$由定理条件,级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都绝对收玫,因而$\sum |u_n|$与$\sum |v_n|$的部分和数列$\{A_n\}$和$\{B_n\}$都是有界的.
于是由上述不等式知$\{S_n\}$是有界的,从而级数$\sum w_n$绝对收敛.下面证明$\sum w_n$的和$S = AB$.
由于绝对收玫级数具有可重排的性质,即级数的和与采用哪一种排列的次序无关,为此,采用正方形顺序并对各被加项取括号,即

$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + u_3v_2 + u_3v_1) + \cdots,$ 将每一括号作为一项,得到新级数$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n + \cdots$

它与级数$\sum w_n$同收玫,且和相同.用P_n表示的部分和,则P_n与A_n与B_n有关系式:$P_n = A_n B_n$.
从而$S = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n B_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n \lim\limits_{n\to\infty} B_n = AB$.

注 若$\sum u_n$条件收敛。那么$\sum \dfrac{|u_n| + u_n}{2}$与$\sum \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$发散

Proposition 4.7

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛 $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$都收玫.

2.设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛.

(1)证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$,其逆命题是否成立?

(2)证明:记$S_N^+ = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^+, S_N^- = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^-$,那么$\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{S_N^+}{S_N^-} = 1$.

Proof 由于$0 \leqslant a_n^+ \leqslant |a_n|$及$0 \leqslant a_n^- \leqslant |a_n|$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收玫时$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$都收玫.

因为$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$都收玫时$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收玫.

(1)因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$条件收玫,而$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$且$a_n = a_n^+ - a_n^-$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$不可能都收玫.若都收敛那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$也收敛那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$也收敛就绝对收敛矛盾

那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$两个正项级数至少一个发散，又题干是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$是发散到$+\infty$的.

同理可证$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

其逆命题一般不成立,比如取$a_n = (-2)^n$,那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$,但是$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$不收敛.

(2)因为$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = S_N^+ - S_N^-$,所以$\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{S_N^+}{S_N^-} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{S_N + S_N^-}{S_N^-} = 1 + \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{S_N}{S_N^-}$

而$\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$而$\lim\limits_{N\to\infty} S_N^- = +\infty$故$\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{S_N^+}{S_N^-} = 1$

Theorem 4.1.31 (Riemann 定理)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.若级数条件收玫,则对于任一给定的$S\in\mathbb{R}$,都存在一个重排后的新级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$满足 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$

Proof (i)先证明S为有限实数的情况,不妨设$S>0$.令$a_n^+=\dfrac{|a_n|+a_n}{2},\quad a_n^-=\dfrac{|a_n|-a_n}{2},\quad n=1,2,\cdots.$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-=+\infty.$

下面来构造一个收玫到S的级数.由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+=+\infty$,因此当$n$充分大时 $\sum_{i=1}^{n} a_i^+$一定可以超过S.

于是可以从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出$a_1^+,a_2^+,\cdots,a_{k_1}^+$,此时所取的各项之和恰好首次超过$S$,即

$\sum_{i=1}^{k_1} a_i^+ - a_{k_1}^+\le S<\sum_{i=1}^{k_1} a_i^+\Longleftrightarrow 0<\sum_{i=1}^{k_1} a_i^+-S\le a_{k_1}^+.$

令$A_1^+=\sum_{i=1}^{k_1} a_i^+$,则$0<A_1^+-S\le a_{k_1}^+$.(1)

令$A_1^-=\sum_{i=1}^{l_1} a_i^-$.由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-=+\infty$,因此当$n$充分大时总能使得$A_1^+-A_1^-$小于$S$.

于是可以从 $\{a_n^-\}$ 中依次取出$a_1^-,a_2^-,\cdots,a_{l_1}^-$,此时$A_1^+-A_1^-$恰好首次小于$S$,即

$A_1^+-A_1^-<S\le A_1^+-A_1^-+a_{l_1}^-\Longleftrightarrow 0<S-\left(A_1^+-A_1^-\right)\le a_{l_1}^-$(2)

然后可以继续重复第一步的操作,从 $\{a_n^+\}$ 中取出若干项

令$A_2^+=\sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_i^+$,使得$A_1^+-A_1^-+A_2^+-a_{k_2}^+\le S<A_1^+-A_1^-+A_2^+\Longleftrightarrow 0<\left(A_1^+-A_1^-+A_2^+\right)-S\le a_{k_2}^+$.(3)

不断重复以上操作,就可以得到一个无穷级数$A_1^+-A_1^-+A_2^+-A_2^-+\cdots$.

设该级数的部分和为 $\{S_n\}$.由等式(1,2,3)可知 $\{S_n\}$ 应满足

$0<S_{2n-1}-S\le a_{k_n}^+,\quad 0<S-S_{2n}\le a_{l_n}^-.$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收玫,故$a_n\to 0$,因此 $\lim_{n\to\infty} a_{k_n}^+=\lim_{n\to\infty} a_{l_n}^-=0.$

令以上不等式中的$n\to\infty$,由夹逼定理可知 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=S.$

这表明 $\{S_n\}$ 的奇子列和偶子列都收敛于S,于是可知$S_n\to S$.

由于$S=\left(a_1^++\cdots+a_{k_1}^+\right)+\left(-a_1^--\cdots-a_{l_1}^-\right)+\left(a_{k_1+1}^+\cdots+a_{k_2}^+\right)+\left(-a_{l_1+1}^--\cdots-a_{l_2}^-\right)+\cdots.$

其中每个括号内的各项符号都相同,由命题可知$a_1^++\cdots+a_{k_1}^+-a_1^--\cdots-a_{l_1}^-+a_{k_1+1}^+\cdots+a_{k_2}^+-a_{l_1+1}^--\cdots-a_{l_2}^-+\cdots=S.$

这样我们就通过得到一个收玫于S的级数,它是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$重排后得到的

(ii)下面证明S不是实数的情况,不妨设$S=+\infty$.下面构造趋向于$+\infty$的数列.

先从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出若干项,使得$a_1+\cdots+a_{t_1}>1$.然后减去 $\{a_n^-\}$ 中的第一项a_1^-.

接着继续从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出若干项,使得$a_1+\cdots+a_{t_1}-a_1^-+a_{t_1+1}+\cdots+a_{t_2}>2$.然后减去 $\{a_n^-\}$ 中的第二项a_2^-.

接着继续从 $\{a_n^+\}$ 中依次取出若干项,使得$a_1+\cdots+a_{t_1}-a_1^-+a_{t_1+1}+\cdots+a_{t_2}-a_2^-+a_{t_2+1}+\cdots+a_{t_3}>3$.然后减去 $\{a_n^-\}$ 中的第三项a_3^-.

不断重复这个过程就可以得到一个新级数,它是由原级数重排后得到的.

由于当n充分大时a_n^-可以任意小,故当n充分大时,负项的出现并不影响级数部分和的增大,因此构造的新级数趋向于$+\infty$.

4.1.6 级数乘积与无穷乘积

Definition 4.3 (柯西乘积)

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.令$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n:=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{i+j=n+1}a_ib_j$.我们称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的$Cauchy$乘积 $(Cauchy-product)$.

Example 4.10 两个收敛级数柯西乘积发散的反例

我们当然希望在$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$的情况下,有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=AB=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\right)$.

但实际情况并非总是如此.在$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$都收玫的情况下,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$可能是发散的.

例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$是一个收玫级数,它按$Cauchy$方式自乘后所得的级数便是发散的.

事实上,这时$a_n=b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$,于是$|c_n|=\sum\limits_{i+j=n+1}\frac{1}{\sqrt{ij}}\geqslant\sum\limits_{i+j=n+1}\frac{2}{i+j}=\frac{2n}{n+1}\geqslant 1$.因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$发散.

Theorem 4.1.32 (Cauchy 柯西乘积定理)

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都绝对收敛.

若它们的和分别为A,B.则$a_ib_j(i,j=1,2,\cdots)$按任意方式相加所得的级数都是绝对收敛的,且它的和为AB.

Proof 任意给定一种$a_ib_j(i,j=1,2,\cdots)$的排列,把这个排列记作$a_{i_k}b_{j_k}(k=1,2,\cdots)$.

对于给定的n,令$N=\max\{i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_n\}$.

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都绝对收玫,于是$\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{i_k}b_{j_k}|\leq\left(\sum\limits_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{N}|b_j|\right)\leq\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|\right)$.

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{i_n}b_{j_n}$绝对收玫.由级数重排定理可知任意改变该级数各项的次序它的和不变.

现在按方形相加的方式重新排列该级数,就得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{i_n}b_{j_n}=\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{N}b_j\right)=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\right)=AB$.

以上定理中的条件只是充分条件.

Theorem 4.1.33 ($Mertens$定理)

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛.

若它们的和分别为A,B且其中至少一个绝对收敛,则它们的$Cauchy$乘积$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=AB$.

Proof 不妨设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛,设它的和为$M$.令$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,\quad B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k,\quad C_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k$.则

$$\begin{aligned}C_n&=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)\\&=a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)+a_2(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})+\cdots+a_nb_1\\&=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1.\end{aligned}$$

令$B_n = B - \beta_n$, 其中$\beta_n \to 0$.则

$$C_n = a_1(B-\beta_n) + a_2(B-\beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B-\beta_1)$$
$$= (a_1+a_2+\cdots+a_n)B - (a_1\beta_n + a_n\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1)$$
$$= A_nB - \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_{n+1-i}.$$

由于$\beta_n \to 0$, 故任$-\varepsilon > 0$都存在$N \in \mathbb{N}^*$当$n > N$时$|\beta_n| < \varepsilon$.于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\beta_{n+1-i}\right| \leq |a_1\beta_n + \cdots + a_{n-N}\beta_{N+1}| + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + a_n\beta_1| < \varepsilon M + |a_{n-N+1}\beta_N + \cdots + a_n\beta_1|.$$

对于给定的N, 令$n \to \infty$取上极限得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\beta_{n+1-i}\right| \leq \varepsilon M$因此$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\beta_{n+1-i} \to 0$.

于是可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(A_nB - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\beta_{n+1-i}\right) = AB.$

Theorem 4.1.34 (Abel 柯西乘积定理)

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$都收玫.

若它们的和分别为A, B且它们的$Cauchy$乘积$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$收敛, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = AB$.

Proof 令$A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n, B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n, C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_n (n = 1, 2, \cdots)$.则$C_n = a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1, \quad n = 1, 2, \cdots$.

$$\text{因此}\begin{cases} C_1 = a_1B_1 \\ C_2 = a_2B_1 + a_1B_2 \\ C_3 = a_3B_1 + a_2B_2 + a_1B_3 \\ \cdots \\ C_N = a_NB_1 + a_{N-1}B_2 + \cdots + a_1B_N \end{cases}$$

于是$\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} C_n = \dfrac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N}$.

下面来证明上式右侧当$N \to \infty$时的极限就是AB.

令$A_n = A + \alpha_n, B_n = B + \beta_n$, 其中$\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0$.则

$$\frac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N} - AB = \frac{\alpha_1\beta_N + \cdots + \alpha_N\beta_1}{N} + \frac{A(\beta_1 + \cdots + \beta_N)}{N} + \frac{B(\alpha_1 + \cdots + \alpha_N)}{N}$$

由于$\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0$.故 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\beta_1 + \cdots + \beta_N}{N} = \lim\limits_{N\to\infty}\beta_N = 0. \quad \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_N}{N} = \lim\limits_{N\to\infty}\alpha_N = 0.$

由于$\{\alpha_n\}$有界, 可设$|\alpha_n| < M$.由于$\beta_n \to 0$, 因此$\left|\dfrac{\alpha_1\beta_N + \cdots + \alpha_N\beta_1}{N}\right| \leq \dfrac{|\alpha_1||\beta_N| + \cdots + |\alpha_N||\beta_1|}{N} < M\dfrac{|\beta_N| + \cdots + |\beta_1|}{N} \to 0.$

因此 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\alpha_1\beta_N + \cdots + \alpha_N\beta_1}{n} = 0$结合等式上述等式可知 $\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N} = 0.$

于是由可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \lim\limits_{N\to\infty} C_N = \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} C_n = \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{A_NB_1 + A_{N-1}B_2 + \cdots + A_1B_N}{N} = AB.$

Proposition 4.8

证明：级数$C(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$对所有实数$x$绝对收玫

而且$S(2x) = 2S(x)C(x)$.

Proof 由达朗贝尔判别法可知这两个级数对所有实数x绝对收敛.

注意到$E(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$中的级数满足$E(x\mathrm{i})=C(x)+\mathrm{i}S(x)$

利用$C(x)$的偶性，$S(x)$的奇性得到$S(x)=\frac{E(x\mathrm{i})-E(-\mathrm{i}x)}{2i}$与$C(x)=\frac{E(x\mathrm{i})+E(x\mathrm{i})}{2}$

所以$2S(x)C(x)=2\frac{E(x\mathrm{i})+E(-\mathrm{i}x)}{2}\frac{E(x\mathrm{i})-E(-ix)}{2\mathrm{i}}=\frac{E(2x\mathrm{i})-E(-2x\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=S(2x)$.

Example 4.11 两个反散级数的柯西乘积是绝对收敛级数

证明：发散级数$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n,\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$的$Cauchy$乘积是一个绝对收敛级数.

Proof 设$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$a_1=1 \quad a_2=-\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots a_k=-\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdots\cdots$

$b_1=1 \quad b_2=\left(\frac{3}{2}\right)\left(2^1+\frac{1}{2^{1+1}}\right)\cdots\cdots b_k=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2}\left(2^{k-1}+\frac{1}{2^k}\right)$

所以柯西乘积$c_n=a_1b_n+\cdots+a_nb_1$

$c_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\cdots-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2+\frac{1}{2^2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

因而$c_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left\{\left[2^{n-1}-2^{n-2}-\cdots-2\right]+\left[\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2^2}\right]\right\}-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\Longrightarrow c_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

故绝对收敛

Definition 4.4

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0(n=1,2,\cdots)$.令 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1a_2\cdots a_n\cdots$.

我们称 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 为 a_n 的无穷乘积 $(infinite-product)$.其中 a_n 称为级数的通项.

令 $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1a_2\cdots a_n$.称 P_n 为这个无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}$ 的部分乘积 $(partial-product)$.

若数列 $\{P_n\}$ 收敛到 $P \neq 0$, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 记作 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P$.其中 P 称为该无穷乘积的积.反之称该无穷乘积是发散的.

注对部分乘积取对数可以把它化为部分和, 于是无穷乘积的问题可以化为无穷级数.

为了这个操作有意义, 所以规定无穷乘积的各乘积因子都是正数.

注当 $\{P_n\}$ 收玫到0时, 我们规定 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 也是发散的, 这样做的目的是把无穷乘积和无穷级数联系起来研究.

对无穷乘积取对数后就可以把无穷乘积转化为无穷级数, 当 $P_n \to 0$ 时, 它取对数后的无穷级数发散到负无穷.

Problem 4.3 求证 : $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$

Proof 设前 n 项部分乘积为 P_n, 则 $\left(\sin\frac{x}{2^n}\right) P_n = \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2^n}\sin x$.

因此 $P_n = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin x}{\sin(x/2^n)} \to \frac{\sin x}{x}$.

Problem 4.4 求证 : $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$.

Proof 设前 n 项部分乘积为 P_n.由 $Wallis$ 公式可知

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1} = \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{2k-1} = \frac{1}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)^2} \to \frac{\pi}{2}$$

Problem 4.5 无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛性

Proof 是收玫的, 因为

$$\begin{aligned}
P_{n-1} &= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

Proposition 4.9 (无穷乘积收敛的必要条件)

若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Proof 若 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 可设它的积 P. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{P_{n-1}} = \dfrac{P}{P} = 1$.

Theorem 4.1.35 (无穷乘积收敛的充要判据)

无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 同敛散. 当它们收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) = S \Longleftrightarrow \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = \mathrm{e}^S$.

Proof 设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 的部分乘积和部分和分别为 P_n 和 S_n.

由于 $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k) = \exp\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)\right] = \mathrm{e}^{S_n} \Longleftrightarrow S_n = \ln P_n, \quad n = 1, 2, \cdots$.

因此当 $P_n \to P > 0$ 时则 $S_n \to \ln P$. 反之当 $S_n \to S$ 时 $P_n \to \mathrm{e}^S$.

Proposition 4.10

设数列 $\{a_n\}$. 当 n 充分大时, 若 $a_n > 0$ 或 $a_n < 0$, 则以下无穷级数无穷乘积同敛散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n).$$

Proof $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛都可以推得 $a_n \to 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$.

由于 $a_n > 0$ 或 $a_n < 0$, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 同敛散.

可知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 同敛散. 于是可知命题成立.

Proposition 4.11

设数列 $\{a_n\}$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则以下无穷级数无穷乘积同敛散: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

Proof 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收玫, 故 $a_n^2 \to 0$, 因此 $a_n \to 0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \dfrac{1}{2}$.

由正项级数的比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n - \ln(1+a_n)]$ 收敛. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 同敛散.

由定理可知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 同敛散. 于是可知命题成立.

Theorem 4.1.36 (无穷乘积发散到零的充要判据)

设无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty \iff \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到零.

Proof 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 的部分乘积和部分和分别为 P_n 和 S_n.
由于 $P_n=\mathrm{e}^{S_n} \iff S_n=\ln P_n,\quad n=1,2,\cdots$. 因此 $P_n\to 0$ 当且仅当 $S_n\to-\infty$.

Proposition 4.12

设数列 $\{a_n\}$. 若 $-1<a_n<0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到0.

Proof 由于 $a_n<0$, 故 $\ln(1+a_n)<0(n=1,2,\cdots)$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 且于 $a_n<0(n=1,2,\cdots)$
可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 也发散. 由于 $\ln(1+a_n)<0(n=1,2,\cdots)$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty$.
于是可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到0.

Proposition 4.13

设数列 $\{a_n\}$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散, 则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到0.

Proof 由于 $a_n\to 0$. 于是 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\dfrac{1}{2}$.
由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散, 由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n-\ln(1+a_n)]=+\infty$.
由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收玫, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty$. 于是可知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到0.

Problem 4.6 设 $\alpha>-1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dbinom{\alpha}{n}=0$.

Proof 由于 $(-1)^n\dbinom{\alpha}{n}=(-1)^n\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\left(1-\dfrac{\alpha+1}{1}\right)\left(1-\dfrac{\alpha+1}{2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{\alpha+1}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{\alpha+1}{k}\right)$.
由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+1)/n$ 发散, 且 $\alpha+1>0$, 由可知以上无穷乘积发散到零. 这表明 $\lim_{n\to\infty}\dbinom{\alpha}{n}=0$.

Note 收敛的无穷乘积能不能任意改变因子的次序且仍收敛?答案是否定的.很容易举出这样的例子:

取一个条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛, 那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$便是一个不能任意改变因子次序的收敛的无穷乘积.

事实上, 在所设的条件下, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 当然收敛, 但因 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+a_n)| = +\infty$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 是一个条件收敛级数, 设其和为α.

现改变 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 的次序, 得到一个新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+b_n)$, 使其和$\beta \neq \alpha$.

于是 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n) = e^{\beta} \neq e^{\alpha} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, 而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$正是由 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$改变因子次序所得的无穷乘积.

Definition 4.5 (无穷乘积绝对收敛的定义)

如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$绝对收敛.

如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛, 但无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$发散, 那么称 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$条件收敛.

Theorem 4.1.37

绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

Proof 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛.由命题知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛 (由 $|a_n|$ 定号)

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+a_n)|$收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛.再从无穷乘积收敛的充要判据知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛.

Proposition 4.14

任意改变绝对收敛的无穷乘积因子的次序, 所得的新的无穷乘积仍然绝对收敛, 且其积不变.

Proof 设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$绝对收敛.任意改变其因子的次序得到一个新的无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$.

那么就有 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛由命题知 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+a_n)|$也收敛 (比较判别法)

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 绝对收敛

这时所以它可以任意改变求和的次序, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+b_n)$ 也绝对收敛, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$

从而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$绝对收敛, 且 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$.

Theorem 4.1.38

设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$条件收敛, 那么适当改变其因子的次序, 可使它收敛到任意事先指定的正数s, 也可使其发散到 $+\infty$或0.

Proof 由 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$发散知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$发散.进而 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln(1+a_n)|$发散.

因为 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛 $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$收敛

因此$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$条件收敛.从而通过适当地重排,可使它收敛到$\ln s$或者发散到$\pm\infty$.

于是对应地,可以适当地改变$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$的因子的次序,使它收敛到正数$s$,或者发散到0或$+\infty$.

4.1.7 数项级数判断练习与重要性质反例

Problem 4.7

设$a_n > 0(n = 1, 2, \cdots)$.令$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.则以下级数收玫：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$

Proof 由于$\sum\limits_{n=2}^{k} \frac{a_n}{S_n^2} = \sum\limits_{n=2}^{k} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leq \sum\limits_{n=2}^{k} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \sum\limits_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_k} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_k} < \frac{1}{a_1}$.

因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n/S_n^2$的部分和数列有界.于是可知该级数收敛.

Problem 4.8

调和级数：证明以下数列发散$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$.

Proof 对于任一$N \in \mathbb{N}^*$,只要取$n = 2^{2N}$就有

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{2N}} \right)} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{2N}} + \cdots + \frac{1}{2^{2N}} \right)}_{2^{2N}-1\uparrow} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{2N-1} \cdot \frac{1}{2^{2N}} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{2N} = N.
\end{aligned}$$

于是可知$\{x_n\}$无界,从而它是发散的.

Problem 4.9

判断级数：$x_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, \quad p > 0, n = 1, 2, \cdots$.

Proof 当$p < 1$时$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$.于是由上个例子可知,当$n = 2^{2N}$时$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} > \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > N$.

于是可知$\{x_n\}$无界,从而它是发散的.

当$p > 1$时,由于

$$\begin{aligned}
x_{2^k - 1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \cdots + \left[\frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^p} + \cdots + \frac{1}{\left(2^k - 1\right)^p} \right] \leqslant 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{\left(2^{k-1}\right)^p} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{\left(2^{k-1}\right)^{p-1}} = \frac{1 - \left(1/2^{p-1}\right)^k}{1 - 1/2^{p-1}} < \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}.
\end{aligned}$$

因此当$p > 1$时$\{x_n\}$有界.于是可知$\{x_n\}$收敛.

Problem 4.10

判断以下级数的敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\left(n^2 + 1\right)}}$

Proof 由于$\frac{1}{\sqrt{n\left(n^2 + 1\right)}} < \frac{1}{n^{3/2}}, \quad n = 1, 2, \cdots$.且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$收玫,由正项级数的比较判别法可知原级数也收敛.

Problem 4.11

判断以下级数的敛散性：$\sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{-\ln n}$.

Proof 当$n>e^9$时$(\ln n)^{\ln n}=e^{(\ln n)\ln(\ln n)}=n^{\ln(\ln n)}>n^2\Longrightarrow(\ln n)^{-\ln n}<\frac{1}{n^2}$.

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,由正项级数的比较判别法可知原级数也收敛.

当$n>e^9$时$(\ln n)^{\ln n}=e^{(\ln n)\ln(\ln n)}=n^{\ln(\ln n)}>n^2\Longrightarrow(\ln n)^{-\ln n}<\frac{1}{n^2}$.

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,由正项级数的比较判别法可知原级数也收敛.

由于$b_n=\frac{\ln(\ln n)^{\ln n}}{\ln n}=\ln\ln n\to+\infty$.由对数判别法可知原级数收敛.

Problem 4.12

判断以下级数的敛散性：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

Proof 由于$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

故$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{1+n}}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{1+n}}}<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}=\frac{1}{2n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{2n^{3/2}}$.

由于$\sum_{n=1}^{\infty}1/\left(2n^{3/2}\right)$收敛,由正项级数的比较判别法可知原级数收敛.

由于$\ln(1+1/n)<1/n$,故知$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}>0$.由$Taylor$公式可知当$n\to\infty$时

$$\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{4n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

于是当$n\to\infty$时$\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{4n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\sim\frac{1}{4n^{3/2}}$.

由于$\sum_{n=1}^{\infty}1/\left(4n^{3/2}\right)$收玫,由正项级数的比较判别法可知原级数收玫.

Problem 4.13

判断以下级数的敛散性：$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

Proof 法一由于$\ln n<\sqrt{n}$,故$(\ln n)^2<n$.于是当n充分大时$(\ln n)^{\ln\ln n}=e^{(\ln\ln n)^2}<e^{\ln n}=n\Longrightarrow\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}>\frac{1}{n}$.

由于调和级数发散,由正项级数的比较判别法可知原级数也发散.

法二由于$b_n=\frac{\ln(\ln n)^{\ln\ln n}}{\ln n}=\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}\to 0$.由对数判别法可知原级数发散.

Problem 4.14

判断以下级数的玫散性：$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$, $\quad\alpha>0$.

Proof 由于当n充分大时$n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right|/\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|-1\right)=n\left(\frac{n+1}{|\alpha-n|}-1\right)=\frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}\to 1+\alpha>1$.

由正项级数的$Raabe$判别法可知原级数收敛.

Problem 4.15

判断以下级数的敛散性：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$

Proof

法一设以上级数的通项为a_n.则$a_{2n-1}=1/2^n, a_{2n}=1/3^n$.由于
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}}=\frac{1}{2^{\frac{n}{2n-1}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a_{2n}}=\frac{1}{3^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
因此 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$.由正项级数的$Cauchy$根值判别法可知原级数收敛.

法二由于几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n$和$\sum_{n=1}^{\infty}1/3^n$都收敛,故以下级数也收敛：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.
由于$1/2^n+1/3^n$恒为正数,因此原级数也收敛.

Problem 4.16

设级数$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.
按以下规则重排级数：先依次取p个正项,然后依次取q个负项,再依次取p个正项,如此下去.
判断重排后所得的新级数是否收敛?若收敛,求级数的和为$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$

Proof

设重排后的新级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.
对任意给定的$N\in\mathbb{N}^*$,令$m=[N/(p+q)]$.则$m(p+q)\le N<(m+1)(p+q)$.
于是级数的前N项部分和可以写成$\sum\limits_{n=1}^{N}a_n=\sum\limits_{n=1}^{m(p+q)}a_n+\sum\limits_{n=m(p+q)+1}^{N}a_n$.(1)

(i)先估计等式(1)右边的第二个级数.由于$N-m(p+q)<p+q$,因此$\sum\limits_{n=m(p+q)}^{N}a_n$总共不超过$p+q$项.

当$N\to\infty$时$m\to\infty$,因此当$N\to\infty$时有$\left|\sum\limits_{n=m(p+q)+1}^{N}a_n\right|\le\sum\limits_{n=m(p+q)+1}^{N}|a_n|\le(p+q)\cdot\frac{1}{m(p+q)}=\frac{1}{m}\to 0$.

(ii)下面来处理等式(1)右边的第一个级数：
$\sum\limits_{n=1}^{m(p+q)}a_n=\sum\limits_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}$.由于$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$其中$\gamma$是$Euler$常数.因此
$\sum\limits_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{mq}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\ln(mq)+\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)$.
$\sum\limits_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{2mp}\frac{1}{n}-\sum\limits_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n}=\ln(2mp)+\gamma-\frac{1}{2}\ln(mp)-\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln(mp)+\frac{1}{2}\gamma+O\left(\frac{1}{m}\right)$.
因此 $\sum\limits_{n=1}^{m(p+q)}a_n=\sum\limits_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+O\left(\frac{1}{m}\right)$.
令等式(1)中的$N\to\infty$可得$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}a_n=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{mp}\frac{1}{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{mq}\frac{1}{2n}\right)=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.
于是可知新级数收敛,且它的和为$\ln 2+[\ln(p/q)]/2$.

Corollary 4.4

当$p=q=1$时$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\ln 2$.
当$p=1,q=2$时$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{\ln 2}{2}$.

Problem 4.17

设$\alpha > 0$.证明：级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$收玫,这里$\displaystyle\binom{\alpha}{0}=1,\quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Proof 因为$\displaystyle\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|/\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\frac{|\alpha-n|}{n-\alpha}\to 1\quad (n\to\infty)$,所以由$D'Alembert$判别法不能判断它的玫散性.

现在用$Raabe$判别法.因为

$$n\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right|/\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|-1\right)=n\left(\frac{n+1}{n-\alpha}-1\right)=\frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}\to 1+\alpha>1.$$

所以$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|<+\infty$.

Problem 4.18

设$p>0,q>0$.当p,q取何值时,级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}$收敛?

Proof 用$Rabbe$判别法.因为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left(1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\frac{q}{n}+\frac{1-p}{n+p}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

此时$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\to q+p-1\,(n\to\infty)$

所以原级数当$q>p$时收玫,当$q<p$时发散,当$q=p$时无法判断.

此时当$q=p$时我们采用$Gauss$判别法来判断

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q=\left(1+\frac{1-p}{n+p}\right)\left(1+\frac{p}{n}+\frac{p\,(p-1)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=1+\frac{p}{n}+\frac{1-p}{n+p}+\frac{p\,(p-1)}{2}\frac{1}{n^2}+\frac{p\,(1-p)}{n\,(n+p)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

所以$\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1-\dfrac{1}{n}\right)n\ln n\to 0$所以发散

故$q>p$时收玫,当$q\leqslant p$时发散

Problem 4.19

研究超几何级数$\displaystyle F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$的收玫性,这里$\alpha,\beta,\gamma,x$都是正数.

Proof 因为$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x=x$

故由$D'Alembert$判别法知,当$x<1$时原级数收玫;当$x>1$时原级数发散.

当$x=1$时,由$D'Alembert$判别法不能判断.用$Raabe$判别法：

因为$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\gamma-\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1+\gamma-\beta-\alpha,$

故当$\gamma>\beta+\alpha$时原级数收玫,当$\gamma<\beta+\alpha$时原级数发散.

当$\gamma=\alpha+\beta$时,由$Raabe$判别法也无法判断,这时必须用更精细的判别法来判断.

当$x=1$且$\gamma=\alpha+\beta$用$Gauss$判别法此时

$$n\ln n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1-\frac{1}{n}\right)=\frac{[(\gamma-\alpha\beta-\alpha-\beta)\,n-\alpha\beta]\ln n}{(\alpha+n)\,(\beta+n)}\to 0\,(n\to\infty)$$

故当$x=1$且$\gamma=\alpha+\beta$发散了

$$\text{综上}F(\alpha,\beta,\gamma,x)\text{当}\begin{cases}x<1\text{收敛},x>1\text{发散}\\x=1\text{时},\gamma>\alpha+\beta\text{收敛}\\x=1\text{时},\gamma\leqslant\alpha+\beta\text{发散}\end{cases}$$

Proposition 4.15

讨论a,b,c取何值时，级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^b(\ln n)^c}$绝对收敛、条件收敛、发散.

$$\begin{cases} 0\leqslant |a|<1 & \text{绝对收敛} \\ |a|=1\text{且}b>1 & \text{绝对收敛} \\ |a|=1\text{且}b=1\text{且}c>1 & \text{绝对收敛} \\ a=-1\text{且}b=1\text{且}c\leqslant 1 & \text{条件收敛} \\ a=-1\text{且}0<b<1 & \text{条件收敛} \\ a=-1\text{且}b=0\text{且}c>0 & \text{条件收敛} \end{cases} \quad \text{其余情况均发散}$$

Proof 为了方便, 记$a_n=\dfrac{a^n}{n^b(\ln n)^c}$

***Part*1**

当$a=0$时, 级数显然收敛且绝对收敛.

当$a\neq 0$时, 注意到$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}|a|\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^b\left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^c=|a|$.那么有如下：

1.当$0<|a|<1$时, 级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}|a_n|$收玫 (即绝对收敛)

2.当$|a|>1$时, 有$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$, 因此级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n$发散.

3.当$|a|=1$时, 我们来进一步判断

***Part*2**

当$a=1$时, 有$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^b(\ln n)^c}$ (为正项级数)

1.若$b<1$, 任取正数$r\in(b,1)$, 由于$\lim\limits_{n\to\infty}n^r\cdot\dfrac{1}{n^b(\ln n)^c}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{r-b}}{(\ln n)^c}=+\infty$.由比较原则可知$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n$发散.

2.若$b>1$, 任取$p\in(1,b)$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}n^p\cdot\dfrac{1}{n^b(\ln n)^c}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{b-p}(\ln n)^c}=0$.由比较原则可知$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n$收敛 (绝对收敛).

3.若$b=1$, $\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^c}$由积分判别法知道$\begin{cases} c>1 & \text{收敛 (绝对收敛)} \\ c\leqslant 1 & \text{发散} \end{cases}$

***Part*3**

当$a=-1$时, $\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^b(\ln n)^c}$

根据$Part2$我们可以加上绝对值有

1.若$b>1$, 是绝对收敛的

2.若$b=1$此时$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(\ln n)^c}$

若$c>1$由$Part2$知道绝对收敛， 若$c\leqslant 1$由$Part2$知道加上绝对值发散, 但是同时有狄利克雷判别法知道收敛, 故为条件收敛

3.当$b<1$时由$Part2$知道加上绝对值是发散的, 我们来看是否可能会有条件收敛的情形

$0<b<1$此时$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^b(\ln n)^c}$, 由狄利克雷判别法知道收敛故为条件收敛

4.当$b=0$时, 此时$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(\ln n)^c}$, 故当$c>0$时为条件收敛, 当$c\leqslant 0$时为发散

5.当$b<0$时, 此时$\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n^{-b}}{(\ln n)^c}$那么当$n\to+\infty$时通项不趋于0, 故发散

综上

$$\begin{cases} 0 \leqslant |a| < 1 & \text{绝对收敛} \\ |a| = 1\text{且}b > 1 & \text{绝对收敛} \\ |a| = 1\text{且}b = 1\text{且}c > 1 & \text{绝对收敛} \\ a = -1\text{且}b = 1\text{且}c \leqslant 1 & \text{条件收敛} \\ a = -1\text{且}0 < b < 1 & \text{条件收敛} \\ a = -1\text{且}b = 0\text{且}c > 0 & \text{条件收敛} \end{cases} \quad \text{其余情况均发散}$$

Example 4.12 正项级数柯西判别法能判断但比值判别法失效的例子

判断以下级数的敛散性 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$

Proof 设原级数的通项为 $\{a_n\}$.

法一由于 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2 + (-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$.由正项级数的$Cauchy$根值判别法可知原级数收敛.

法二由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/2^{2n}}{1/2^{2n-1}} = \frac{3}{2}$. $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/2^{2n+1}}{3/2^{2m}} = \frac{1}{6}$.

因此 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2}$, $\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{6}$.

故此时正项级数的$D'Alembert$比值判别法无法判断原级数收敛.

Example 4.13 正项级数收敛不一定能与调和级数作比较

设$\sum u_n$为收玫的正项级数,能否存在一个正数ε,使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} = c > 0$.

Proof 不一定.若取收敛级数 $\sum \frac{1}{n^n}$, 则$\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^n}}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n-1-\varepsilon}} = 0$。但是取$u_n = \frac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 1$即可

Proposition 4.16 ($duBois - Reymond$定理)

对于任一收玫的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 总存在另一个收玫的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 使得$a_n = o(b_n)$.

Proof 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.设部分和为$S_n = a_1 + \cdots + a_n$, $S_0 = 0$.

令$\beta_n = S - S_{n-1}$.令$b_n = \sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n+1}}$.

由于 $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{\beta_k} - \sqrt{\beta_{k+1}}\right) = \sqrt{\beta_1} - \sqrt{\beta_{n+1}} = \sqrt{S} - \sqrt{S - S_n} \leq \sqrt{S}$.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也是一个收敛的正项级数.由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n+1}}} = \frac{\beta_n - \beta_{n+1}}{\sqrt{\beta_n} - \sqrt{\beta_{n+1}}} = \sqrt{\beta_n} + \sqrt{\beta_{n+1}} = 0$.

于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$就是满足要求的正项级数.

Theorem 4.1.39

(1)设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，记$R_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$(余项)，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}$的收敛性

(2)设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$(前$n$项和)，讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$的收敛性

Proof (1)由正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可知$\{R_n\}$单调递减趋近于零.下面对$p$分情况讨论：

(i)当$p\le 0$时，显然存在$N>0$，使得$n>N$时，有$\frac{a_n}{R_n^p}\le a_n$，由比较原则可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}$收敛.

(ii)当$0<p<1$时，记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$，注意到$a_k=R_k-R_{k+1}$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{R_k^p}=\sum_{k=1}^{n}\int_{R_{k+1}}^{R_k}\frac{1}{R_k^p}\mathrm{d}x\le\sum_{k=1}^{n}\int_{R_{k+1}}^{R_k}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\le\int_0^S\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<+\infty.$$

即正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}$的部分和有上界，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}$收敛.

(iii)当$p\ge 1$时，显然当n充分大时成立$\frac{a_n}{R_n^p}\ge\frac{a_n}{R_n}$，下面利用柯西准则证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n}$发散(这样再由比较原则即可)：

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意的正整数$N>0$，取$n_0=N+1>N$，由$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$可知$\lim\limits_{p\to\infty}\frac{R_{n_0+p+1}}{R_{n_0+1}}=0$，所以存在正整数$p_0$使得$\frac{R_{n_0+p_0+1}}{R_{n_0+1}}<\frac{1}{2}$

于是

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{a_k}{R_k}\ge\frac{1}{R_{n_0+1}}\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}a_k=\frac{R_{n_0+1}-R_{n_0+p_0+1}}{R_{n_0+1}}=1-\frac{R_{n_0+p_0+1}}{R_{n_0+1}}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

由柯西准则可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n}$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{R_n^p}$也发散.

(2)由正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散可知$\{S_n\}$单调递增趋近于$+\infty$.下面对$p$分情况讨论：

(i)当$p\le 0$时，显然存在$N>0$，使得$n>N$时，有$\frac{a_n}{S_n^p}\ge a_n$，由比较原则可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$发散.

(ii)当$0<p\le 1$时，显然$\frac{a_n}{S_n^p}\ge\frac{a_n}{S_n}$，下面用柯西准则证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散(这样由比较原则就知道级数发散)：

取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对$\forall N>0$，取$n_0=N+1>N$，由$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$可知$\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{S_{n_0}}{S_{n_0+p}}=0$，所以存在正整数$p_0$使得$\frac{S_{n_0}}{S_{n_0+p_0}}<\frac{1}{2}$

于是

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{S_{n_0+p_0}}\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p_0}a_k=\frac{S_{n_0+p_0}-S_{n_0}}{S_{n_0+p_0}}=1-\frac{S_{n_0}}{S_{n_0+p_0}}>\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

由柯西准则可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^p}$也发散.

(iii)当$p>1$时，注意到$a_k=S_k-S_{k-1}(k\ge 2)$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^p}=\frac{a_1}{S_1^p}+\sum_{k=2}^{n}\int_{S_{k-1}}^{S_k}\frac{1}{S_k^p}\mathrm{d}x\le\frac{1}{a_1^{p-1}}+\sum_{k=2}^{n}\int_{S_{k-1}}^{S_k}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\le\frac{1}{a_1^{p-1}}+\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<+\infty.$$

即正项级数$\sum\limits_{\infty}\frac{a_n}{S_p^p}$的部分和有上界，从而$\sum\limits_{\infty}\frac{a_n}{S_p^p}$收玫.

Corollary 4.5

这说明收敛级数没有最大的级数，发散级数也没有最小的

Theorem 4.1.40

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.(\forall\{a_n\}>0)$$

Proof 根据柯西施瓦茨不等式有 $(1+2+\cdots+n)^2\leqslant\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(\frac{1^2}{a_1^2}+\frac{2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{n^2}{a_n^2}\right)$

$$\Longrightarrow\frac{2n+1}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant\frac{4(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k^2}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\frac{k^2}{a_k^2}=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{a_k^2}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}$

进而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}.$

那么对于一个任意的 $\{b_n\}$ 正数列我们只要令 $a_1^2=b_1$ 即可 □

Proposition 4.17

设 $a_n>0,\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty,\alpha>0,\beta>0$ 且 $\alpha+\beta>1$.证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}<+\infty$

Proof 这是因为通过杨不等式可得 $\frac{a_n^{\alpha}}{n^{\beta}}=\frac{a_n^{\alpha}}{\left(n^{\beta/(1-\alpha)}\right)^{1-\alpha}}\leqslant\alpha a_n+(1-\alpha)\frac{1}{n^{\beta/(1-\alpha)}}.$

易知后面两个级数都是收敛的所以得到即可

Proposition 4.18 (级数收敛下的数列加权平均趋于零)

1.设 $\{b_n\}$ 是递增的趋于 $+\infty$ 的正数列.如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收玫,试证：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_n}=0$

2.设 $\{b_n\}$ 递减趋于0,且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收玫.证明：$\lim_{n\to\infty}\left(a_1+\cdots+a_n\right)b_n=0.$

Proof 证明第一个式子

$$\frac{1}{b_N}\sum_{i=1}^{N}a_ib_i=\left(b_NA_N-\sum_{i=1}^{N-1}A_i\left(b_{i+1}-b_i\right)\right)\frac{1}{b_N}=A_N-\sum_{i=1}^{N-1}A_i\left(b_{i+1}-b_i\right)/b_N$$

令 $N\to\infty$,对于后半部分 $\sum_{i=1}^{N-1}A_i\left(b_{i+1}-b_i\right)/b_N$ 利用 $Stolz$ 定理我们立马知道 $\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N-1}A_i\left(b_{i+1}-b_i\right)/b_N=\lim_{N\to\infty}A_N$

所以 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{b_N}\sum_{i=1}^{N}a_ib_i=\lim_{N\to\infty}A_N-A_N=0$

证毕

而对于第二个式子我们只需令 $b_n^*=\frac{1}{b_n}\quad a_n^*=a_nb_n$ 即可就利用第一个式子即可

Corollary 4.6 (级数收敛的下标加权平均趋于零)

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$ 收敛.证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.(提示：用 $Abel$ 分部求和公式.)

Proof 第一个想法是是否能够利用 $Stolz$ 定理但是此时利用定理得到的是 na_n,难道我们有 $na_n\to 0$ 吗

实际上这是不一定的可以看由柯西收敛准则导出的正项数列单调递减的收敛级数 $\sum a_n$ 有 $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$

但其逆命题不一定

我们利用$Abel$求和公式我们有$\sum\limits_{i=1}^{n} ia_i = nS_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} S_i$其中$S_i = a_1 + \cdots + a_i$

此时$LHS = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(nS_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} S_i\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1} S_i\right)$

此时$\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1} S_i$我们再利用$Stolz$定理得到$\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1} S_i \to S\ (n\to\infty)$

故$LHS = 0$

4.2 函数项级数

4.2.1 函数列

Definition 4.6

函数列$f_1, f_2 \cdots f_n \cdots$在某点确定的$x$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$存在我们称$x$为收敛点。收敛点的集合为收敛域
且此时在收敛域中给一个x就有一个极限值与之对应且是唯一的（极限唯一性）那么构成了一个函数
我们称之为极限函数记为$f(x)$.其求法就是令$n\to\infty$然后求即可

Definition 4.7

若函数列$f_1, f_2 \cdots f_n$有极限函数$f(x)$；我们称$\{f_n\}$一致收敛到$f \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0; \forall n > N; \forall x \in \chi$; 有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。记作$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$
若针对任意闭区间$[a, b] \subset I, \{f_n\}$在$[a, b]$上一致收敛于$f$, 则称$\{f_n\}$在$I$上内闭一致收敛于$f$. 特别的，若 I 区间为有界闭区间那么内闭一致收敛等价与一致收敛了

Definition 4.8 (一致有界)

设I上的函数列$\{f_n\}$.若存在$M > 0$对于任一$x \in I$都有$|f_n(x)| \le M, \quad n = 1, 2, \cdots$
则称该函数列在I上一致有界$(uniformly-bounded)$.

Theorem 4.2.1 (函数列一致收敛柯西收敛准则)

函数列$\{f_n\}$在数集D上一致收敛的
$\Leftrightarrow$ 对任给正数ε, 总存在正数N, 使得当$n, m > N$时, 对一切$x \in D$, 都有$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Proof 证 [必要性] 设$f_n(x) \longrightarrow f(x)(n \to \infty), x \in D$, 则$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$时, $\forall x \in D$, 都有$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$于是当$n, m > N$, 有
$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
[充分性] 若条件成立, 由数列收敛的柯西准则, $\{f_n\}$在D上任一点都收敛, 记其极限函数为$f(x), x \in D$.现固定n, 让$m \to \infty$
于是当$n > N$时, 对一切$x \in D$, 都有$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.由定义, $f_n(x) \longrightarrow f(x)(n \to \infty), x \in D$.

相比于柯西收敛准则。若我们能够事先求出极限函数我们也可根据下列定理来判断是否一致收敛到该极限函数

Theorem 4.2.2

设I上的函数列$\{f_n\}$.令$d(f_n, f) := \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|, \quad n = 1, 2, \cdots$.则以下三个命题等价：
1° $\{f_n\}$在I上一致收敛于f.
$2^\circ d(f_n, f) \to 0(n \to \infty)$.
3°对于任一数列$\{x_n\} \subseteq I$都有$f_n(x_n) - f(x_n) \to 0(n \to \infty)$.

Proof $(i)1^\circ \Rightarrow 2^\circ$.若$f_n \rightrightarrows$ 在I上一致收敛于f, 则$\forall \varepsilon > 0$都$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$使得当$n > N_\varepsilon$时, $\forall x \in I$都有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
这表明$d(f_n, f) = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$.于是可知$d(f_n, f) \to 0$.
$(ii)2^\circ \Rightarrow 3^\circ$.对于任一数列$\{x_n\} \subseteq I$都有$|f_n(x_n) - f(x_n)| \le d(f_n, f)$.由于$d(f_n, f) \to 0$, 故$f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.
$(iii)3^\circ \Rightarrow 1^\circ$.
用反证法, 假设1°不成立, 即对于某个$\varepsilon_0 > 0$, 存在$n_k \in \mathbb{N}^*(n_{k+1} > n_k), x_{n_k} \in I(k = 1, 2, \cdots)$使得$\left|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\right| \ge \varepsilon_0$.
对于$i \in \mathbb{N}^* \setminus \{n_k\}$, 随便选取$x_i \in I$.这样就得到了一个数列$\{x_n\}$它有一个子列$\{x_{n_k}\}$满足不等式
因此3°不成立.因此假设不成立.于是就证明了$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$.

$d(f, f_n)$ 可以看作是函数的一种距离.
用证明函数列一致收玫时,用2°较方便,反之证明函数列不一致收玫时,用3°更方便.

Theorem 4.2.3

(1)若$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in I$, 且$f$在$I$上有界, 则 $\{f_n\}$ 至多除有限项外在I上一致有界的
(2)若$f_n(x) \rightrightarrows f(x)(n \to \infty), x \in I$, 且对每个正整数$n$, f_n在I上有界, 则 $\{f_n\}$ 在I上一致有界.

Proof (1) $\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0, \forall n > N; \forall x \in I$; 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$; 且 $|f| \leqslant M$
特别的取$\varepsilon = 1$; 则$\forall x$有 $|f_n(x)| < M + 1$
所以至多除去前面N项，剩下的 $\{f_n\}$ 在I上均是一致有界的
(2) $\forall \varepsilon > 0; \exists N > 0, \forall n > N; \forall x \in I$; 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
特别的取$n = N + 1; \varepsilon = 1$则$\forall x, |f(x)| < |f_{N+1}(x)| + 1$又对这个$N + 1$由题$f_{N+1}$有界
$\Rightarrow |f(x)|$ 有界的
回到 (1) 得到 $\{f_n\}$ 从第$N + 1$项起是一致有界的。题目，对每一个n, f_n都有界
这就可以找到一个最大的界覆盖住，从而一致有界

Theorem 4.2.4

函数项级数 $\sum u_n(x)$在D上一致收敛到$S(x)$.函数$g(x)$ 在D上有界.
$Prove$: $\sum g(x) u_n(x)$在D上一致收敛到$g(x) S(x)$

Proof $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N. \forall x \in D$ $st.$ $\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$
$\Rightarrow \forall x \in D. \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) g(x) - g(x) S(x)\right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \Rightarrow \sum g(x) u_n(x)$在$D$上一致收敛到$g(x) S(x)$

Proposition 4.19

设函数列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在区间I上一致收敛.
如果对每个$n = 1, 2, \cdots$, f_n和g_n都是I上的有界函数 (不要求一致有界)
证明 : $\{f_n g_n\}$ 在I上必一致收玫.

Proof 设 $\{f_n\}$ 的极限函数是f
那么$\exists N > 0$使得当$n \geqslant N$时对$\forall x \in I$都有 $|f_n(x) - f(x)| < 1$.
于是$|f(x)| < |f_N(x)| + 1 \leqslant M + 1$, 其中$M$是$f_N$的一个上界.因此$f$也是有界的.
同理, $\{g_n\}$ 的极限函数g也是有界的.
当$n \geqslant N$时也有 $|f_n(x)| \leqslant |f(x)| + 1 \leqslant M + 2$.
由此可见 $\{f_n\}$ 是一致有界的, 用M'表示它们和f, g共同的界.
$\forall \varepsilon > 0$, 存在$N > 0$使得当$n > N$时对一切的$x \in I$都有 $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M'}, |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M'}$.
于是 $|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leqslant |f_n(x)| |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
因此 $\{f_n g_n\}$ 在I上一致收敛, 且极限函数就是fg.

注 如果去掉中f_n和g_n有界的条件, 结论是否还成立?试举例说明之.
Proof 一般不成立.比如在区间 $(0, 1)$上, 取$f_n(x) = \frac{1}{x}, g_n(x) = \frac{1}{n + \frac{1}{x}}$, 那么 $\{f_n\}$ 当然是一致收玫的
由$1/(n + 1/x) < 1/n$知 $\{g_n\}$ 也是一致收玫的.但是不难验证 $\{f_n g_n\}$ 不是一致收玫的.

4.2.2 函数项级数

Definition 4.9

设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 E 上的一个函数列, 表达式 $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ ， $x\in E$ 称为定义在 E 上的函数项级数简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\sum u_n(x)$. 称 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$， $x\in E$， $n=1,2,\cdots$ 为函数项级数的部分和函数列.

若针对某个确定的 x_0，有 $u_1(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$ 收敛亦即 $S_n(x_0)$ 当 $n\to\infty$ 极限存在，称之为在 x_0 级数收敛

所有收敛点的集合为收敛域。同理，在收敛域上有一个极限函数，用和函数来称呼它，记为 $S(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$

若 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛到 $S(x)$; 我们称级数 $\sum u_n(x)\rightrightarrows S(x)$; 若 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上任意闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛,

称级数 $\sum u_n(x)$ 在 I 上内闭一致收敛

称 $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ 为函数项级数 $\sum u_n(x)$ 的余项

Theorem 4.2.5 (函数项级数柯西收敛准则)

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$ 时, $\forall x\in D$ 和一切正整数 p, 都有 $\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$ 或 $\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$.

Theorem 4.2.6 (函数项级数收敛必要条件)

令上述 p=1；由柯西收敛准则，得到函数项级数收敛的必要条件:$\{u_n(x)\}$ 函数列 $\rightrightarrows 0$

Theorem 4.2.7 (余项准则)

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|R_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0$.

函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上不一致收玫于 $S(x)$ 的 $\Leftrightarrow$ 存在数列 $\{x_n\}\subset D$, 使 $|R_n(x_n)|\nrightarrow 0(n\to\infty)$.

性质 若级数 $\sum u_n(x)$ 在域 X 中一致收敛, 它的所有的项都乘上同一个在 X 中有界的函数 $v(x)$: $|v(x)|\leqslant M$ 则一致收敛性不变. 且收敛到 $v_(x)S(x)$

性质 I 上的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 I 上一致收敛. $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 也一致收敛

下面我们给出一个非常重要的函数级数: 几何级数

Problem 4.20 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数项级数 $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 的部分和函数为 $S_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}$.

当 $|x|<1$ 时, $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$. 所以几何级数在 $(-1,1)$ 内收玫于和函数 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$

当 $|x|\geqslant 1$ 时, 几何级数是发散的.

我们再来看级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, 若仅在 $[-a,a](a<1)$ 上讨论, 则由

$$\sup_{x\in[-a,a]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[-a,a]}\left|\frac{-x^n}{1-x}\right|=\frac{a^n}{1-a}\to 0\quad(n\to\infty)$$ 可得级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $[-a,a]$ 上一致收玫.

若在 $(-1,1)$ 上讨论这个级数, 则令 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$, ∴ 由 $R_n(x_n)=\left|\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\right|/\left|1-\dfrac{n}{n+1}\right|=n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n-1}\to+\infty\quad(n\to\infty)$

知道级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 内不一致收敛. 但级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收玫.

4.2.3 函数项级数的一般判别法

Theorem 4.2.8 (魏尔斯特拉斯判别法, 优级数判别法)

设函数项级数 $\sum u_n(x)$ 定义在数集 D 上, $\sum M_n$ 为收玫的正项级数

若对一切 $x \in D$, 有 $|u_n(x)| \leqslant M_n, \quad n = 1, 2, \cdots$, 则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收玫.

更一般的上述条件可以当 n 充分大时成立即可

Proof 证由假设正项级数 $\sum M_n$ 收玫, 根据数项级数的柯西准则, 任给正数 ε, 存在某正整数 N, 使得当 $n > N$ 及任何正整数 p, 有 $\left|M_{n+1} + \cdots + M_{n+p}\right| = M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \varepsilon$. 又由式, 对一切 $x \in D$ 有

$\left|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| + \cdots + \left|u_{n+p}(x)\right| \leqslant M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \varepsilon$.

根据函数项级数一致收玫的柯西准则, 级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

注

不难看出, $Weierstrass$ 判别法条件太强. 满足 $Weierstrass$ 判别法条件的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 不仅一致收敛且绝对收敛, 而且它的绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. 也一致收敛这就有可能导致 $\sum u_n(x)$ 虽一致收敛但是 $\sum |u_n(x)|$ 发散。

或者 $\sum u_n(x)$ 虽一致收敛， $\sum |u_n(x)|$ 但为逐点收敛

接下来我们考虑形如 $\sum u_n(x) v_n(x)$ 的级数收敛性

Theorem 4.2.9 (阿贝尔判别法)

设 $(i) \sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛

(ii) 对于每一个 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的

(iii) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界, 即存在正数 M, 使得对一切 $x \in I$ 和正整数 n, 有 $|v_n(x)| \leqslant M$

$\Rightarrow$ 则级数 $\sum u_n(x) v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

Proof 由 (i), 任给 $\varepsilon > 0$, 存在某正数 N, 使得当 $n > N$ 及任何正整数 p, 对一切 $x \in I$, 有 $\left|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$.

由 (iii) 设 $|v_n(x)| \leqslant M$

设 $\sigma_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_k(x)$

由 $Abel$ 变换我们得到: $\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) v_i(x) = v_{n+p}(x)\, \sigma_{n+p}(x) - \sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1} (v_{i+1}(x) - v_i(x)) \sigma_i(x)$

所以 $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) v_i(x)\right| \leqslant v_{n+p}(x)\,\varepsilon + \varepsilon \sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1} |v_{i+1}(x) - v_i(x)| \underbrace{\leqslant M\varepsilon + \varepsilon \left|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)\right|}_{\text{因为单调所以绝对值里面都是同号}} \leqslant 3M\varepsilon$

Theorem 4.2.10 (狄利克雷判别法)

设 $(i) \sum u_n(x)$ 的部分和函数列 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$ 在 I 上一致有界

(ii) 对于每一个 $x \in I$, $\{v_n(x)\}$ 是单调的

(iii) 在 I 上 $v_n(x) \rightrightarrows 0 (n \to \infty)$

$\Rightarrow$ 则级数 $\sum u_n(x)\, v_n(x)$ 在 I 上一致收玫.

Proof 由 (i) 不防设 $|S_n(x)| \leqslant M$ 对于 $\forall x$ 均成立

设 $\sigma_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_k(x)$

由$Abel$变换我们得到：$\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)v_i(x) = v_{n+p}(x)\sigma_{n+p}(x) - \sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1}(v_{i+1}(x) - v_i(x))\sigma_i(x)$

所以 $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)v_i(x)\right| \leqslant \left|v_{n+p}(x)\right|\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| + \sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1}\left|v_{i+1}(x) - v_i(x)\right|\left|S_i(x) - S_n(x)\right|$

所以 $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)v_i(x)\right| \underbrace{\leqslant 2M\left|v_{n+p}(x)\right| + 2M\underbrace{\left|v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)\right|}_{\text{因为单调绝对值里同号}} \leqslant 6M\varepsilon}_{\text{因为}v_n(x)\text{一致收敛到}0}$

Example 4.14 以下函数项级数在 $[\delta, 2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$上一致收敛，但不绝对收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$

Proof (i)令$f_n(x) = \cos nx, g_n(x) = 1/n$.则$g_n(x)$递减一致趋于零.当$x\in[\delta, 2\pi-\delta]$时
$\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leq \left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1} \leq \left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{-1}$.

因此$\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$在 $[\delta, 2\pi-\delta]$上一致有界.由$Dirichlet$判别法可知原级数一致收敛.

(ii)由于$\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos kx}{k}\right| \geq \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\cos^2 kx}{k} = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{\cos 2kx}{k}\right)$.当$x\in[\delta, 2\pi-\delta]$时

由数项级数Dir判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.因此以上不等式最右边的部分和发散.于是可知原级数不绝对收敛.

Example 4.15 设函数列$a_n(x) = (-1)^n x^n(1-x), \quad n = 1, 2, \cdots$
则函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$在 $[0,1]$上绝对收敛且一致收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$在 $[0,1]$上不一致收敛

Proof (i)当$x=0$或1时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$显然收敛.当$x\in(0,1)$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x) = (1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n = x$

于是可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在 $[0,1]$上绝对收敛

(ii)令$f_n(x) = (-1)^n, g_n(x) = x^n(1-x)(n=1,2,\cdots)$.显然$\sum\limits_{n=1}^{n} f_n(x)$一致有界

下面来证明$g_n(x)$一致趋于零.求导得$g_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}[n-(n+1)x]$.令$g_n'(x) = 0$得$x=0$或$n/(n+1)$

容易知道当$x = n/(n+1)$时$g_n(x)$在闭区间 $[0,1]$上取到最大值.于是$g_n(x) \leq g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(1+1/n)^n}\cdot\frac{1}{n+1} \to 0$

因此$g_n(x)$一致趋于零.由$Dirichlet$判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在 $[0,1]$上一致收敛

(iii)容易看出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$在 $[0,1]$上的和函数为$S(x) = \begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$

令$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$的部分和函数列$S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}x^k(1-x) = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n}x^k = x - x^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots$

由于$\left|S_n\left(2^{-\frac{1}{n+1}}\right) - S\left(2^{-\frac{1}{n+1}}\right)\right| = \left|2^{-\frac{1}{n+1}} - 2^{-1} - 2^{-\frac{1}{n+1}}\right| = \frac{1}{2}$.于是可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$在 $[0,1]$上不一致收敛

Note 上述两个例子就表现了 Weierstrass 判别法的局限和反例

Proposition 4.20 (函数列与函数项级数的端点法)

1. $\{f_n(x)\}$ 在 (a,b)上一致收敛, 且每个$f_n(x)$在 $[a,b)$上连续, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b)$上一致收敛, 特别地, 数列 $\{f_n(a)\}$ 也收敛.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 (a,b)上一致收敛, $u_n(x)$在 $[a,b)$上连续, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $[a,b)$上一致收敛.特别地, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$也收敛.

逆否形式：

若 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b)$ 上收敛, 但是 $\{f_n(b)\}$ 发散那么 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛

设 $\{u_n(x)\}$ 是 $[a,b]$上的连续函数列.若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $[a,b)$内的每一点收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $[a,b)$上不一致收敛.

Proof 1.由题：$\forall \varepsilon>0, \exists N>0$, 此时当$n,m \geqslant N$时$\forall x \in (a,b)$ 都成立 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

令$x \to a^+$得到 $|f_n(a)-f_m(a)|<\varepsilon$

这也说明了：当$n,m \geqslant N$时$\forall x \in [a,b)$ 都成立 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$

$\Longrightarrow \{f_n(x)\}$ 在 $[a,b)$上一致收敛

2.同理

3.与4.可以利用1.2.的逆否命题得到我们在此再给出一个证明

假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$在 $[a,b)$上一致收玫

那么对任意的$\varepsilon>0$, 存在$N>0$使得当$m \geqslant N$时对任意的$p>1$和$x \in [a,b)$都有$\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} u_n(x)\right|<\varepsilon$.

利用$u_n(x)$的连续性就有$\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} u_n(b)\right| = \lim\limits_{x \to b^-}\left|\sum\limits_{n=m+1}^{m+p} u_n(x)\right| \leqslant \varepsilon$, 这与$\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(b)$发散矛盾!

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$在 $[a,b)$上不一致收玫.

Problem 4.21

证明：级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n \ln n}$在 $(0,\pi]$上不一致收敛.

Proof 利用上述命题即可

Proposition 4.21

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间I上有定义, 且满足 $|f_1(x)| \le M, \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k(x)-f_{k+1}(x)| \le M$

证明：若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$在区间$I$上一致收敛.

Proof 一方面, $\forall \varepsilon>0$, 由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$可知存在$N>0$, 使得对任意的$n>N$及正整数$k$, 都有 $|A_{n+k}| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| < \varepsilon$.

另一方面, 由 $|f_1(x)| \le M, \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k(x)-f_{k+1}(x)| \le M$可知对任意的正整数$n,m$, 都有 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |f_k(x)-f_{k+1}(x)| \le M$, 且

$|f_{n+m}(x)| = \left|f_1(x) - \sum\limits_{k=1}^{n+m-1} [f_k(x)-f_{k+1}(x)]\right| \le 2M$.

于是对上述$\varepsilon>0$, 当$n>N$时, 对任意的正整数p及$x \in I$, 由阿贝尔变换公式可知

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+k}\left[f_k(x) - f_{k+1}(x)\right] + A_{n+p} f_{n+p}(x)\right| \\ &< \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left|f_k(x) - f_{k+1}(x)\right| + \varepsilon \left|f_{n+p}(x)\right| \\ &\leq \varepsilon \cdot M + \varepsilon \cdot 2M = 3M\varepsilon.\end{aligned}$$

由柯西准则可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$在区间$I$上一致收敛.

4.2.4 极限函数与和函数的连续换序

Theorem 4.2.11 (极限函数连续性定理)

设I上的函数列$\{f_n(x)\}$.若$f_n(n=1,2,\cdots)$都在I上连续,且$f_n \rightrightarrows f$(条件可以减弱到内闭一致收敛)

$\Rightarrow f$也在I上连续,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x), \quad \forall x_0 \in I$

Proof 由于$f_n \rightrightarrows f$,故$\forall\varepsilon>0$,可找到一个充分大的N $st.$对于任一$x\in I$都有$|f_N(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.
任取$x_0\in I$,由于f_N在I上连续,故对于以上给定的ε,存在$\delta>0$使得当$x\in I\cap N_\delta(x_0)$时$|f_N(x)-f_N(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$
于是当$x\in I\cap N_\delta(x_0)$时有
$|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$
于是可知f在x_0处连续,这表明f在I上连续

注 容易看到,以上证明实际上并没用足一致收玫这个条件.实际上只需找到一个与x无关的N就可以是上述定理成立
因此不难想到一致收玫不是极限函数连续的必要条件.

Theorem 4.2.12 (和函数的连续性定理)

设I上的函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

若$f_n(n=1,2,\cdots)$在I上都连续,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$(条件可以减弱到内闭一致收敛)

$\Rightarrow$ 则$S(x)$也在I上连续,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x), \quad \forall x_0\in I$

Proof 由于$f_n(n=1,2,\cdots)$在I上都连续,故$\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)(n=1,2,\cdots)$在$I$上都连续.由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$I$上一致收玫于$S(x)$
因此$S(x)$也在I上连续于是对于任一$x\in I$都有$\lim_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to x_0} S(x)=S(x_0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$

接下来我们稍作推广将定理推广,下面的定理即 $a_n=\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=f_n(x_0)$

Theorem 4.2.13 (极限函数 Moore-Osgood 定理)

设I上的函数列$\{f_n(x)\}$,x_0是I的一个极限点(x_0 未必属于 I).

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)=a_n\in\mathbb{R}, \quad n=1,2,\cdots$ 且$f_n \rightrightarrows f$(条件可以减弱到内闭一致收敛)

$\Rightarrow$ 则a_n收敛,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$

Proof (i)先证明a_n收敛
由于$f_n \rightrightarrows f$,由函数项级数的$Cauchy$收玫原理可知,$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^* st.\forall m,n>N$时$|f_m(x)-f_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x\in I$
令$x\to x_0$得$|a_m-a_n|\le\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$由数列的$Cauchy$收敛原理可知$a_n$收敛

(ii)设$a_n\to a$,由于$f_n \rightrightarrows f$,故对于任$-\varepsilon>0$,可找到一个充分大的N使得当$n>N$时都有 $\begin{array}{l}|f(x)-f_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x\in I\\ |a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{3}.\end{array}$

取定一个$n>N$.由于$\lim_{x\to x_0} f_n(x)=a_n$,故存在$\delta>0$使得当$x\in I\cap N_\delta(x_0)$就有$|f_n(x)-a_n|<\dfrac{\varepsilon}{3}$
于是当$x\in I\cap N_\delta(x_0)$时有$|f(x)-a|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-a_n|+|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$
于是可知f在x_0处连续,这表明f在I上连续.

Theorem 4.2.14 (和函数 Moore-Osgood 定理)

设I上的函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

若$\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}, \quad n = 1,2,\cdots$.且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$(条件可以减弱到内闭一致收敛)

$\Rightarrow$ 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$且$\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$

Proof (1)根据柯西收玫准则,

$\forall\varepsilon > 0$, 存在$N > 0$使得当$m > N$时对任意的正整数p都有$\left|u_{m+1}(x) + u_{m+2}(x) + \cdots + u_{m+p}(x)\right| < \varepsilon,\ \ \forall x \in E$.

于是$\left|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}\right| = \lim\limits_{x\to x_0}\left|u_{m+1}(x) + u_{m+2}(x) + \cdots + u_{m+p}(x)\right| \leqslant \varepsilon$.因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收玫.

(2)因为$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\right| + \sum\limits_{n=1}^{N}|u_n(x) - a_n| + \left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n\right|$

所以$\forall\varepsilon > 0$, 只要取N使得$\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}, x \in E$; $\quad\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

再取x_0的邻域$U(x_0)$使得当$x \in U(x_0)$时$|u_n(x) - a_n| < \varepsilon/(3N)$, 就有$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon, x \in U(x_0)$.

因此$\lim\limits_{E\ni x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Corollary 4.7

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$满足下列条件：

(a)反常积分$\displaystyle\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x(n = 1,2,\cdots)$收敛;

(b) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在区间$[a,b]$上$-$致收玫, 这里$b$是大于$a$的任何实数;

(c)级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,+\infty)$上一致收玫, 这里$f_n(x) = \displaystyle\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$.

证明：$\displaystyle\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x$和$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$都收玫, 而且$\displaystyle\int_a^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$.

Proof 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$, 而$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,+\infty)$上一致收玫, 所以根据和函数$Moore-Osgood$知

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$收玫.因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在每个$[a,b]$上一致收玫, 所以对每个$x > a$都有$\displaystyle\int_a^x\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$

就有$\displaystyle\int_a^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty} u_n(x)\mathrm{d}x$

Problem 4.22

设函数$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$.则$f$在$(0,+\infty)$上连续

Proof 在$(0,+\infty)$中任取一点x_0, 则一定存在δ, 满足$0 < \delta < x_0$.由可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$在$[\delta,+\infty)$上一致收玫.(因为其内闭一致收敛)

$\left(这是因为|ne^{-nx}| \leqslant \frac{n}{e^{n\delta}} \leqslant \frac{1}{n^2}当n充分大这是显然的\right)$
因此$f(x)$在x_0处连续.由于x_0是$(0,+\infty)$中的任意一点,于是可知$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续.

Problem 4.23 以下函数在$\mathbb{R}$上连续：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\ln n}\right)^n$

Proof
对于任一$M>0$, 当$|x|\le M$时$\left(\frac{|x|}{\ln n}\right)^n \le \left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$由于$\sqrt[n]{\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n}=\frac{M}{\ln n}\to 0$由正项级数的$Cauchy$根值判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{M}{\ln n}\right)^n$收敛
于是由$Weierstrass$判别法可知原级数在$[-M,M]$上一致收敛.因此$f(x)$在$[-M,M]$上连续
由于M是任一正数,于是可知$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续.

Note
1°：有了上述例子我们就知道定理的条件可以减弱到$\{f_n\}$在I上内闭一致收敛即可
2°：上述定理常常我们逆用，即$\{f_n\}$连续，极限函数$f\,(S)$不连续。$\Rightarrow f_n$一定不一致收敛到$f\,(\sum f_n$不一致收敛到$S)$

Note
我们进行另一方面的考虑
若I上的连续函数列$\{f_n\}$的极限函数f在I上连续,是否可以断言$\{f_n\}$一致收玫于f?一般这是不成立的,比较以下两个例子.

Example 4.16 Dini 定理的反例即函数列与极限函数都连续但是未必是一致收敛
设$(-1,1)$上的连续函数列$\{x^n\}$,它的极限函数是0,它在$(-1,1)$上连续.但$\{x^n\}$在$(-1,1)$上不一致收敛
设$[-1+\varepsilon,1-\varepsilon](0<\varepsilon<1)$上的连续函数列$\{x^n\}$收敛到0,此时$\{x^n\}$在$[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$上一致收敛.

Theorem 4.2.15 (函数列的 Dini 定理)
设有限闭区间$[a,b]$上逐点收敛的函数列$\{f_n\}$.
若1°$f_n(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续.
2°极限函数f在$[a,b]$上连续.
3°对于任意给定的$x\in[a,b]$,数列$\{f_n(x)\}$都是单调的
$\Rightarrow$ 则在$[a,b]$上$f_n\rightrightarrows f$.

Proof 令$\varphi_n(x)=f_n(x)-f(x),\quad n=1,2,\cdots$则
$(i)\varphi_n(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续
(ii)在$[a,b]$上$\varphi_n\to 0$
(iii)对于任意给定的$x\in[a,b]$,数列$\{\varphi_n(x)\}$都是单调的,不妨设$\{\varphi_n(x)\}$单调递减.
下面只需证明$\varphi_n\rightrightarrows 0$.由条件$(ii)$可知,对$\forall\varepsilon>0$与$\forall x_0\in[a,b]$都$\exists N_{x_0}$使得$0\le\varphi_{N_{x_0}}(x_0)-0<\frac{\varepsilon}{2}$
由于$\varphi_{N_{x_0}}$在x_0处连续,故$\exists\delta_{x_0}>0$使得当$x\in[a,b]\cap(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_{x_0})$时都有$0\le\varphi_{N_{x_0}}(x)-\varphi_{N_{x_0}}(x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow 0\leqslant\varphi_{N_{x_0}}(x)<\varepsilon$
令$C=\bigcup\limits_{x\in[a,b]}(x-\delta_x,x+\delta_x)$显然$C$是$[a,b]$的一个开覆盖
由$Heine-Borel$定理可知存在一个有限子覆盖$C'=\bigcup\limits_{i=1}^{m}(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})$
令$N=\max\{N_{x_1},N_{x_2},\cdots,N_{x_m}\}$.当$n\ge N$时,$\forall x\in[a,b]$,由于$C'$是$[a,b]$的一个开覆盖,故存在$(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})\ni x$。
因此$0\le\varphi_{N_i}(x)<\varepsilon$由于$n>N\ge N_{x_i}$,且数列$\{\varphi_n(x_i)\}$递减,因此$0\le\varphi_n(x)\le\varphi_{N_i}(x)<\varepsilon$
这表明在$[a,b]$上$\varphi\rightrightarrows 0$.

Theorem 4.2.16 (级数的 Dini 定理)

设有限闭区间 $[a,b]$上逐点收敛函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.若

$1^\circ f_n(n=1,2,\cdots)$在 $[a,b]$上连续.

2°和函数$S(x)$在 $[a,b]$上连续.

$3^\circ f_n(n=1,2,\cdots)$在 $[a,b]$定号

$\Rightarrow$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在 $[a,b]$上一致收敛.

Example 4.17 设函数列$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad n=1,2,\cdots$.则 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$上一致收敛.

Proof 容易知道 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$上逐点收敛到$f(x)=\mathrm{e}^x$.

法一对于给定的n, 令$g(x)=\mathrm{e}^x-f_n(x)$, 由于$g'(x)=\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}>0$.

故g单调递增.因此当$x\in[0,1]$时 $\mathrm{e}^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 0$于是可知 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$上一致收敛.

法二由于f和$f_n(n=1,2,\cdots)$都在有限闭区间 $[0,1]$上连续, 因为对于任一$x\in[0,1]$

数列 $\{f_n(x)\}$ 都是单调递增的, 由$Dini$定理可知 $\{f_n\}$ 在 $[0,1]$上一致收敛.

4.2.5 极限函数与和函数的积分换序

Theorem 4.2.17 (极限函数逐项积分定理)

若函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收玫, 且每一项都连续

则 $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$

Proof

设 f 为函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上的极限函数. 由极限函数连续性定理得 f 在 $[a,b]$ 上连续, 从而 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 与 f 在 $[a,b]$ 上都可积

因为在 $[a,b]$ 上 $f_n \rightrightarrows f(n\to\infty)$, 故对任给正数 ε, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in[a,b]$, 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

再根据定积分的性质, 当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

证毕

下面稍作推广，条件中的每一项连续太强了

Theorem 4.2.18 (极限函数积分换序定理)

设 $[a,b]$ 上的 $Riemann$ 可积函数列 $\{f_n\}$. 若在 $[a,b]$ 上 $f_n \rightrightarrows f$

则 f 也在 $[a,b]$ 上 $Riemann$ 可积, 且 $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$

Proof 在该定理中，我们进行比较就会发现，此定理因为改变了 $\{f_n\}$ 的连续条件, 因而最大的问题需要证 f 可积

为此我们考察 $\sum w_i^f \Delta x_i < \varepsilon$

$w_i^f = \sup\limits_{x',x''\in\Delta x_i} |f(x')-f(x'')|$ 　而 $|f(x')-f(x'')| \leqslant |f(x')-f_n(x')|+|f(x'')-f_n(x'')|+|f_n(x')-f_n(x'')|$

$\because f_n \rightrightarrows f$; 故 $\exists N>0, \forall n\geqslant N; \forall x.st. |f(x')-f_n(x')|<\varepsilon \quad |f(x'')-f_n(x'')|<\varepsilon$

为此我们确定 $n=N$ 此时根据条件存在分割 T $st. \sum |f_N(x')-f_N(x'')|\Delta x_i = \sum w_i^{f_N}\Delta x_i < \varepsilon$

得到 $|f(x')-f(x'')| < 2\varepsilon + |f_N(x')-f_N(x'')|$

$\Rightarrow \sum w_i^f \Delta x_i < 2\varepsilon(b-a)+\varepsilon$

至此说明了 f 是可积的。剩下的证明步骤同理

Proof

(i) 由于在 $[a,b]$ 上 $f_n \rightrightarrows f$, 故 $\exists N\in\mathbb{N}^*$ 对 $\forall x\in[a,b]$ 都满足 $|f(x)-f_N(x)|\leq 1$ 由于 f_N 在 $[a,b]$ 上 $Riemann$ 可积, 因此在 $[a,b]$ 上有界

故存在 $M>0$ 使得 $|f_N(x)|\leq M$. 于是 $|f(x)|\leq|f_N(x)|+1\leq M+1$

$\Rightarrow$ 因此 f 也在 $[a,b]$ 上有界

把 f 和 f_n 在 $[a,b]$ 上的不连续点的全体分别记作 $D(f)$ 和 $D(f_n)$ $(n=1,2,\cdots)$.

任取 $x_0\in D(f)$. 若 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 都在 x_0 处连续, 则 f 也在 x_0 处连续. 因此一定存在 f_i 在 x_0 处不连续, 即 $x_0\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D(f_n)$

因此 $D(f)\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D(f_n)$.

由于 f_n 在 $[a,b]$ 上 $Riemann$ 可积, 由 $Lebesgue$ 定理可知 $D(f_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是零测集.

因此 $D(f)$ 也是一个零测集. 由 $Lebesgue$ 定理可知 f 也在 $[a,b]$ 上 $Riemann$ 可积

(ii) 由于 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f, 故 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $n>N_\varepsilon$ 时, 对于 $\forall x\in[a,b]$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

于是 $\left|\int_a^b f_n(x) - \int_a^b f(x)\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$

于是可知 $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$

Theorem 4.2.19 (和函数积分换序定理)

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的每一项都在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$

$\Rightarrow$ 则 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积, 且 $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$

Example 4.18

设函数列 $\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$, 它虽然不一致收玫, 但 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b nx\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} nx\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$

容易知道函数列收玫到0. 设 $f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}$. 由于 $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{-1}$ 因此函数列不一致收敛

分别计算等式两边
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b nx\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-na} - \left(b+\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-nb} = 0,$$
$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} nx\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \int_a^b 0\ \mathrm{d}x = 0.$$

于是可知等式成立.

Note 通过这个例子我们知道我们上述讲述的条件并不是充要条件。必要性并不满足

Theorem 4.2.20 (*Arzelà* 控制收敛定理)

设 $[a,b]$ 上的 *Riemann* 可积函数列 $\{f_n\}$ 收敛于一个 *Riemann* 可积的函数 f. 若 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界

$\Rightarrow$ 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$

4.2.6 极限函数与和函数的微分换序

Theorem 4.2.21 (极限函数微分换序定理)

设 $[a,b]$ 上函数列 $\{f_n\}$. 若
(1) $f_n(n=1,2,\cdots)$ 连续可微.
(2) 在 $[a,b]$ 上 $f_n' \rightrightarrows \varphi$.
(3) 存在一点 x_0 使得 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛.
$\Rightarrow$ 则 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于连续可导的函数 f. 且对于任一 $x\in[a,b]$ 都满足 $\dfrac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d}{dx}f_n(x)$

Proof 由于数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛且 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 由 Cauchy 收敛原理可知
$\forall\varepsilon>0,\exists$ 充分大的 $N\in\mathbb{N}^*$ 使得当 $m,n>N$ 时 $|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\quad|f_n'(x)-f_m'(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$

由 Newton – Leibniz 公式可知, 对于任一 $x\in[a,b]$ 都有 $\begin{cases} f_n(x)=f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}f_n'(t)\mathrm{d}t \\ f_m(x)=f_m(x_0)+\int_{x_0}^{x}f_m'(t)\mathrm{d}t\end{cases}\quad(1)$

因此当 $m,n>N$ 时 $|f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x_0)-f_n(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x}[f_m'(t)-f_n'(t)]\mathrm{d}t\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}|x-x_0|<\varepsilon.$

由 Cauchy 收玫原理可知 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 设它的极限函数为 f. 由于 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 一致收玫于 φ

由极限函数逐项积分定理可知 $\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x}\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f_n'(x)\mathrm{d}x.$

于是令 (1) 的 $n\to\infty$ 可得 $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$

于是可知 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x_0)+\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x\right]=\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x).$

Theorem 4.2.22 (和函数微分换序定理)

设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$. 若
(1) $f_n(n=1,2,\cdots)$ 连续可导.
(2) 在 $[a,b]$ 上 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(x)\rightrightarrows\varphi(x)$.
(3) 存在一点 x_0 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x_0)$ 收敛.
$\Rightarrow$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于连续可导的函数 $S(x)$. 且对于任一 $x\in[a,b]$ 都满足 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$

Example 4.19 设函数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. 求证 : ζ 在 $(1,+\infty)$ 上是连续的, 并计算 ζ 的各阶导数

Note 证明原级数每一项求导后所得的级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^x}$. 任取 $M>1$. 当 $x\in[M,+\infty)$ 时, 尝试寻找以上级数的优级数 : $\left|\dfrac{\ln n}{n^x}\right|\le\dfrac{\ln n}{n^M}$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\ln n}{n^M}}{\frac{1}{n^{\frac{M+1}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{M-1}{2}}}=0$. 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^{\frac{M+1}{2}}$ 收玫, 由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^M}$ 也收玫.

于是由 Weierstrass 判别法可知 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^x}$ 一致收敛. 显然 $\dfrac{\ln n}{n^x}(n=1,2,\cdots)$ 都是连续函数, 因此原级数可以在 $[M,+\infty)$ 上逐项求导

由于M是 $(1,+\infty)$上任取的, 因此原级数可以在 $(1,+\infty)$上逐项求导 : $\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$.

归纳可知原级数任意阶可导且$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}$.

4.2.7 换序等问题的重要例子

Example 4.20 函数列连续, 可导, 极限函数不连续, 不可导

设区间 $[0,1]$上的函数列$S_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$,它的每个函数都在 $[0,1]$上连续可导.研究极限函数的连续性和可导性.

Proof 容易知道$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$ 显然$S(x)$在$x=1$处不连续, 因此也不可导.

Example 4.21 函数列可积, 极限函数不可积

设 $[0,1]$上的全体有理数为$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$.设函数列$S_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_1,\cdots,r_n\}\\ 0, & x\in[0,1]\backslash\{r_1,\cdots,r_n\}\end{cases}$, $n=1,2,\cdots$.

它的每个函数都在 $[0,1]$上可积.研究极限函数的可积性.

$\{S_n(x)\}$在 $[0,1]$上不一致收敛

Proof 容易看出$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c\end{cases}$.

此时$S(x)$就是一个$Dirichlet$函数, 它在 $[0,1]$上不可积.

容易看出$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c\end{cases}$. 因此$d\left(S_n(x)-S(x)\right)=1$.于是可知$\{S(n)\}$在 $[0,1]$上不一致收敛.

Example 4.22 函数列不一致收敛, 函数列可积, 极限函数可积, 但不相等

设 $[0,1]$上的函数列$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$, $n=1,2,\cdots$.它的每个函数都可积, 研究极限函数的可积性.

设 $[0,1]$上的函数列$f_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$, $n=1,2,\cdots$.则$\{f(n)\}$在 $[0,1]$上不一致收玫.

Proof 容易知道$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$.因此$S(x)$可积, 且$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0$.

但$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-e^{-n^2}\right)=1$.这表明$\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x\ne\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$.

容易知道$f\to 0$.由于$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=2ne^{-1}\to+\infty$.因此$\{f(n)\}$在 $[0,1]$上不一致收敛.

Example 4.23 函数列可导, 极限函数不可导

设$\mathbb{R}$上的函数列$S_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $n=1,2,\cdots$.它的每个函数都在$\mathbb{R}$上可导, 研究极限函数的可导性.

Proof 由于$\left|\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0$.故$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$.

因此$S'(x)=0$.但$S_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx\nrightarrow 0$.这表明$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\ne\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)$.

Example 4.24 内闭一致收敛例子 1

设函数列$f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.它在 $(0,+\infty)$不一致收玫, 但在 $[\delta,+\infty)$上一致收玫, 其中δ是任一正实数.

Proof 容易知道在 $(0,+\infty)$上$f\to 0$.(i)当$x\in(0,+\infty)$时$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\dfrac{1}{2}$.

于是可知$\{f_n(x)\}$在 $(0,+\infty)$不一致收敛.

(ii)对于任一$\delta>0$, 当$x\in[\delta,+\infty)$时, 由于$f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}\le\dfrac{nx}{n^2x^2}=\dfrac{1}{nx}<\dfrac{1}{n\delta}$.

因此$d(f_n,f)=\sup\limits_{x\in[\delta,+\infty)}f_n(x)\le\dfrac{1}{n\delta}\to 0$.531.3函数项级数因此$d(f_n,f)\to 0$.于是可知在 $[\delta,+\infty)$上$f_n\rightrightarrows 0$一致收敛.

Example 4.25 内闭一致收敛例子 2

设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$该级数在$(0,+\infty)$上不一致收玫.但对于任一$\delta>0$,该级数都在$[\delta,+\infty)$上一致收玫.

Proof 1.由于$d(f_n,f)=\sup_{x\in(0,+\infty)} f_n(x)\geq f_n\left(\frac{1}{n}\right)=ne^{-1}\to+\infty$.因此$\{f_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛于0.

于是可知$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

2.由于$0<\delta\leq x$.因此当n充分大时$ne^{-nx}\leq ne^{-n\delta}\leq\frac{1}{n^2}$.由于$\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2$收敛,由$Weierstrass$判别法可知原级数一致收敛.

Example 4.26

函数列$\{x^n\}$在$(0,1)$上一致有界.

函数列$\{nx^n\}$在$(0,1)$上逐点有界但不一致有界.

Proof 由于对于任一$x\in(0,1)$都有$0<f_n(x)=x^n<1,\quad n=1,2,\cdots$.因此$\{x^n\}$在$(0,1)$上一致有界.

由于$nx^n\to0$,因此$\{nx^n\}$在$(0,1)$上逐点有界.

假设它在$(0,1)$上一致有界,则存在$M>0$使得对于任一$x\in(0,1)$都有$0<nx^n\leq M,\quad n=1,2,\cdots$.

对于给定的n,令$x\to1-$得$n\leq M$,这里M是固定的正数,而$n=1,2,\cdots$,出现矛盾.因此$\{nx^n\}$在$(0,1)$上不一致有界.

Example 4.27Weierstrass 判别法失效例子 1

以下函数项级数在$[\delta,2\pi-\delta](0<\delta<\pi)$上一致收玫,但不绝对收玫:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

Proof (i)令$f_n(x)=\cos nx, g_n(x)=1/n$.则$g_n(x)$递减一致趋于零.当$x\in[\delta,2\pi-\delta]$时$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leq\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{-1}\leq\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{-1}$.

因此$\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$在$[\delta,2\pi-\delta]$上一致有界.由$Dirichlet$判别法可知原级数一致收敛.

(ii)由于$\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos kx}{k}\right|\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos^2 kx}{k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{\cos 2kx}{k}\right)$.当$x\in[\delta,2\pi-\delta]$时,可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n}$收玫,而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

因此以上不等式最右边的部分和发散.于是可知原级数不绝对收敛.

Example 4.28Weierstrass 判别法失效例子 2

设函数列$a_n(x)=(-1)^nx^n(1-x),\quad n=1,2,\cdots$.

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$[0,1]$上绝对收玫且一致收玫,但$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$在$[0,1]$上不一致收玫.

Proof (i)当$x=0$或1时$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$显然收敛.当$x\in(0,1)$时$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x$.

于是可知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$[0,1]$上绝对收敛.

(ii)令$f_n(x)=(-1)^n, g_n(x)=x^n(1-x)(n=1,2,\cdots)$.显然$\sum_{n=1}^{n}f_n(x)$一致有界.下面来证明$g_n(x)$一致趋于零.

求导得$g_n'(x)=nx^{n-1}(1-x)-x^n=x^{n-1}[n-(n+1)x]$.令$g_n'(x)=0$得$x=0$或$n/(n+1)$.

容易知道当$x=n/(n+1)$时$g_n(x)$在闭区间$[0,1]$上取到最大值.

于是$g_n(x)\leq g_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{(1+1/n)^n}\cdot\frac{1}{n+1}\to0$.因此$g_n(x)$一致趋于零.

由$Dirichlet$判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛.

(iii) 容易看出 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的和函数为 $S(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1)\\ 0, & x=1.\end{cases}$.

令 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 的部分和函数列 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^k(1-x)=(1-x)\sum_{k=1}^{n}x^k=x-x^{n+1},\quad n=1,2,\cdots$.

由于 $\left|S_n\left(2^{-\frac{1}{n+1}}\right)-S\left(2^{-\frac{1}{n+1}}\right)\right|=\left|2^{-\frac{1}{n+1}}-2^{-1}-2^{-\frac{1}{n+1}}\right|=\frac{1}{2}$. 于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

Example 4.29 一致收敛的函数项级数未必存在优级数的反例

在区间 $[0,1]$ 上, 定义 $u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n}.\\ 0, & x\neq\frac{1}{n}.\end{cases}$

证明 : $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0.1]$ 上一致收敛, 但它不存在收敛的优级数.

Proposition 4.22

设 $\alpha>0$, 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$.

(1) 证明 : 当 $\alpha>1$ 时, 该级数对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 都绝对收敛且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛;

(2) 证明: 当 $0<\alpha\leq 1$ 时, 该级数对任意的 $x\neq k\pi(k\in\mathbb{Z})$ 条件收敛, 并且在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛 $(0<\varepsilon<\pi)$.

(3) 证明: 当 $0<\alpha\leq 1$ 时, 该级数在 $[0,2\pi]$ 上非一致收敛.

Proof (1) $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right|\leq\frac{1}{n^{\alpha}}$. 而 $\alpha>1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛且在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

(2) 首先当 $\forall x$ 给定, 且 $x\neq k\pi$ 时, 有 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, 而

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx=-\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

由此可知 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$.

而明显 $\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ 关于 n 单调递减, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$, 所以由狄利克雷判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ 收敛.

另外, 又由于 $\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right|\geq\frac{\sin^2 nx}{n^{\alpha}}=\frac{1}{2n^{\alpha}}-\frac{\cos 2nx}{2n^{\alpha}}$

由于 $0<\alpha\leq 1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\alpha}}$ 发散. 另外, 由于 $\sin x\neq 0$, 那么同上, 由狄利克雷判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^{\alpha}}$ 收敛

可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right|$ 发散, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ 条件收敛.

另外, 当 $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 时, 由可知 $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leq\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$.

再结合 $\left\{\frac{1}{n^{\alpha}}\right\}$ 关于 n 单调递减, 且在 $n\to\infty$ 时关于 $x\in[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 一致收敛于零

所以由狄利克雷判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ 在 $[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ 上一致收敛.

(3)取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}\sin 1$,则对任意的正整数$N>0$,取$m=N+1,n=2m$,显然满足$n>m>N$,取$x_0=\dfrac{1}{m}\in[0,2\pi]$,有
$\left|\dfrac{\sin(m+1)x_0}{(m+1)^\alpha}+\dfrac{\sin(m+2)x_0}{(m+2)^\alpha}+\cdots+\dfrac{\sin nx_0}{n^\alpha}\right|=\left|\dfrac{1}{(m+1)^\alpha}\sin\dfrac{m+1}{m}+\dfrac{1}{(m+2)^\alpha}\sin\dfrac{m+2}{m}+\cdots+\dfrac{1}{(2m)^\alpha}\sin\dfrac{2m}{m}\right|$
$\geq\dfrac{1}{2m}\left(\sin\dfrac{m+1}{m}+\sin\dfrac{m+2}{m}+\cdots+\sin\dfrac{2m}{m}\right)$
$\geq\dfrac{1}{2m}\cdot m\sin 1=\dfrac{1}{2}\sin 1=\varepsilon_0.$
由柯西准则可知级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$在$[0,2\pi]$上非一致收敛.
除此之外：这是在0附近的时候,同理可以取$x_0=2\pi-\dfrac{1}{m}$也可以证明非一致收敛

4.3 幂级数

4.3.1 幂级数的敛散性

Definition 4.10

设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + \cdots + a_n (x-x_0)^n + \cdots$.
它的每一项都是幂函数.这样的函数项级数称为幂级数 (*power series*).

Theorem 4.3.1 (Abel 幂级数第一定理)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
(1) 级数在$x=0$处一定绝对收敛.
(2) 若级数在$x=x_0\neq 0$处收敛, 则它一定在区间 $(-|x_0|,|x_0|)$ 上绝对收敛.
(3) 若级数在$x=x_1$处发散, 则它一定在 $(-\infty,|x_1|)\cup(|x_1|,+\infty)$ 上发散.
即：幂级数在其收敛区间内一定是绝对收敛的

Proof 证明（1）显然成立.
(2) 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$x=x_0\neq 0$处收敛, 故存在$M>0$使得 $\left|a_n x_0^n\right| \leq M (n=1,2,\cdots)$.
当$|x|<|x_0|$时 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_0^n\right|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.由正项级数的比较判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛.
于是可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-|x_0|,|x_0|)$ 上绝对收敛.
(3) 当$|x|>|x_1|$时, 假设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收玫, 由 (2) 可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收玫, 出现矛盾于是
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在区间 $(-\infty,|x_1|)\cup(|x_1|,+\infty)$ 上发散.

Theorem 4.3.2 (Cauchy-Hadmard 判别法)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.令$R=\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$
(1) 当$R=0$时, 级数在$x=0$处绝对收玫, 在$\mathbb{R}\backslash\{0\}$上发散
(2) 当$R=+\infty$时, 级数在$\mathbb{R}$上绝对收敛.
(3) 当$R\in\mathbb{R}^{+}$时, 级数在 $(-R,R)$上绝对收敛, 在 $(-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$上发散.

Proof 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}|x| = \rho|x|$根据级数的根式判别法, 当$\rho|x|<1$时, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收玫;
当$\rho|x|>1$时, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散.于是当$0<\rho<+\infty$时, 由$\rho|x|<1$得幂级数的收玫半径$R=\frac{1}{\rho}$.
当$\rho=0$时, 对任何x皆有$\rho|x|<1$, 所以$R=+\infty$.当$\rho=+\infty$时, 则对除$x=0$外的任何x皆有$\rho|x|>1$, 所以$R=0$.

Theorem 4.3.3 (D' Alembert 判别法)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$.则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径就是$\frac{1}{\rho}$

Theorem 4.3.4

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.若它的收玫半径为$R$

$\Rightarrow$ 则它在 $(-R, R)$上内闭一致收敛, 即对于任一$r \in (0, R)$, 级数在 $[-r, r]$上都一致收敛.

即：幂级数在其收敛区间内一定是内闭一致收敛的

Proof 当$x \in [-r, r]$时, $|a_n x^n| \le |a_n|\, r^n$ 由$Abel$第一定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$内绝对收玫

因此 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ 收玫, 由$Weierstrass$判别法可知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r, r]$上一致收敛.

4.3.2 幂级数的分析性质

Theorem 4.3.5 (幂级数内闭一致收敛延拓性质)

若幂级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径为 $R(>0)$, 且在 $x=R$(或 $x=-R$)时收敛

$\Rightarrow$ 则级数在 $[0,R]$(或 $[-R,0]$)上一致收玫

Proof 证设级数在 $x=R$ 时收玫, 对于 $x\in[0,R]$ 有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$.

已知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收玫, 函数列 $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ 在 $[0,R]$ 上递减且一致有界, 即 $1\geqslant \frac{x}{R}\geqslant\left(\frac{x}{R}\right)^2\geqslant\cdots\geqslant\left(\frac{x}{R}\right)^n\geqslant\cdots\geqslant 0$.

故由阿贝尔判别法级数在 $[0,R]$ 上一致收玫.

Theorem 4.3.6 (Abel 第二定理)

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R. 其和函数 $S(x)$ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ 收敛于 A.

$\Rightarrow$ 则 $\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A\left(\lim\limits_{x\to R^-} S(x) = A\right)$

Proof 我们有等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 处收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ 收敛

由于对于任一 $x\in[0,R]$ 数列 $\{(x/R)^n\}$ 都是递减的, 且 $\{(x/R)^n\}$ 一致有界. 由 $Abel$ 判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛

因此和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续. 于是可知 $\lim\limits_{x\to R_-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lim\limits_{x\to R^-} S(x) = S(R) = A$.

Note 这也是为什么我们在求幂级数的和函数的时候, 最后 $S(x)=$ 表达式的成立范围仅仅最后根据原级数的收敛范围来定。

这我们就立马得到以下关于幂级数连续性得叙述

Theorem 4.3.7 (幂级数的连续性)

(i) 幂级数 $\sum a_n x^n$ 的和函数是 $(-R,R)$ 上的连续函数

(ii) 若幂级数 $\sum a_n x^n$ 在收玫区间的左 (右) 端点上收玫, 则其和函数也在这一端点上右 (左) 连续.

Theorem 4.3.8

$\sum\limits_{n=0} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1} n a_n x^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ 都具有相同的收敛半径

此时后二者仍然是幂级数, 在其收敛区间上仍然一致收敛

Proof 这里只需要证明 $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1} n a_n x^{n-1}$ 具有相同收敛半径即可, 因为对第三者求导即得第一者

设 x_0 为 $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$ 在其收敛半径 $(-R,R)$ 内的任何一个点 $(x_0\neq 0)$; 那么在 x_0 与 R 之间必定存在一数 x $(x_0<x<R)$

$st.\left|a_n x_0^n\right| = \left|a_n x^n\right|\left|\frac{x_0^n}{x^n}\right| < Mr^n$ $(r<1$, 常数$)$ (因在 x 这点仍然是收敛的, 因而通项有界。$\left|\frac{x_0}{x}\right|$ 为一小于 1 的数, 那么也可取到 $r>\left|\frac{x_0}{x}\right|$)

此时 $0\leqslant\left|n a_n x_0^{n-1}\right| = \left|\frac{n}{x_0}\right|\left|a_n x_0^n\right| < Mr^n\frac{n}{|x_0|}$

而根据比值判别法$Mr^n\dfrac{n}{|x_0|}$该数项级数收敛。由比较判别法，得
$\sum\limits_{n=1} na_nx^{n-1}$该幂级数在$x_0$点为绝对收敛。又因为$x_0$是$(-R,R)$内任一一点。
自然证明了$\sum\limits_{n=1} na_nx^{n-1}$在$(-R,R)$是(绝对)收敛的。

接下来去证明在R之外发散即可说明收敛半径为R了
反证法，若幂级数$\sum\limits_{n=1} na_nx^{n-1}$在$x_0$点收敛$(|x_0|>R)$;则必定存在$x_1$点，$st.|x_0|>|x_1|>R$
由阿贝尔定理知道$\sum\limits_{n=1} na_nx^{n-1}$在$x_1$点为绝对收敛即数项级数$\sum na_nx_1^{n-1}$收敛
$|na_nx_1^{n-1}|=\left|\dfrac{n}{x_1}\right||a_nx_1^n|>|a_nx_1^n|>0$(当$n$充分大成立)那么由数项级数比较判别法知道
级数$\sum a_nx^n$在x_1点为绝对收敛但这与一开始设的收敛区间为$(-R,R)$矛盾
注 为什么不能用柯西判别法,即设$\sum a_nx^n$的半径为R，说$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{R}$因为可能极限不存在

下面的定理的证明将给出利用上极限得另一种说法

Theorem 4.3.9 (幂级数的逐项求导)

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.若它的收玫半径为$R$,则和函数$S(x)$在$(-R,R)$内连续,且在$(-R,R)$内存在任意阶导数
在此因为每一项均连续可导，且必有一点0收敛根据前文只需要f_n'一致收敛即可
$S^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k},\quad k=1,2,\cdots$

Proof 且$S^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k},\quad k=1,2,\cdots$
由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$上内闭一致收敛,因此$S(x)$在$(-R,R)$上连续.容易知道$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的各项连续可导
逐项求导后得级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_nx^n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$由于$\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$
由$Cauchy-Hadamard$定理可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收玫半径仍旧是$R$,因此该级数也在$(-R,R)$上内闭一致收玫.
于是在$(-R,R)$的任一闭子区间内都有$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$因此上式在$(-R,R)$上也成立.
用数学归纳法不难知道$S(x)$在$(-R,R)$内存在任意阶导数,且等式成立.

Theorem 4.3.10 (幂级数的逐项积分)

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.若它的收敛半径为$R$则它的和函数$S(x)$对于任一$x\in(-R,R)$都满足$\displaystyle\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$
且上式右边的莫级数的收敛半径仍是R.

Proof 证明不妨设$x\in(0,R)$.由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$上内闭一致收敛,因此它在$[0,x]$上一致收玫,且在$[0,x]$上可以逐项积分
因此$\displaystyle\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$
由于$\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{a_n}{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}}\cdot\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

由$Cauchy-Hadamard$定理可知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$的收敛半径仍旧是$R$.仍然在其上绝对收敛，内闭一致收敛

接下来我们来看阿贝尔第二定理的逆定理是否成立？

Example 4.30 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$的收敛半径为1.因此它在$(-1,1)$上收敛,且$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}$

因此$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$.但$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$在$x=1$处发散.因此该级数不满足$Abel$第二定理的逆命题.

Theorem 4.3.11 (Tauber 定理)

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为1.若$a_n=o(1/n)$,且$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=A\left(\lim_{x\to 1^-}S(x)=A\right)$
$\Rightarrow$ 则$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A.\left(注：以上条件可以减弱到a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Proof 设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n(0\le x<1)$.则对于任一$N\in\mathbb{N}^*$都有

$$\sum_{n=0}^{N}a_n-A=\sum_{n=0}^{N}a_n-S(x)+S(x)-A=\sum_{n=0}^{N}a_n-\sum_{n=0}^{N}a_n x^n-\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n x^n+S(x)-A$$

$$=\sum_{n=1}^{N}a_n\left(1-x^n\right)-\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n x^n+[S(x)-A].$$

下面来估计上式右边的三项.令$\delta_n=\sup_{k\geqslant n}\{|ka_k|\}\ n=1,2,\cdots$.由于$na_n\to 0$,故$\{\delta_n\}$递减趋于零.于是对于任一$x\in[0,1)$都有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\left(1-x^n\right)\right|\le\sum_{n=1}^{N}\left|a_n\left(1-x^n\right)\right|=(1-x)\sum_{n=1}^{N}|a_n|\left(1+x+\cdots+x^{n-1}\right)\le(1-x)\sum_{n=1}^{N}n\,|a_n|\le(1-x)N\delta_1.$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n x^n\right|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|na_n|\frac{x^n}{n}\le\frac{\delta_N}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n=\frac{\delta_N}{N}\cdot\frac{x^{N+1}}{1-x}\le\frac{\delta_N}{N(1-x)}.$$

令$x_N=1-\frac{\sqrt{\delta_N}}{N}\iff N\left(1-x_N\right)=\sqrt{\delta_N},\quad N=1,2,\cdots$

于是$\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\left(1-x_N^n\right)\right|\le\delta_1\sqrt{\delta_N},\quad\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n x_N^n\right|\le\frac{\delta_N}{\sqrt{\delta_N}}=\sqrt{\delta_N}.$

于是$\left|\sum_{n=0}^{N}a_n-A\right|\le\delta_1\sqrt{\delta_N}+\sqrt{\delta_N}+\left|S\left(x_N\right)-A\right|.$

当$N\to\infty$时$x_N\to 1-$.由于$\lim_{x\to 1-}S(x)=A$,因此令$N\to\infty$即得$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A.$

Proof

由于$\lim_{x\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=S$,由归结原则可知$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=S$.另外,又由于$\lim_{n\to\infty}na_n=0$,由柯西命题可知$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\,|a_k|=0$.

于是$\forall\varepsilon>0,\exists N$, 使得$n>N$时, 有$\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-S\right|<\varepsilon,\quad n\left|a_n\right|<\varepsilon,\quad \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}k\left|a_k\right|<\varepsilon.$

为了方便, 记$x=1-\frac{1}{n}$, 那么当$n>N$时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-S\right| &\le \left|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right|+\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-S\right| \\
&< \sum_{k=0}^{n}\left|a_k\right|\left(1-x^k\right)+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|+\varepsilon \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left|a_k\right|(1-x)\left(1+x+\cdots+x^{k-1}\right)+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{ka_k}{k}x^k\right|+\varepsilon \\
&< \sum_{k=0}^{n}k\left|a_k\right|(1-x)+\frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k+\varepsilon \\
&< \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\left|a_k\right|+\frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=0}^{\infty}x^k+\varepsilon \\
&< \varepsilon+\frac{\varepsilon}{n}\cdot\frac{1}{1-x}+\varepsilon=3\varepsilon
\end{aligned}$$

这就说明数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛且$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S.$

Proposition 4.23

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为1.若$\{a_n\}$非负, 且$\lim\limits_{x\to1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$

$\Rightarrow$ 则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=A.$

Proof 用反证法, 假设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$发散.由于$\{a_n\}$非负, 故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=+\infty$.则对于任一正数$E>A$, 存在$N\in\mathbb{N}^*$使得$\sum\limits_{n=0}^{N}a_n>E>A$

由于$\{a_n\}$非负, 因此当$x>0$时$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ge\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n$

于是有$A=\lim\limits_{x\to1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ge\lim\limits_{x\to1-}\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{N}a_n>E>A$.出现矛盾, 因此假设不成立.

故知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$收敛, 即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=1$处收敛。由Abel第二定理可知和函数$S(x)$在$x=1$处左连续

于是可知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S(1)=\lim\limits_{x\to1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$

以上例子说明 Abel 第二定理的逆定理并不成立，这就提示我们可以定义另外一种和

Definition 4.11

设级数$\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$.若$\lim\limits_{x\to1-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=S$.则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是*Abel*可求和的 (*Abelian summable*).并称S是$\sum\limits_{n=1}^{n}a_n$的*Abel*和

显然根据*Abel*第二定理, 收玫的级数都是*Abel*可求和的, 且它们在通常意义下的和就等于*Abel*和.

另一方面由于*Abel*定理的逆定理不成立, 因此某些在通常意义下不收玫的级数可以在*Abel*意义下收玫.

Example 4.31 设级数$\sum\limits_{n=0}^{n}(-1)^n$该级数发散, 但在 Abel 意义下收玫

Proof 由于 $\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\lim\limits_{x\to 1-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{2}$.

因此 $\sum\limits_{n=0}^{n}(-1)^n$ 在 $Abel$ 意义下收敛,且它的 $Abel$ 和为 $1/2$.

Theorem 4.3.12

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径均为分别为 r_1,r_2.

令 $r=\min\{r_1,r_2\}$. 则当 $|x|<r$ 时有 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n$.

Proof 由定理 $Cauchy-Hadamard$ 定理可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 在 $(-r,r)$ 中均绝对收敛.

因此它们的 $Cauchy$ 乘积收敛 : $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\left(a_k x^k\right)\left(b_{n-k}x^{n-k}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n$.

4.3.3 幂级数展开

Theorem 4.3.13 (幂级数展开必要条件)

设函数f在区间(x_0-R,x_0+R)上可以展开成幂级数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

由前文的幂级数逐项求导定理可知f在(x_0-R,x_0+R)内有任意阶导数.

于是得到了一个函数能在一个区间内展开成幂级数的一个必要条件是在x_0处要有任意阶导数

定理还告诉我们

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

$$=k!a_k+\sum_{n=k+1}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},\quad k=1,2,\cdots.$$

令$x=x_0$得$a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$

这表明,只要f能展开成幂级数,则一定是以下形式的幂级数:$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Definition 4.12 (泰勒级数)

设函数$f(x)$在$x=x_0$处有任意阶导数.令$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.以上级数称为$f$在$x=x_0$处的$Taylor$级数 ($Taylor\ series$)

记作$f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.特别地,$f$在$x=0$处的$Taylor$级数称为$f$的$Maclaurin$级数 ($Maclaurin\ series$).

注 由以上定义可知,只要f在$x=x_0$处有任意阶导数,就存在对应的$Taylor$级数.但这个级数末必收玫,即使收玫也末必收玫到f

Example 4.32 设函数$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2^nx)}{n!}$.则$f$在$x=0$处的$Taylor$级数除了$x=0$以外处处发散

Proof 由于$\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\sin(2^nx)=2^{mn}\sin\left(2^nx+\dfrac{m}{2}\pi\right)$.因此$f^{(m)}(0)=\left(\sin\dfrac{m}{2}\pi\right)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2^m)^n}{n!}=\left(\sin\dfrac{m}{2}\pi\right)\mathrm{e}^{2^m}$

于是可知$f\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\mathrm{e}^{2^{2n+1}}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$由$Stirling$公式可知$\dfrac{\mathrm{e}^{2^m}}{m!}\sim\dfrac{\mathrm{e}^{2^m}}{\sqrt{2m\pi}\left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m}\to+\infty$

因此该级数除了$x=0$以外处处发散.

Proof 为了方便,记$u_n(x)=\dfrac{\sin(2^nx)}{n!}$,显然$u_n(x)$在$\mathbb{R}$上无穷次可导,且

$$\left|u_n^{(k)}(x)\right|=\left|\frac{(2^n)^k}{n!}\sin\left(2^nx+\frac{k\pi}{2}\right)\right|\le\frac{(2^k)^n}{n!},k=0,1,2,\cdots.$$

对任意的$k=0,1,2,\cdots$,记$a_n=\dfrac{(2^k)^n}{n!}$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(2^k)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{(2^k)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^k}{n+1}=0.$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收玫,由优级数判别法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(x)$在$\mathbb{R}$上一致收玫.

这说明$f(x)$在$\mathbb{R}$上存在任意阶导数,且$f^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2^k)^n}{n!}\sin\left(2^nx+\dfrac{k\pi}{2}\right),x\in\mathbb{R},k=0,1,2,\cdots.$

特别地,也有$f^{(2m)}(0)=0,f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2^{2m+1})^n}{n!}=(-1)^me^{2^{2m+1}},m=0,1,2,\cdots.$

因此$f(x)$在$x=0$处的泰勒级数为$\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m e^{2^{2m+1}}}{(2m+1)!}x^{2m+1}$.

记$v_m(x)=\frac{(-1)^m e^{2^{2m+1}}}{(2m+1)!}x^{2m+1}$, 那么当$x\neq 0$时, 有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{|v_{m+1}(x)|}{|v_m(x)|}=\lim_{m\to\infty}\frac{e^{2^{2m+3}}|x|^{2m+3}}{(2m+3)!}\cdot\frac{(2m+1)!}{e^{2^{2m+1}}|x|^{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{e^{3\cdot 2^{2m+1}}x^2}{(2m+2)(2m+3)}=+\infty.$$

这说明$\lim\limits_{m\to\infty}|v_m(x)|=+\infty$, 于是级数在$x\neq 0$处均发散, 即$f(x)$不能在$\mathbb{R}$上展开为幂级数.

Example 4.33 设函数$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1/x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. 已经证明$f^{(m)}(0)=0(m=1,2,\cdots)$.故$f\sim 0$显然$f\neq 0$ 即f的$Taylor$级数虽然存在, 但不收敛到f.

Theorem 4.3.14 (泰勒定理)

那么我们要问, 函数f还需满足什么条件, 才能使它的$Taylor$级数收敛于自己

设f在(x_0-R,x_0+R)上有任意阶导数, 则任意一点x都有$Taylor$展开式 : $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$

其中$R_n(x)$是余项.令$n\to\infty$可知f可以展开为$Taylor$级数当且仅当$R_n(x)\to 0$

Theorem 4.3.15 (泰勒级数收敛到自身的一充分条件)

设函数f在(x_0-R,x_0+R)上有任意阶导数.若存在$M>0$使得当n充分大时对$\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$都有$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ $\Rightarrow$ 则f可以在(x_0-R,x_0+R)上展开为$Taylor$级数.

Proof

由于f在(x_0-R,x_0+R)上有任意阶导数, 于是当$x\in(x_0-R,x_0+R)$有以下$Taylor$展开式$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$

由带$Lagrange$余项的$Taylor$公式可知, 在x_0和x之间存在ξ使得

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\le M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$$

因此$R_n\to 0$.于是可知f可以在(x_0-R,x_0+R)上展开为$Taylor$级数.

Proposition 4.24

把函数$\arctan x(|x|<1)$展开成幂级数.

Proof $\arctan x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+R(x)$ 其中$R(x)=\frac{\arctan^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$

故$\arctan x\sim\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$收敛半径为1

我们注意到当$|x|<1$时有等式$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{1}{1+x^2}$

对两边求$[0,x]$上的积分得$\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\Longleftrightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x$.

且当$x=-1$与1时幂级数化为的数项级数也是收敛的故$\arctan x$的麦克劳林泰勒级数的收敛域为$[-1,1]$

Proposition 4.25

把函数 $\ln(1+x)(|x|<1)$展开成幂级数.

Proof 法一：

注意到有：当$|x|<1$ (1为后面该幂级数的收敛半径) 时有等式 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x}$

对两边求 $[0,x]$上的积分得 $\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\int_0^x\frac{1}{1+x}\Longleftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\ln(1+x)\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x)$.

特别的$x=1$时该级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$变为了$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$是收敛的数项级数

故 $\ln(1+x)$ 的收敛域为 $(-1,1]$

法二：

我们先写出 $\ln(1+x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$我们来讨论是否级数收敛到自身

首先$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$该幂级数收敛半径为1, 我们将在 $(-1,1)$ 上先来考虑

其次$R_n(x)=\frac{(\ln(1+x))^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$

其次我们有高阶导数 $(\ln(1+x))^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$

$\Longrightarrow R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot\frac{(-1)^n(n)!}{(1+x)^{n+1}}$

此时 $|R_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$故$R_n(x)\to 0$故由泰勒定理知道可以 $(-1,1)$ 内可以展开为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

在单独讨论 $-1,1$两点即可

Proposition 4.26

判断指数函数 e^x是否可以展开为$Maclaurin$级数.

Proof 我们先写出e^x的麦克劳林泰勒公式：$e^x=\sum_{i=0}^{n}\frac{(e^x)^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i+R_n(x)$ 其中$R_n(x)=\frac{(e^x)^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$ (ξ位于 $(0,x)$ 之间)

故$e^x\sim\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(e^x)^{(i)}(0)}{i!}(x-0)^i$我们现在来讨论是否该幂级数收敛到自身

首先我们有高阶导数 $(e^x)^{(k)}=e^x$

$\Longrightarrow e^x\sim\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(x)^i$

那么此时幂级数$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(x)^i$的收敛半径不难用柯西哈达玛定理算出为$\infty$, 那么问是否有$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}(x)^i$在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛到e^x？

任取$R>0$, 当$|x|<R$时

$|R_n(x)|=\frac{(e^x)^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\leqslant\frac{e^R}{(n+1)!}R^{n+1}\to 0$

故由泰勒定理知道 e^x可以在 $(-R,R)$上展开为$Maclaurin$级数 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

由于R是任一正数, 因此 e^x可以在$\mathbb{R}$上展开为$Maclaurin$级数.

(也可以直接使用充分条件这里为了更加明白整个研究过程写的很详细)

Proposition 4.27

判断三角函数 $\sin x$和 $\cos x$是否可以展开为$Maclaurin$级数.

Proof 这里的 $\sin x, \cos x$与e^x的讨论非常相似,我们略去说明适用充分条件

由于 $\left|(\sin x)^{(n)}\right| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1$.

由定理可知 $\sin x$可以在$\mathbb{R}$上展开为$Maclaurin$级数 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

同理可知 $\cos x$可以在$\mathbb{R}$上展开为$Maclaurin$级数 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

Proposition 4.28

判断函数$f(x) = (1+x)^\alpha$是否可以展开为$Maclaurin$级数,其中α是任一实数.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \begin{cases} x \in (-1,1) & \alpha \leq -1 \\ x \in (-1,1] & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1,1] & \alpha > 0 \end{cases}$$

Note 由泰勒公式知道 $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n} x^k + R_n(x)$

故 $(1+x)^\alpha \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^k$

而幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^k$的收敛半径由达朗贝尔判别法知道为1

Proof

我们已经在《数学分析I》中证明

$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$其中$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\alpha-1} x^{n+1}, \quad \theta \in (0,1)$.

且已经对R_n得到了如下估计:$|R_n(x)| \leq \begin{cases} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1+|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha > 1 \\ \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1-|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha < 1 \end{cases}$

当$|x| < 1$时,由$D'Alembert$判别法可知:$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} < +\infty$.

因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} = 0$.于是有$R_n \to 0$.

于是可知,当$|x| < 1$时函数可以展开为$Maclaurin$级数:$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

下面来看$x = \pm 1$处的情况.

(i) 当$\alpha \leq -1$时,由于 $\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|}{n!} \geq \frac{n!}{n!} = 1$.此时当$x = \pm 1$时级数都发散.

(ii) 当 $-1 < \alpha < 0$且$x = -1$时,由于

$(-1)^n \binom{\alpha}{n} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} = \frac{|\alpha|}{n} \frac{|\alpha|+1}{1} \cdots \frac{|\alpha|+n-1}{n-1} \geq \frac{|\alpha|}{n}$.

由比较判别法可知,此时级数发散.

(iii) 当 $-1 < \alpha < 0$且$x = 1$时,考察级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} = 1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \cdots$.

显然这是一个交错级数.无穷乘积一节已经证明 $\lim_{n\to\infty} \left|\binom{\alpha}{n}\right| = 0$

下面证明$\left\{\left|\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\right|\right\}$单调递减.由于$\dfrac{|\alpha-n|}{n+1}\le\dfrac{|\alpha|+n}{n+1}\le 1$.

因此$\left|\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\right|=\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|\ge\left|\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|\left|\dfrac{\alpha-n}{n+1}\right|=\left|\begin{pmatrix}\alpha\\ n+1\end{pmatrix}\right|$.

这表明$\left\{\left|\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\right|\right\}$单调递减.于是由$Leibniz$判别法可知级数收敛.

(iv)当$\alpha>0$时,数项级数练习中已经证明$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\right|<+\infty$.此时当$x=\pm1$是级数都收敛.

综上所述, $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n=\begin{cases}x\in(-1,1) & \alpha\le -1\\ x\in(-1,1] & -1<\alpha<0\\ x\in[-1,1] & \alpha>0\end{cases}$

Note

Example 4.34 估计函数$f(x)=(1+x)^{\alpha}(-1<x<-1)$的$n$次$Taylor$多项式的误差.

Proof 由于$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$.

因此f的$Cauchy$余项为

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n$

我们令$h=x-x_0$ $\xi=x_0+\theta h=x_0+\theta(x-x_0)=\theta x+(1-\theta)x_0$

那么在$x_0=0$处我们有$h=x$且$\xi=\theta x$

故$R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}x^{n+1}$.

当$|x|<1$时,因为$x>-1$,所以$1+\theta x>1-\theta>0$,从而有$\left(\dfrac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1$.

现在再来估计含有未知的θ的另一项,即$(1+\theta x)^{\lambda-1}$.由于$|x|<1$,我们有$1-|x|\leqslant 1+\theta x\leqslant 1+|x|$.

于是可知$|R_n(x)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1+|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha>1\\ \dfrac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}(1-|x|)^{\alpha-1}|x|^{n+1}, & \alpha<1\end{cases}$.

Proposition 4.29

求函数$f(x)=\arcsin x$的$Maclaurin$级数展开式.

Proof 由于

$$(1+x)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-1/2\\ n\end{pmatrix}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\quad\forall x\in(-1,1].$$

于是$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-1/2\\ n\end{pmatrix}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad\forall x\in(-1,1)$.

对上式两边积分可知$\arcsin x=\int_0^x\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\quad\forall x\in(-1,1)$.

下面来看$|x|=1$时上式右边的级数是否收敛.设上式右边的级数的通项为a_n

法一由于$n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}\cdot\dfrac{(2n+2)!!(2n+3)}{(2n+1)!!}-1\right]=n\left[\dfrac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right]=\dfrac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}\to\dfrac{3}{2}>1$.

由正项级数的$Rabbe$判别法可知$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛.于是可知$\arcsin x$的展开式在$[-1,1]$上都成立.

法二 当$x \in (-1,1)$时 $\lim_{x\to 1-} = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1} = \lim_{x\to 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
又因为 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$. 由$Tauber$定理可知级数在$x=1$处收敛.
同理可知$x=-1$处也收敛. 于是可知 $\arcsin x$的展开式在$[-1,1]$上都成立。

Theorem 4.3.16

(1) $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \forall x\in(-1,1).$

(2) $(1+x)^\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}x^n,\quad \forall x\in(-1,1),\alpha\in\mathbb{R}$, 其中 $\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

其中, 当 $-1<\alpha<0$, 等式在 $x=1$ 处也成立. 当 $\alpha>0$, 等式在 $x=\pm1$ 处也成立.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n\ (-1<x\leqslant 1)$

(3) $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

(4) $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,\quad \forall x\in(-1,1].$

(5) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

(6) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

(7) $\arcsin x=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}x^{2n+1},\quad \forall x\in[-1,1].$

(8) $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad \forall x\in[-1,1].$

(9) $\sinh x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

(10) $\cosh x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\quad \forall x\in\mathbb{R}.$

(11) $\operatorname{arc\,tanh} x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \forall x\in[-1,1].$

4.4 傅里叶级数

4.4.1 傅里叶级数基本性质

Definition 4.13

设$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是三角级数

Theorem 4.4.1

若级数$\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛,则三角级数在整个数轴上绝对收敛且一致收敛.

Proof 证对任何实数x,由于$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant|a_n|+|b_n|$,应用魏尔斯特拉斯$M$判别法就能推得本定理的结论.

性质 利用三角函数正交性,有

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0,\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0.\end{aligned}\right\}\text{任何一个函数的平方在}[-\pi,\pi]\text{上的积分都不等于零,即}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2nx\mathrm{d}x=\pi,\\&\int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x=2\pi.\end{aligned}\right\}$$

Theorem 4.4.2

若在整个数轴上$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ $(*)$ 且等式右边级数一致收敛,则有如下关系式:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots.$$

Proof 证由定理条件,函数f在$[-\pi,\pi]$上连续且可积.对$(*)$式逐项积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right).$$

由正交性知,上式右边括号内的积分都等于零.所以$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=a_0\pi$,即得$\displaystyle a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$

现以$\cos kx$乘$(*)$式两边(k为正整数),得$\displaystyle f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx)$.

由M判别法应用知道上述式子右边一致收敛,于是对级数上述式子逐项求积,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\mathrm{d}x\right).$$

由三角函数的正交性,右边除了以a_k为系数的那一项积分$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2kx\mathrm{d}x=\pi$外,其他各项积分都等于0

于是得出$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=a_k\pi(k=1,2,\cdots)$,即$\displaystyle a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots)$

同理, 两边乘以 $\sin kx$, 并逐项求积, 可得 $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \quad (k=1,2,\cdots)$.

Definition 4.14

一般地说, 若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数, 则按定定理公式计算出的 a_n 和 b_n 称为函数 f(的傅里叶系数

以 f 的傅里叶系数为系数的三角级数称为 f(关于三角函数系) 的傅里叶级数, 记作 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$.

这说明一个函数有傅里叶级数只需要函数可积即可

Theorem 4.4.3 (黎曼勒贝格定理)

设 f 在 $[a,b]$(b 可以是 $+\infty$)上可积且绝对可积, 那么

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0,\qquad \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0.$

$\Longrightarrow$ 傅里叶系数的 $a_n \quad b_n \to 0\,(n\to\infty)$

Proof 我们先证明式 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0$ 成立.

先设 f 在 $[a,b]$ 上 *Riemann* 可积, 故它必有界, 即存在常数 M.使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对 $x\in[a,b]$ 成立.

记 $n=[\sqrt{\lambda}]$, 则当 $\lambda\to+\infty$ 时, $n\to+\infty$.

现在把区间 $[a,b]$ n 等分, 分点为 $x_i = a+\frac{i}{n}(b-a) \quad (i=0,1,\cdots,n)$.

记 ω_i 为 f 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 那么由于 f 是可积的, 所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$, 这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

注意到 $\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{\lambda}\left|\sin\lambda x_{i-1} - \sin\lambda x_i\right| \leqslant \frac{2}{\lambda} \qquad |\cos\lambda x| \leqslant 1.$

以及

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_i} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_1}^{x_i}(f(x)-f(x_{i-1}))\cos\lambda x\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\mathrm{d}x,$$

便有 $\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2n}{\lambda}M \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}M \to 0 \quad (\lambda\to+\infty)$.

再设 f 在 $[a,b]$ 上反常绝对可积.不妨设 b 是 f 唯一的瑕点, 那么对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得 $\int_{b-\eta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$.

由于 f 在 $[a,b-\eta]$ 上 *Riemann* 可积, 由刚才证明的结果知, 存在 $\lambda_0>0$, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有 $\left|\int_a^{h-\eta} f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

于是当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有 $\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| + \int_{b-\eta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$.

当 $b=+\infty$ 时, 因为 f 在 $(a,+\infty)$ 上绝对可积, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0>a$, 使得 $\int_{A_0}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}$.

又因 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^{A_0} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0$, 所以存在 $\lambda_0>0$, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有 $\left|\int_a^{\lambda_0} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

于是, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 有 $\left|\int_a^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{A_0} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| + \int_{A_0}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$.

Theorem 4.4.4 (推广的黎曼-勒贝格引理)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, g 是以 $T>0$ 为周期的函数, 在 $[0,T]$ 上可积,

那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Proof 不妨设 $g(x)\geqslant 0$ 不然我们可以令上式变为 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\{g(nx)-c\}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{T}\int_0^T\{g(x)-c\}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

并不改变证明式子, 此时令 $c=\inf g(x)$ 即可因为 g 可积有界

因 $g(x)$ 以 T 为周期, 因此 $g(nx)$ 以 $\frac{T}{n}$ 为周期, 当 n 充分大时, $[a,b]$ 含有 $g(nx)$ 的多个周期.

为了把区间变成$\frac{T}{n}$的整倍数, 取足够大的正整数m, 使得 $[A,B]=[-mT,mT]\supset[a,b]$.

这时 $[A,B]$相当$g(nx)$的$2mn$个周期.令$F(x)=\begin{cases} f(x), x\in[a,b], \\ 0, \quad x\in[A,B]\backslash[a,b], \end{cases}$

于是$F(x)$在 $[A,B]$上可积, 且$I_n\equiv\int_a^b f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_A^B F(x)g(nx)\mathrm{d}x$.

将 $[A,B]2mn$等分, 作分划$A=x_0<x_1<\cdots<x_{2mn}=B$.

每个小区间恰是$g(nx)$的一个周期, 小区间长度等于$\frac{T}{n}$.于是

$$I_n=\int_A^B F(x)g(nx)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{2mn}\int_{x_{i-1}}^{x_i}F(x)g(nx)\mathrm{d}x.$$

注意到$g(x)\geqslant 0$, 应用第一积分中值定理, 得$I_n=\sum_{i=1}^{2mn}c_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\mathrm{d}x$, 其中$c_i: m_i\equiv\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}F(x)\leqslant c_i\leqslant M_i\equiv\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}F(x)$.

因 $[x_{i-1},x_i]$ 是$g(nx)$的一个周期, 令$nx=t$, 则

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}g(nx)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{T}{n}}g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t.$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\sum_{i=1}^{2mn}c_i\frac{T}{n}.$$

且有$\sum_{i=1}^{2mn}m_i\frac{T}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{2mn}c_i\frac{T}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{2mn}M_i\frac{T}{n}$.

其左、右两端分别为$F(x)$在 $[A,B]$上的$Darboux$和.

故 $\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_A^B F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Corollary 4.8

1.$\frac{\pi}{2}=\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.\Longrightarrow\int_0^\pi\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\pi\qquad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\qquad\int_0^\pi\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi$

2.证明 : $\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

Proof 一方面有反常积分判别法我们知道$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$该积分是收敛的

将等式$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$的两边对$t$在 $[0,\pi]$上积分, 得

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

把上式右边的积分写成

$$\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t+\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t.$$

由于 $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2\sin(t/2)}-\frac{1}{t}\right)=0$, 根据$Riemann-Lebesgue$引理, 上式右边中的第一个积分当$n\to\infty$时趋于0, 因而有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

得到 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.在式中作变量代换$x=\lambda t(\lambda>0)$, 又得到 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

Proposition 4.30

1.求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的 $[0,2\pi]$ 和函数

2.证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 不一致收敛.

Proof 当$x=0$或$x=2\pi$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=0$, 当$x\in(0,2\pi)$时

记$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$

则$S_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}.$

于是, 结合$S_n(\pi)=0$有$S_n(x)=S_n(x)-S_n(\pi)=\int_{\pi}^{x}S_n'(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_{x}^{\pi}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}(\pi-x).$

利用黎曼引理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{x}^{\pi}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$的极限函数为$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x), & x\in(0,2\pi)\\ 0, & x=0,2\pi.\end{cases}$

显然$S(x)$在 $[0,2\pi]$ 不连续, 所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在 $[0,2\pi]$ 不一致收敛.

Proposition 4.31

设f是周期为2π的可积且绝对可积函数.

证明：

(1)如果f在 $[-\pi,\pi]$.上满足$f(x+\pi)=-f(x)$, 那么$a_{2n}=b_{2n}=0$.

(2)如果f在 $[-\pi,\pi]$上满足$f(x+\pi)=f(x)$, 那么$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$;

Proof (1)

此时

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}f(x+\pi)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{0}^{\pi}f(t)\cos n(t-\pi)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\left((-1)^{n+1}\int_{0}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow a_{2n}=0$

同理$b_n=\frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n+1}+1\right]\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow b_{2n}=0$

(2)

另外当$f(x+\pi)=f(x)$时

$b_n=\frac{1}{\pi}\left[(-1)^{n}+1\right]\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow b_{2n-1}=0$同理$a_{2n-1}=0$

Proposition 4.32

设a_n,b_n是周期为2π的可积且绝对可积函数f的$Fourier$系数.

证明：平移函数$f(x+h)$的$Fourier$系数是$\widetilde{a_n}=a_n\cos nh+b_n\sin nh,\quad \widetilde{b_n}=b_n\cos nh-a_n\sin nh.$

Proof $\widetilde{a_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,(x+h)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\,(x)\cos n\,(x-h)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nh\cos nx+\sin nh\sin nx)\mathrm{d}x=a_n\cos nh+b_n\sin nh,$

$\widetilde{b_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin n(x-h)\mathrm{d}x==\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nh\sin nx-\sin nh\cos nx)\mathrm{d}x=b_n\cos nh-a_n\sin nh$

Note

设f是以$2l$为周期的函数,通过变量置换$\frac{\pi x}{l}=t$或$x=\frac{lt}{\pi}$可以把f变换成以2π为周期的t的函数$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$.

若f在$[-l,l]$上可积,则F在$[-\pi,\pi]$上也可积,这时函数F的傅里叶级数展开式是$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\ \mathrm{d}t,n=0,1,2,\cdots,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt\ \mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$

因为$t=\frac{\pi x}{l}$,所以$F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=f(x)$.于是得$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ (\forall n\geqslant 0)\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\ (\forall n\geqslant 1)$.这里是以$2l$为周期的函数$f$的傅里叶系数

若函数f在$[-l,l]$上按段光滑,则同样可由收敛定理知道$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$.

Note 偶性延拓

用公式$f(x)=f(-x)\quad(-\pi<x<0)$去做出$f$在$(-\pi,0)$上的定义,使$f$在$(-\pi,\pi)$上成为偶函数.这种补充方法简称为偶性延拓.

这样便有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x\quad(n=0,1,\cdots),$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此,f的$Fourier$级数中只含余弦项：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$,称它为余弦级数.

奇性延拓

即用公式$f(x)=-f(-x)\quad(-\pi<x<0)$来补充$f$在$(-\pi,0)$上的定义.这时,$f$是$(-\pi,\pi)$上的奇函数.于是

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,\cdots),$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

因而f的$Fourier$级数是一个正弦级数：$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$

4.4.2 傅里叶级数的收敛定理

Theorem 4.4.5 (局部化定理与狄利克雷傅里叶积分)

1.固定x_0傅里叶级数的部分和为$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$.

2.设$f\in\mathrm{R}[-\pi,\pi]$.那么f的*Fourier*级数在点$\boldsymbol{x_0}$处是否收敛,以及收玫到什么数值,仅与f在x_0点附近的行为有关.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

Proof 固定x_0,

我们将傅里叶级数的部分和写为如下

$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)$.

把上节中a_k,b_k的表达式代人上式,得

$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos kx\cos kx_0+\sin kx\sin kx_0)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)\mathrm{d}x$.

利用三角恒等式$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\quad(x\neq 2m\pi)$.

即得$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\frac{1}{2}(x-x_0)}\mathrm{d}x$.

由于被积函数以2π为周期,故可把积分区间改为$[x_0-\pi,x_0+\pi]$,再作变量代换$x-x_0=t$

则积分变为$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$.

把上述积分分为两个积为的和:$\int_{-\pi}^{0}+\int_0^{\pi}$.并对前一积分作变量代换$t=-u$,最后得$S_n(x_0)$的积分表达式:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

这个重要的积分称为*Dirichlet*积分,是讨论*Fourier*级数收玫问题的出发点.函数$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$称为*Dirichlet*核.

把积分$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$.写成两部分:$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)$,这里$\delta$是一个任意小的正数.

由于函数$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$在区间$[\delta,\pi]$上可积且绝对可积

由*Riemann – Lebesgue*引理,上一行两部分的第二个部分当$n\to\infty$时趋于0.

因此,当$n\to\infty$时,$S_n(x_0)$的极限存在与否,以及收玫到什么数值,完全取决于式右边中的第一个积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

Lemma 4.2 (Dini 傅里叶级数收敛条件)

设$f\in \mathrm{R}[-\pi,\pi]$.对某个实数$s$,令$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s$.

如果存在$\delta>0$,使得函数$\dfrac{\varphi(t)}{t}$在$[0,\delta]$上可积且绝对可积,那么f的$Fourier$级数在x_0处收敛于s.

Proof 在局部化原理已经证明$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=1.$

于是对任意的s,有

$$S_n(x_0)-s=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t.$$

因为当$t\to 0$时,$2\sin(t/2)\sim t$,由假定,$\varphi(t)/t$在$[0,\delta]$上可积且绝对可积,所以$\dfrac{\varphi(t)}{2\sin(t/2)}$也在$[0,\delta]$上可积且绝对可积

则在$[0,\pi]$上也可积且绝对可积.由$Riemann-Lebesgue$引理,$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t$.当$n\to\infty$时趋于0,因而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=$

s

Note 显而易见,对$x\in[-\pi,\pi]$,只要存在某个$\delta>0$,使$\dfrac{\varphi_\sigma(u,x)}{u}=\dfrac{f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)}{u}$

关于u在$[0,\delta]$上可积或绝对可积(这被称为$Dini$条件),就可以由$Riemann$引理导出上面的结果.

现假设点x是$f(x)$的连续点或第一类不连续点,而上述积分的极限存在与否只涉及$\dfrac{\varphi_\sigma(u,x)}{u}$当$u\to 0$时的性质

显然,要满足$Dini$条件首先必须有$\lim\limits_{u\to 0}[f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)]=0$

即必须有$\sigma(x)=\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$(显然当$f(x)$在点$x$连续时,有 $\sigma(x)=f(x)$)

于是,问题最终转化为研究使得$\lim\limits_{p\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\delta}\left[f(x+u)+f(x-u)-2\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=0$成立的条件

这是探索$Fourier$级数收敛性的一把钥匙.

Definition 4.15 (分段单调函数)

设函数f在$[a,b]$(或(a,b))上有定义.

如果在$[a,b]$(或(a,b))上存在有限个点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$

使得f在每个区间(x_{i-1},x_i) $(i=1,2,\cdots,N)$上是单调函数,则称f在$[a,b]$(或(a,b))上分段单调.

Definition 4.16 (傅里叶级数收敛的 Holder 条件)

设f是定义在x_0附近的函数,若对于充分小的正数δ,存在常数$L>0$和$\alpha\in(0,1]$

使得当$t\in(0,\delta]$时成立$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<Lt^{\alpha}$ $\quad|f(x_0-t)-f(x_0-0)|<Lt^{\alpha}$

则称$f(x)$在点x_0处满足指数为$\alpha\in(0,1]$的$Hylder$条件(当$\alpha=1$也称为$Lipschitz$条件).

Definition 4.17 (分段可微函数)

如果存在$[a,b]$的一个分割$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

使得按以下方式定义在每个子区间$[t_{i-1},t_i]$上的函数$g_i(x)=\begin{cases}f(t_{i-1}+0), & x=t_{i-1},\\ f(x), & x\in(t_{i-1},t_i)\\ f(t_i-0), & x=t_i\end{cases}$ $(i=1,\cdots,n)$,

都是可微的(在两个端点处单侧可微),则称函数f在$[a,b]$上是分段可微的.

Theorem 4.4.6 (Dini-Holder 判别法)

设$f \in \mathrm{R}[-\pi,\pi]$.如果$f$在$x_0$附近满足$\alpha$阶$Lipschitz$条件
那么f的$Fourier$级数在x_0处收玫于$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Proof 在$Dini$傅里叶级数收敛条件引理中取$s=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$,于是
$\dfrac{\varphi(t)}{t}=\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}+\dfrac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}$.
因为f在x_0附近满足α阶$Lipschitz$条件,所以$\left|\dfrac{\varphi(t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{2L}{t^{1-a}} \quad (0<t\leqslant\delta)$.
当$\alpha=1$时,$\dfrac{\varphi(t)}{t}$是有界函数;当$0<\alpha<1$时,由反常积分判别法知道$\dfrac{\varphi(t)}{t}$在$[0,\delta]$上绝对可积.从而$Dini$判别法的条件成立.

Corollary 4.9

设$f \in \mathrm{R}[-\pi,\pi]$.
(1)如果f在x_0处存在导数$f'(x_0)$
或者有两个有限的单侧导数:$f'_+(x_0)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \qquad f'_-(x_0)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t}$
那么f的$Fourier$级数在x_0处收玫于$f(x_0)$.
(2)如果f在x_0处仅有两个有限的广义单侧导数:$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \qquad \lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}$
那么f的$Fourier$级数在x_0处收玫于$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Proof
设f在x_0处有两个有限的单侧导数,从而存在$\delta>0$,当$0<t<\delta$时,有$|f(x_0+t)-f(x_0)|\leqslant Lt, \quad |f(x_0-t)-f(x_0)|\leqslant Lt$.
这说明f在x_0的附近满足1阶$Lipschitz$条件.在其他几种情况下也能推出同样的结论.
由定理即知f的$Fourier$级数收玫于$(f(x_0+0)+f(x_0-0))/2$.

Corollary 4.10

如果周期为2π的函数f在$[-\pi,\pi]$上是分段可微的,那么f的$Fourier$级数在每点x_0处收玫于$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.
特别是在f的连续点处,它收玫于$f(x_0)$.

Theorem 4.4.7 ($Dirichlet-Jordan$判别法)

1.设函数$\psi(u)$在$[0,\delta]$上单调,则成立$\lim\limits_{p\to+\infty}\displaystyle\int_0^\delta\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u=0.\left(\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^\delta\psi(u)\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\psi(0+)\right)$
2.$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积或绝对可积,此时若$f(x)$在点x_0的某个邻域$O(x_0,\delta)$上是分段单调有界函数
$\Longrightarrow$ 那么$f(x)$的傅里叶级数在x_0点收敛到$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Proof 我们先证:设函数$\psi(u)$在$[0,\delta]$上单调,则成立$\lim\limits_{p\to+\infty}\displaystyle\int_0^\delta\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u=0$.
不妨设$\psi(x)$单调增加.于是$\forall\varepsilon>0$,存在$\eta\in(0,\delta)$,当$u\in(0,\eta]$时,$0\leqslant\psi(u)-\psi(0+)<\varepsilon$.
将积分分为两部分
$$\int_0^\delta\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u=\int_0^\eta\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u+\int_\eta^\delta\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u.$$
对等式右边的第一项,由积分第二中值定理,存在$\xi\in[0,\eta]$,
$$\left|\int_0^\eta\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u\right|=[\psi(\eta)-\psi(0+)]\cdot\left|\int_\xi^\eta\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u\right|<\left|\int_\xi^\eta\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u\right|\cdot\varepsilon=\left|\int_{p\xi}^{p\eta}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|\cdot\varepsilon,$$
利用含参变量积分中已经得到的结论$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,可知存在与$p$无关的常数$K$,使得$\left|\displaystyle\int_{p\xi}^{p\eta}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|<K$
即$\left|\displaystyle\int_0^\eta\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u\right|<K\varepsilon$

而对右边的第二项，由于$\dfrac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}$在 $[\eta,\delta]$上显然是可积或绝对可积的

由$Riemann$引理，存在常数$P>0$，当$p>P$时，有$\left|\displaystyle\int_\eta^\delta [\psi(u)-\psi(0+)]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u\right|<\varepsilon$.

如果$\psi(u)$是分段单调有界函数，易知该引理依然成立.

当$f(x)$满足条件在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，此时若$f(x)$在点x_0的某个邻域$O(x_0,\delta)$上是分段单调有界函数时

由$Dirichlet$引理，

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^\delta \frac{f(x+u)-f(x+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u=0,$$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^\delta \frac{f(x-u)-f(x-)}{u}\sin pu\mathrm{d}u=0,$$

两式相加，即有 $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^\delta\left[f(x+u)+f(x-u)-2\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=0$.

Proposition 4.33

1.设f是周期为2π的函数，且$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 2\pi,\\ 2\pi, & x=0.\end{cases}$ 写出它的$Fourier$级数.

并证明：$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots=\dfrac{\pi}{4}$. $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}\right)$

2.把函数$f(x)=x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开为$Fourier$级数.

并证明：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$且$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$且$\displaystyle\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

Proof 1.把f的定义扩充到整个数轴上，使之成为周期为2π的函数.把扩充定义后的函数记为$\tilde f$，那么$\tilde f$是 $(-\infty,+\infty)$上的周期为2π的连续

于是

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x^2\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

因为$\tilde f$是分段可微的，即得$\widetilde{f}(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx$，限制在区间 $[-\pi,\pi]$上

有$x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$

取$x=\pi$，则得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

取$x=0$，则得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

二者做和不难得到$\displaystyle\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$与$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$

2.按定义，有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\mathrm{d}x=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$

从而有$f(x)\sim\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$, 或者$x\sim\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\quad(0<x\leqslant 2\pi)$

由傅里叶级数收敛定理知是分段可微的故$x=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

故此时我们取$x=\frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}\right)$

Proposition 4.34

1.把$f(x)=\cos ax(a\notin Z)$在$[-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数.

2.$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\quad(a\notin \mathrm{Z}).$

Proof 把f延拓为整个数轴上的以2π为周期的函数.记延拓后的函数为$\tilde{f}$, 那么$\tilde{f}$是$(-\infty,+\infty)$上的周期为2π的连续偶函数.因此

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x+\cos(a+n)x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}+\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right)\\&=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2}\quad(n=0,1,2,\cdots),\end{aligned}$$

$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$

由Dini判别法, 即得$\tilde{f}$的Fourier展开式为$\tilde{f}(x)=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right).$

限制在$[-\pi,\pi]$上, 就得

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right).\quad x\in[-\pi,\pi]$$

如果在上式中取$x=0$, 可得$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\quad(a\notin \mathrm{Z}).$

Proposition 4.35

证明 : $\forall x\in(0,2\pi)$ 以及$a\neq 0$有 :

1.$\mathrm{e}^{ax}=\frac{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{n^2+a^2}\right).$

2.进而得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a}\left(\pi\coth(\pi a)-\frac{1}{a}\right)$

Proof 在$(0,2\pi)$上把 e^{ax}展成傅里叶级数.因为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ax}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos nx+n\sin nx)}{n^2+a^2}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{a\left(\mathrm{e}^{2a\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+a^2\right)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{ax}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{n^2+a^2}\bigg|_0^{2\pi}=-\frac{n\left(\mathrm{e}^{2a\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+a^2\right)}$$

所以 $\mathrm{e}^{ax}=\frac{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{n^2+a^2}\right).$

此时我们根据收敛定理就有$\frac{e^{a0}+e^{a\cdot 2\pi}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n^2+a^2}\right)$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a}\left(\pi\coth(\pi a)-\frac{1}{a}\right)$$
$$\coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

Proposition 4.36

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\ (-\pi<x<\pi)$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\ (0<x<2\pi)$.

Proof (1)把 $\ln(2\cos(x/2))$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展成傅里叶级数.因为这是一个偶函数,所以 $b_n=0$.又

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\pi\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x\right)=2\ln 2-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x=0\ (\text{可参照反常积分计算中})$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\sin nx=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令t=\pi-x}\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x+\sin(n-1/2)x}{2\sin(x/2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx+\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx\right)\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\ (-\pi<x<\pi)$$

(2)我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n(x-\pi)}{n}=\ln\left(2\cos\frac{x-\pi}{2}\right)\ (0<x<2\pi)$

化简即可

4.4.3 傅里叶级数的切萨罗求和

Definition 4.18

设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$是一个无穷级数, $\{S_n\}$是它的部分和数列.

如果$\{S_n\}$的算术平均$\sigma_n = \frac{S_1+\cdots+S_n}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$是一个收玫数列, 即$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$

就称级数$\sum_{n-1}^{\infty} a_n$在$Cescro$意义下收敛(或均值意义下收敛)

σ称为级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的$Cescro$和, 记为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma(C)$.这时, 称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$可以$Cescro$求和

Lemma 4.3

1.$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t = 1$

2.f傅里叶级数的切萨罗部分和 : $\sigma_n(x_0) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t,$

Proof 现设$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{x}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$.

它的部分和$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$

因而它的算术平均

$$\sigma_n(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \mathrm{d}t,$$

这里我们用了三角恒等式$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin(t/2)}$.

上面的式子对任何可积且绝对可积的f都成立.

特别地, 取$f=1$, 这时$S_n(x_0)=1$. $\left(\text{因为}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\right)$

所以$\sigma_n(x_0)=1$, 代人式, 得$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t = 1$

Theorem 4.4.8 (Fejer 傅里叶级数切萨罗收敛定理)

设$f\in R[-\pi,\pi]$.如果f在x_0处有左、右极限$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$

$\Longrightarrow$ 那么它的Fourier级数在x_0处的Cescro和为$\frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$.

特别地,当f在x_0处连续时,它的Fourier级数的Cescro和即为$f(x_0)$.

Proof 记$s=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.我们要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=s$.

根据式引理可得

$$\sigma_n(x_0)-s=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi\left(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s\right)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi\varphi(t)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin t/2}\right)^2\mathrm{d}t,$$

这里$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s$.由于左、右极限$f(x_0-0)$和$f(x_0+0)$都存在,故

$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta\in(0,\pi)$,当$0<t<\delta$时,$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\quad|f(x_0-t)-f(x_0-0)|<\frac{\varepsilon}{2}\Longrightarrow$ 即$|\varphi(t)|<\varepsilon$.

把式$\sigma_n(x_0)-s=\dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_0^\pi\varphi(t)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin t/2}\right)^2\mathrm{d}t$写成两个积分:

$$\sigma_n(x_0)-s=\frac{1}{2n\pi}\left(\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right)=I_1+I_2.$$

分别估计这两个积分,得

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta|\varphi(t)|\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t$$
$$<\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\delta\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2},$$
$$|I_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi|\varphi(t)|\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2n\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^\pi|\varphi(t)|\mathrm{d}t=\frac{A}{n},$$

其中$A=\left(2\pi\sin^2\frac{\delta}{2}\right)^{-1}\displaystyle\int_0^\pi|\varphi(t)|\mathrm{d}t$是一个常数.

故当$n>2A/\varepsilon$时,$|\sigma_n(x_0)-s|\leqslant|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Corollary 4.11

设$f\in R[-\pi,\pi]$.如果f在x_0处有左、右极限,且其Fourier级数在x_0处收玫,那么必收玫于$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Proof 设f的Fourier级数在x_0处收玫于s,则其Cescro和也必为s.

由定理知,其Cescro和为$\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)/2$,故得$s=\frac{1}{2}\left(f(x_0+0)+f(x_0-0)\right)$.

Corollary 4.12

如果f是周期为2π的连续函数,那么它的Fourier级数在Cescro意义下在$(-\infty,+\infty)$上一致收玫于f.

Proof 根据之前上个定理的推导,有$\sigma_n(x)-f(x)=\dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_0^\pi\varphi_x(t)\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t$,其中$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$.

由于f是整个数轴上的连续函数,故在闭区间$[-2\pi,2\pi]$上一致连续.

对给定的$\varepsilon>0$,存在$\delta\in(0,\pi)$,当$0\leqslant t<\delta$时,不等式

$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\quad|f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$对$[-\pi,\pi]$中所有$x$成立.

因而$|\varphi_x(t)|<\varepsilon$对$[-\pi,\pi]$中所有$x$成立.与上个定理的证明一样,把拆成两个积分:

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\left(\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right)=I_1+I_2.$$

易知$|I_1|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2n\pi}\displaystyle\int_0^\pi\left(\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}$.

估计I_2时,注意到f是$[-\pi,\pi]$上的周期为2π的连续函数,故在$(-\infty,+\infty)$上,有$|f(x)|\leqslant M$.

于是当$x\in[-\pi,\pi],t\in[0,\pi]$时,$|\varphi_x(t)|\leqslant|f(x+t)|+|f(x-t)|+2|f(x)|\leqslant 4M$

因而 $|I_2| \leqslant \dfrac{1}{2n\pi}\displaystyle\int_{\delta}^{\pi}|\varphi_x(t)|\dfrac{\mathrm{d}t}{\sin^2\dfrac{t}{2}} \leqslant \dfrac{2M}{n\sin^2\dfrac{\delta}{2}}$.

所以当$n > 4M\Big/\left(\varepsilon\sin^2\dfrac{\delta}{2}\right)$时, $|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant |I_1| + |I_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$对 $[-\pi, \pi]$中所有x成立.

由周期性, 上式对 $(-\infty, +\infty)$中所有x成立.

Theorem 4.4.9

如果f在 $[-\pi, \pi]$上连续, 且$f(-\pi) = f(\pi)$, 那么f必能用三角多项式一致逼近.

Proof 根据假定, 我们能把f延拓成整个数轴上的以2π为周期的连续函数.

于是由$Fej\ell r$定理知, f能在 $(-\infty, +\infty)$上用序列 $\underbrace{\{\sigma_n(x)\}}_{\text{切萨罗部分和}}$ 一致逼近.

因为f的$Fourier$级数的k次部分和$S_k(x)$是一个k次角多项式

所以$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\left(S_0(x) + \cdots + S_{n-1}(x)\right)$是一个$n-1$次三角多项式

它就是一个一致逼近f的三角多项式序列.

上面这个证明虽然简单, 却是个构造性的证明, 因为它给出了用来一致逼近f的三角多项式σ_n, 它就是f的$Fourier$级数部分和的算术平

4.4.4 平凡平均逼近

Note 前面已经证明,周期为2π的连续函数能用三角多项式一致逼近.对一般的可积函数,这个结论不再成立.问题出在哪里呢?
所谓一致逼近,是指 $\sup\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)-T_n(x)|\to 0\quad(n\to\infty)$.
这就要求f与T_n之差在整个区间$[-\pi,\pi]$:均匀地趋于0,而不允许有某些点例外.
由于连续函数在邻近点处的值相差很小,这点能办到,而对一般的可积函数就做不到了.
在这种情况下,我们只能放弃一致逼近,退而求其次,要求能用三角多项式T_n平均地逼近f,即要求
$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x\to 0\quad(n\to\infty)$.
这时,我们要求对f增加一些条件.
如果f是$[-\pi,\pi]$上的有界函数,我们假定它是*Riemann*可积的,因而f^2也是*Riemann*可积的;
如果f是$[-\pi,\pi]I$:的无界函数,我们假定f^2是反常可积的.从不等式$|f|\leqslant\frac{1}{2}\left(1+|f|^2\right)$知,$f$是反常绝对可积的,因而反常可积.
把$[-\pi,\pi]$上:这种函数的全体记为$\mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$.

Definition 4.19

设$f\in\mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$.如果存在三角多项式序列$\{T_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x=0$
则称$\{T_n\}$平方平均收敛于f,或者称f可用三角多项式平方平均逼近.

Proposition 4.37

例如,函数系$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$是$[-\pi,\pi]$上的正交系
而$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots\right\}$是$[-\pi,\pi]$上的规范正交系.

Definition 4.20 (广义傅里叶系数)

设$\{\varphi_k\}$是$\mathrm{R}^2[a,b]$中一个给定的规范正交系.
对任意的$f\in\mathrm{R}^2[a,b]$,称$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\quad(k=0,1,\cdots)$为$f$关于正交系$\{\varphi_k\}$的*Fourier*系数.
由此产生的级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$称为$f$关于正交系$\{\varphi_k\}$的*Fourier*级数,记为$f(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$.
前面讨论的*Fourier*级数只是对特定的规范正交系而言的.
与以前一样,记$S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)$为的部分和.称$T_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$为$n$次$\varphi$多项式,其中$\alpha_k$是任意给定的实数.

Lemma 4.4

傅里叶级数的部分和的极值性质 对于任一$T_n(x)=\sum_{k=0}^n\alpha_k\varphi_k$ $\quad\|f-T_n\|$最小当且仅当$\alpha_k=\langle f,\varphi_k\rangle=c_k$

Proof 现在问,对于给定的f和正整数n,怎样的φ多项式T_n使范数$\|f-T_n\|=\left(\int_a^b(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$取最小值,即平方平均误差最小
根据$\{\varphi_k\}$的规范正交性以及等式(2),有

$$\|f-T_n\|^2=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b f(x)T_n(x)\mathrm{d}x+\int_a^b T_n^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=\|f\|^2-2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x$$
$$=\|f\|^2-2\sum_{k=0}^{n}c_k\alpha_k+\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2$$
$$=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2+\sum_{k=0}^{n}(c_k-\alpha_k)^2.$$

由此看出.当且仅当$\alpha_k=c_k\quad(k=0,1,\cdots,n)$时,$\|f-T_n\|^2$才取到最小值

Theorem 4.4.10

设$f \in \mathrm{R}^2[a,b]$, $\{\varphi_k\}$是$\mathrm{R}^2[a,b]$中的一个规范正交系, $\{c_k\}$是f关于$\{\varphi_k\}$的$Fourier$系数.那么:

(1)对任意的正整数n及实数$\alpha_0,\cdots,\alpha_n$, 有$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\| \geqslant \left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|$

(2) $\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=0}^{n}c_k^2$

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2 \leqslant \| f \|^2$.

Definition 4.21 (bessel 不等式与 Pareval 等式)

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2 \leqslant \|f\|^2 \qquad \sum_{k=1}^{\infty}c_k^2 = \|f\|^2$$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x. \qquad \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Definition 4.22

设$\{\varphi_k\}$是$\mathrm{R}^2[a,b]$中的一个规范正交系.

如果对任意的$f \in \mathrm{R}^2[a,b]$.均有$Parseval$等式$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2 = \|f\|^2$成立, 则称$\{\varphi_k\}$是完备的

Proposition 4.38

由引理知道规范正交系$\{\varphi_k\}$是完备的$\Longleftrightarrow$对任意的$f \in \mathrm{R}^2[a,b]$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2 = 0$

即f可用它的$Fourier$级数的部分和平方平均逼近.

Note 下面先对三角函数系写出$Parseval$等式.

令$\varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2k-1}(x) = \dfrac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2k}(x) = \dfrac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \quad (k = 1,2,\cdots).$

对任意的$f \in \mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$, 有

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$$

$$c_{2k-1} = \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_{2k-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}a_k$$

$$c_{2k} = \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_{2k}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}b_k,$$

这里a_k,b_k是$\dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$中定义的$Fourier$系数.

于是$\sum_{k=0}^{2n}c_k\varphi_k(x) = \dfrac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.这时$Bessel$不等式和$Parseval$等式分别为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Theorem 4.4.11

设$f \in \mathrm{R}^2[-\pi,\pi], a_n, b_n$是$f$于三角函数系的Fourier系数

那么f可用它的Fourier级数的部分和平方平均逼近,即Parseval等式成立$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x.\right)$

Proof 分两步来证明.

(a)设f在$[-\pi,\pi]$上Riemann可积.因为f在$[-\pi,\pi]$上Riemann可积故

对$\varepsilon > 0$, 存在$[-\pi,\pi]$的一个分割$-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = \pi$, 使得$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4\Omega}$

其中$\omega_i = M_i - m_i$是f在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅,$\Omega = M - m$是f在$[-\pi,\pi]$上的振幅.

改变f在区间端点$-\pi$或π的值,使得$f(-\pi) = f(\pi)$.这种改变当然不会影响f的Fourier系数.

用直线将点$(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$和$(x_i, f(x_i))$连接起来,得到区间$[-\pi,\pi]$上的一条折线.

设此折线的方程为$y = g(x)$,它当然是$[-\pi,\pi]$上的连续函数,而且满足$g(-\pi) = g(\pi)$.

根据上一章的三角多项式逼近定理,存在三角多项式$T_{n_0}(x)$,使得$\left|g(x) - T_{n_0}(x)\right| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$

因而$\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x < \frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2\pi = \frac{\varepsilon}{4}$.

我们有$f(x) - T_{n_0}(x) = (f(x) - g(x)) + \left(g(x) - T_{n_0}(x)\right)$.

我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x) - T_{n_0}(x)\right) \times (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right)$$

$$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant 2 \times \left[\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x\right]$$

$$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

由于当$x \in [x_{i-1}, x_i]$时,$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i, \quad m_i \leqslant g(x) \leqslant M_i$,所以$|f(x) - g(x)| \leqslant M_i - m_i = \omega_i$.

于是有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x) - g(x))^2 \mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{m}\omega_i^2 \Delta x_i \leqslant \Omega\sum_{i=1}^{m}\omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

综合起来即得$\left\|f - T_{n_0}\right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - T_{n_0}(x)\right)^2 \mathrm{d}x < \varepsilon$.

根据Fourier级数部分和S_n的极值性质,有$\left\|f - S_{n_0}\right\|^2 \leqslant \left\|f - T_{n_0}\right\|^2 < \varepsilon$.

从定理(2)可以看出,$\|f - S_n\|^2$随n的增大而递减,因此,当$n > n_0$时,有$\|f - S_n\|^2 \leqslant \left\|f - S_{n_0}\right\|^2 < \varepsilon$.

这就证明了$\lim_{n\to\infty}\|f - S_n\| = 0$.

$\Longrightarrow$ 知Parseval等式成立.

(b)设f在$[-\pi,\pi]$.上反常平方可积.由于$f \in \mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$,所以$f^2$可积.

不妨设π是f的瑕点.于是对$\varepsilon > 0$,存在$\eta > 0$,使得$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$.

作函数$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & -\pi \leqslant x \leqslant \pi - \eta \\ 0, & \pi - \eta < x \leqslant \pi \end{cases}$ 与$f_2(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant \pi - \eta, \\ f(x), & \pi - \eta < x \leqslant \pi. \end{cases}$

显然,有$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.由于f_1在$[-\pi,\pi]$上Riemann可积

故由(a)证明的结论知,存在三角多项式$T(x)$,使得$\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x) - T(x))^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$.

于是同(a)的过程我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T(x))^2\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x) - T(x))^2 \mathrm{d}x + 2\int_{-\pi}^{\pi} f_2^2(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + 2\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x < \varepsilon$$

同理(a)的讨论有这就证明了$\lim_{n\to\infty}\|f - S_n\| = 0$.

$\Longrightarrow$ 知Parseval等式成立.

Corollary 4.13

1.如果 $[-\pi,\pi]$上的连续函数f和三角函数系$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$中的每一个函数都正交 $\Longrightarrow$ 那么必有$f=0$.

2.如果两个连续函数有相同的$Fourier$级数, 则这两个连续函数必恒等.

Proof 1.根据假定, 可得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是由$Parseval$等式, 得出 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0$, 再由$f$的连续性即得$f=0$.

2.设连续函数f和g有相同的$Fourier$级数, 那么$f-g$的$Fourier$系数全为0.由$Parseval$等式, 知$f-g=0$, 即$f=g$.

Proposition 4.39

设$f,g\in \mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$, a_n,b_n和α_n,β_n分别是f和g的$Fourier$系数, 那么$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n)$.

Proof 分别写出$f+g$和$f-g$的$Parseval$等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2\Big),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2\Big),$$

两式相减, 即得式

Note 从证明过程中看出我们实际上关键是要有两个帕萨瓦尔等式成立, 故条件更强例如变为了: 傅里叶级数一致收敛了自然也是成立的

Proposition 4.40

设a_n,b_n是$f\in\mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$的$Fourier$系数.证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛

Proof 这是因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{12}$.

Theorem 4.4.12 (Wirtinger 定理)

设f在 $[-\pi,\pi]$.上连续, 且在此区间上有可积且平方可积的导数f'.如果f满足$f(-\pi)=f(\pi)$, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$

证明: $\int_{-x}^{\pi}(f'(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$.等式当且仅当$f(x)=\alpha\cos x+\beta\sin x$时成立.

Proof 将$f(x)$延拓为 $(-\infty,+\infty)$上的周期为2π的连续周期函数, 那么$f(x)$有傅里叶展开$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

其中$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$.又$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx)$

所以根据帕塞瓦尔等式有 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leqslant \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \mathrm{d}x.$
等号成立当且仅当当$n \geqslant 2$时$a_n = b_n = 0$, 亦即$f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$.

Theorem 4.4.13 (傅里叶级数的逐项积分定理)

设$f \in \mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$, 其Fourier级数为$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 那么对包含在$[-\pi,\pi]$中的任意区间$[a,b]$, 有
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\mathrm{d}x.$

Proof 任取$g \in \mathrm{R}^2[-\pi,\pi]$, 其Fourier级数为$g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$.把
$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \mathrm{d}x (n = 0, 1, \cdots)$,
$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \mathrm{d}x (n = 1, 2 \cdots)$,
代人推广的Parseval等式, 即得
$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} g(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)\mathrm{d}x.$
上式对任何$g \in \mathrm{R}[-\pi,\pi]$都成立.
现取$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & x \in [-\pi,a) \cup (b,\pi] \end{cases}$
就变成 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\mathrm{d}x$.这就是要证明的.
这个定理说明, f的Fourier级数不论是否收玫, 都永远可以逐项积分.这是Fourier级数特有的性质.

Note 我们再本节开头就提到一个傅里叶级数未必一致收敛到函数本身，所以我们考虑的是平方逼近，那么反过来什么时候会有一致收敛到本身，一致收敛时帕塞瓦尔不等式是否成立？

Proposition 4.41

设f是以2π为周期的且具有二阶连续导函数.证明：f的傅里叶级数在$\mathbb{R}$上一致收敛到f

Proof 由题得到f与f'都可以展开为傅里叶级数：

$$f=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad f'=\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n'\cos nx+b_n'\sin nx$$

由f的周期性不难得到$a_0'=0$ $\quad a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x=nb_n \quad b_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=-na_n$

此时 $|a_n|+|b_n|=\frac{1}{n}|b_n'|+\frac{1}{n}|a_n'|\leqslant\frac{1}{2}\left[(b_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{2}\left[(a_n')^2+\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\left((a_n')^2+(b_n')^2\right)$

而由$Bessel$不等式我们知道$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n')^2+(b_n')^2$该级数是收敛的

故 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n')^2+(b_n')^2<\infty$

由$Wiestress$判别法知道$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$一致收敛

Proposition 4.42

设$f\in[-\pi,\pi]$上的可积函数

证明：若f的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于f则成立帕萨瓦尔等式

Proof 我们有$Bessel$不等式的证明过程中知道

其中$S_m=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}a_k\cos kx+b_k\sin kx$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f-S_m]^2\,\mathrm{d}x=\|f-S_m\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{k=1}^{m}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

此时因为f的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于f

故$\forall\varepsilon,\exists N>0$，当$m\geqslant N$时，$|f-S_m|<\varepsilon$ ($\forall x$成立)

故 $\int_{-\pi}^{\pi}[f-S_m]^2\,\mathrm{d}x<2\pi\varepsilon^2$

$\Longrightarrow$ 帕萨瓦尔等式成立

4.4.5 收敛定理证明

Theorem 4.4.14 (贝塞尔 Bessel 不等式)

若函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 则

$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$, 其中 a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数

Proof 令 $S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. 考察积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}S_m^2(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由于 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{m}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right)$

$$\text{根据傅里叶系数公式可得}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{m}\left(a_n^2+b_n^2\right). \tag{3}$$

对于 $S_m^2(x)$ 的积分, 应用三角函数的正交性, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}S_m^2(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]^2\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{m}\left[a_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\mathrm{d}x+b_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2nx\mathrm{d}x\right]\text{ 将 (3) 式、(4) 式代入 (2) 式, 可得}\\&=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{n=1}^{m}\left(a_n^2+b_n^2\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\frac{\pi a_0^2}{2}-\pi\sum_{n=1}^{m}\left(a_n^2+b_n^2\right).\end{aligned}$$

因而 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 对任何正整数 m 成立. 而 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$ 为有限值

所以正项级数 $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ 的部分和数列有界, 因而它收敛且有 *Bessel* 不等式成立.

Corollary 4.14 (黎曼勒贝格定理)

若 f 为可积函数, 由 *Bessel* 不等式知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2$ 收敛, 那么 $a_n^2+b_n^2\to0\Rightarrow a_n\to0,b_n\to0$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{-\pi}f(x)\cos nxdx=0\quad and\quad\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{-\pi}f(x)\sin nxdx=0$

Corollary 4.15

若 f 为可积函数, 则 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx=0\\\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx=0\end{cases}$

Proof 证由于 $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x=\cos\frac{x}{2}\sin nx+\sin\frac{x}{2}\cos nx$, 所以

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\pi}\left[f(x)\cos\frac{x}{2}\right]\sin nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\left[f(x)\sin\frac{x}{2}\right]\cos nx\mathrm{d}x\text{其中}$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$
$$F_1(x)=\begin{cases}f(x)\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x<0,\end{cases}\quad F_2(x)=\begin{cases}f(x)\sin\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi\leqslant x<0.\end{cases}$$

显见F_1与F_2和f一样在$[-\pi,\pi]$上可积.由推论易知同样可以证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\mathrm{d}x=0.$

Theorem 4.4.15

若$f(x)$是以2π为周期的函数,且在$[-\pi,\pi]$上可积,则傅里叶级数部分和$S_n(x)$

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\ \text{其中}t=0\text{时},\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}\text{来确定}$$

Proof 在傅里叶级数部分和$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$中,用傅里叶系数公式代人,可得

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos ku\mathrm{d}u\right)\cos kx+\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin ku\mathrm{d}u\right)\sin kx\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx)\right]\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]\mathrm{d}u.$$

令$u=x+t$,得$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\right]\mathrm{d}t$.由上面这个积分看到,被积函数是周期为$2\pi$的函数

因此在$[-\pi-x,\pi-x]$上的积分等于$[-\pi,\pi]$上的积分

且有$\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$那么就得到$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$

下面我们就来证明收敛定理

Theorem 4.4.16 (收敛定理)

若以2π为周期的函数f在$[-\pi,\pi]$上按段光滑,则在每一点$x\in[-\pi,\pi]$, f的傅里叶级数收敛于f在点x的左、右极限的算术平均值

即$\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$,其中$a_n,b_n$为$f$的傅里叶系数.

Proof 证只要证明在每一点x处下述极限成立:$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-S_n(x)\right]=0$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right]=0$

$$\text{或证明同时有}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right]=0 \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x-0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\right]=0 \tag{2}$$

现在先证明1式.我们知道 $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt$ 积分有 $\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kt\right)\mathrm{d}t=1.$

由于上式左边为偶函数, 因此两边乘以 $f(x+0)$ 后得到 $\dfrac{f(x+0)}{2}=\dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+0)\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$.从而 (1)式可改写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=0. \tag{3}$$

令 $\varphi(t)=-\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}=-\left[\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right]\dfrac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}},\quad t\in(0,\pi].$

得 $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=-f'(x+0)\cdot 1=-f'(x+0)$.

再令 $\varphi(0)=-f'(x+0)$, 则函数 φ 在点 $t=0$ 右连续.因为 φ 在 $[0,\pi]$ 上至多只有有限个第一类间断点

所以 φ 在 $[0,\pi]$ 上可积.根据推论3.2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t=0.$$

这就证得 (3)式成立, 从而 (1)式成立.用同样方法可证 (2)式也成立.

Theorem 4.4.17

设 f 以 2π 为周期且具有二阶连续的导函数, 证明 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收玫于 f

Proof 要证 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.可证明级数 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收玫加之 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的傅里叶系数关系

由贝塞尔不等式及正项级数的比较判别法可证得 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 是收玫的

证明由题设知 $f(x)$ 可展成傅里叶级数, 即 $f(x)=\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数函数, 知 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积, 且由 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的傅里叶系数的关系是

$a_0'=0, a_n'=nb_n, b_n'=-na_n(n=1,2,\cdots)$ 故 $|a_n|+|b_n|=\dfrac{|a_n'|}{n}+\dfrac{|b_{nn}'|}{n}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(a_n'^2+\dfrac{1}{n^2}\right)+\dfrac{1}{2}\left(b_n'^2+\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)+\dfrac{1}{n^2}$

由 Bessel 不等式知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)$ 收玫, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 也收玫, 应用正项级数的比较法, 即推得级数 $\dfrac{|a_0|}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收玫

由定理可知 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

Theorem 4.4.18 (帕塞瓦尔 Parseval 不等式)

设 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上可积函数.证明：若 f 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f, 则成立帕塞瓦尔 $(Parseval)$ 等式：

$\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$, 这里 a_n,b_n 为 f 的傅里叶系数.

Proof 由 *Bessel* 不等式我们有 $=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\dfrac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum\limits_{n=1}^{m}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ 那么只需证：$\lim\limits_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\,dx=0$

设 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \ x\in[-\pi,\pi]$ $\quad .S_m(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \ x\in[-\pi,\pi]$

因为 f 的傅里叶级数一致收敛到 f. 所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N$, $\forall m\geqslant N$, 有 $|f(x)-S_m(x)|<\varepsilon$

故有 $0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\,dx\leqslant 2\pi\varepsilon^2\Rightarrow\lim\limits_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2\,dx=0$

$$\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{n=1}^{m}\left(a_n^2+b_n^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{dx}=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

4.4.6 级数计算

Example 4.35 1. $\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k-1}\right)$

2. $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k-1}\right)$

3. $\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k-1}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-\ln(1-x)$

5.

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{1+x}dx=\int_0^1\frac{\ln y}{2-y}dx=\int_0^1\frac{\ln\frac{y}{2}}{2-y}dy+\int_0^1\frac{\ln 2}{2-y}dy=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln t}{1-t}dt+\ln^2 2$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt+\ln^2 2=\left(\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt\right)+\ln^2 2$$

$$=\left(-\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt\right)+\ln^2 2$$

$$=\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{t^{n-1}}{n}dt-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt\right)+\ln^2 2$$

$$=\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt\right)+\ln^2 2$$

$$=\left(-\frac{\pi^2}{6}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt\right)+\ln^2 2$$

6. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\ln(1-t)\,d\ln t=\ln^2 2+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln t}{1-t}=\ln^2 2+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt$

故有 $\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\ln^2 2\\ \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-t)}{t}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\frac{\pi^2}{6}\end{cases}$

第 5 章 多元微分学

5.1 多元函数的极限连续性

5.1.1 极限定义

Definition 5.1 (多元函数极限的定义)

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中$D \subseteq \mathbb{R}^n$.设$\boldsymbol{x}_0$是D的一个极限点.若对于l的$\forall$邻域$N_\varepsilon(l)$, 都$\exists \boldsymbol{x}_0$的一个去心邻域$\check{N}_\delta(x_0)$使得$f\left[\check{N}_\delta(x_0) \cap D\right] \subseteq N_\varepsilon(l)$则称当$x \to x_0$时函数$f$在$x_0$处的极限是$l$, 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ 或$f(x) \to l\,(x \to x_0)$.

注

以上定义也可以用$\varepsilon-\delta$语言写成：若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$使得当$x \in D$且$0 < \|x - x_0\| < \delta$时都有$|f(\boldsymbol{x}) - l| < \varepsilon$.则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

以上定义中的x_0是D的一个极限点, 但不一定在D中.

Theorem 5.1.1

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中$D \subseteq \mathbb{R}^n$.设x_0是D的一个极限点.则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

$\Leftrightarrow$ 对于$\forall$收敛于$\boldsymbol{x}_0$的点列$\{\boldsymbol{x}_k\} \subseteq D\,(\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}_0, k = 1, 2, \cdots)$都有 $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = l$.

Proof 必要性显然成立.

下面证明充分性.假设结论不成立, 则存在$\varepsilon_0 > 0$, 对于任一$k \in \mathbb{N}^*$都存在$\boldsymbol{x}_k$满足$0 < \|x_k - x_0\| < 1/k$但$|f(x_k) - l| \geq \varepsilon_0$.

这样就找到了一个点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$它收敛于$\boldsymbol{x}_0$, 但$\{f(\boldsymbol{x}_k)\}$不以l为极限, 这与条件矛盾, 于是可知充分性成立.

Proposition 5.1 ((多元函数的极限运算法则))

设函数$f, g: D \to \mathbb{R}\,(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{x}_0$是D的一个极限点.若 $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = a$和 $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = b$, 则

(1) $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} (f \pm g)(\boldsymbol{x}) = a \pm b$

(2) $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} (fg)(\boldsymbol{x}) = ab$.

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{a}{b}, \quad b \neq 0.$

Proof 只证明(3).任取极限为$\boldsymbol{x}_0$的点列$\{\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{x}_0 : n = 1, 2, \cdots\}$.由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = a$和 $\lim\limits_{x \to x_0} g(\boldsymbol{x}) = b$

由$Heine$定理可知 $\lim\limits_{n \to \infty} f(\boldsymbol{x}_n) = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(\boldsymbol{x}_n) = b \neq 0$由数列极限的运算法则可知 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{a}{b}$再用$Heine$定理即知命题成立.

Theorem 5.1.2 ((多元函数的$Cauchy$收敛准则))

设函数$f: D \to \mathbb{R}\,(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, x_0是D的一个极限点.则

f在x_0处有极限 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$都$\exists \delta > 0$使得当$x_1, x_2 \in \check{N}_\delta(x_0) \cap D$时有$|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \varepsilon$.

Theorem 5.1.3 ((多元复合函数的极限))

设一元函数f和n元函数g.若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{t}_0} g(\boldsymbol{t}) = x_0$.且存在$r$使得$g\left[\check{N}_r(\boldsymbol{t}_0)\right] \subseteq \check{N}(x_0)$.则 $\lim\limits_{\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{t}_0} f[g(\boldsymbol{t})] = l$.

Note 其余结论包括极限唯一性, 局部有界性, 局部保号性

5.1.2 累次极限

Definition 5.2 (累次极限定义)

设二元函数$f: D \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$是$D$的一个极限点.对任意给定的$y$,若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在,则可以定义函数$\varphi(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

于是可以考虑当$y \to y_0$时$\varphi(y)$的极限,即$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$.

我们称以上极限为函数f在点(x_0, y_0)的一个累次极限(*repeated limit*)

Theorem 5.1.4 (($Moore-Osgood$定理))

设二元函数$f: D \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$是$D$的一个极限点.若$x \to x_0$时$f(x,y)$一致收敛,且$y \to y_0$时$f(x,y)$逐点收敛.则

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

注 所谓的若$x \to x_0$时$f(x,y)$一致收玫是指:$\exists$函数φ,对于任一$\varepsilon > 0$都$\exists\delta > 0$(这个δ只和ε都有关)
使得当$x \in N_\delta(x_0)$时,$\forall y \neq y_0$都有$|f(x,y) - \varphi(x,y)| < \varepsilon$.

所谓的若$y \to y_0$时$f(x,y)$逐点收玫是指:$\exists$函数ψ,对于任一$x \neq x_0$和$\forall\varepsilon > 0$都$\exists\delta > 0$(这个δ和x,ε都有关)
使得当$y \in N_\delta(y_0)$时都有$|f(x,y) - \psi(x,y)| < \varepsilon$.

Lemma 5.1

设二元函数$f(x,y)$在$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$的一个邻域$N_r(\boldsymbol{x}_0)$内有定义.已知重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在注意无穷也可以.

(1)当$y \neq y_0$时,若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在,则$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

(2)当$x \neq x_0$时,若$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Proof 设$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$

因为重极限存在则$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$使得当$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$时$|f(x,y) - l| < \varepsilon$.

现在固定y使它满足$|y - y_0| < \delta$.由于$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在,可令$\varphi(y) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

令$y \to y_0$可得$|\varphi(y) - l| \le \varepsilon$这表明$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y) = l$.

Theorem 5.1.5 (累次极限与重极限相等定理)

设二元函数$f(x,y)$在$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$的一个邻域$N_r(\boldsymbol{x}_0)$内有定义.若$f$在$(x_0, y_0)$处的两个累次极限和重极限都存在,则

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0.y_0)} f(x,y)$

Corollary 5.1

设二元函数$f(x,y)$在$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$的一个邻域$N_r(\boldsymbol{x}_0)$内有定义.

若当两个累次极限都存在且$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \neq \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.则重极限一定不存在.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$	$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=B_1$ $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=B_2$		极限点 $(x\to 0, y\to 0)$
存在	都存在	$A=B_1=B_2$	xy
	都不存在		$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$
	存在其中一个	$A=B_1$ 或 $A=B_2$	$\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$
不存在	都存在	$B_1=B_2$	$\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$
	都存在	$B_1\neq B_2$	$\frac{x-y}{x+y}$
	存在其中一个		$\frac{x}{y}$

图 5.1

Example 5.1 多元函数$f(x,y)=xy$这是显然的我们略去

Example 5.2 $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$.则$f$在0处的两个累次极限都不存在,但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Proof (i)设两个数列$a_n=\frac{1}{2n\pi}$, $\quad b_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$, $\quad n=1,2,\cdots$ 则$a_n\to 0, b_n\to 0$.然而

$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n,y)=\left(\frac{1}{2n\pi}+y\right)\sin(2n\pi)\sin\frac{1}{y}=0.\quad \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n,y)=\left(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}+y\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{1}{y}=y\sin\frac{1}{y}$.

由$Heine$定理可知当$y\neq 1/(k\pi)$时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在.同理可知 $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$不存在.因此两个累次极限都不存在.

(ii)由于$0\le\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le|x+y|\le|x|+|y|$.因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Example 5.3 设函数$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$.

则 $\underbrace{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}_{\sin\text{放缩为}1}=\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0}_{\text{有界乘无穷小}}$.但$\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\text{不存在}.}_{\sin\frac{1}{y}\text{不存在极限}}$

Example 5.4 设函数$f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

则 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在

Proof 证明累次极限显然都为零.下面证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.设两个点列$\boldsymbol{a}_n=\left(\frac{1}{n},0\right)$, $\quad \boldsymbol{b}_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $\quad n=1,2,\cdots$.
则$\boldsymbol{a}_n\to 0, \boldsymbol{b}_n\to 0$.然而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{a}_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{b}_n)=1$.由$Heine$定理可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

Example 5.5 设函数$f(x,y)=\frac{x}{y}$.

Proof 则 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$.且 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$和 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$都不存在.

5.1.3 多元函数的连续性

Definition 5.3

设函数 $f: D \to \mathbb{R}\,(D \subseteq \mathbb{R}^n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有定义.
若对于 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的任一邻域 $N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$, 都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域 $N_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $f[D \cap N_\delta(\boldsymbol{x}_0)] \subseteq N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$.
则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续 (*continuous*), $\boldsymbol{x}_0$ 称为 f 的一个连续点 (*continuous point*).

注 定义中没有规定 $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的极限点, 因此可能会出现这样的情况 : 存在一个邻域 $N(\boldsymbol{x}_0)$ 满足 $N(x_0) \cap D = \{x_0\}$
此时称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 D 的一个孤立点 (*isolatedpoint*). 按定义, 此时 f 也在 x_0 连续. 但此时不能说 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有极限.
不难证明有限集中的每一点都是孤立点, 因此 f 在有限集上连续. 当 $\boldsymbol{x}_0$ 不是孤立点时, 就可以说 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = f(x_0)$.
根据 *Heine* 定理, 此时可以用点列来刻画函数的连续性 :
函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续当且仅当任一点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subseteq N(\boldsymbol{x}_0)$ 只要点列 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0$ 就有数列 $f(\boldsymbol{x}_n) \to f(\boldsymbol{x}_0)$.

Example 5.6 常值函数是一连续函数

Example 5.7 投影算子的连续性定义 $\mathbb{R}^n$ 上的投影算子 $\mathcal{P}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots$. 则 $\mathcal{P}_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

Proof 任取 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. 则 $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| = |x_i - a_i| \le \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$. 于是可知 $\mathcal{P}_i$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续.

Note 由此可知多项式函数一定连续只需分别考虑分量即可

下面我们来考虑如果两个变量分别连续那么整体是否连续?

Example 5.8 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. 则 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ 上都是连续的.

Proof 当 $(x, y) \ne (0, 0)$ 时, 函数 f 是连续的. 可知 $f(x, y)$ 在 0 的极限不存在, 因此 f 在 0 处不连续. 于是知 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ 上都连续.
注由于 $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0, \quad \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 0$. 因此对于每个单变量来说, 函数都是连续的.
从这个例子可以看出每个单变量都连续不足以推出多元函数连续.

Proposition 5.2

设 $D \in \mathbb{R}^2$ 上的二元函数 $f(x, y)$. 若 f 在 D 上对于 x 连续, 且在 D 上对于 y 一致连续 $\Rightarrow f$ 在 D 上连续.

Proof 由于 f 在 D 上对于 y 一致连续, 因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$(只和 ε 有关), 当 $|y' - y''| < \delta_1$ 时 $|f(x, y') - f(x, y'')| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
任取 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$. 由于 f 在 (x_0, y_0) 上对于 x 连续因此
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0$(和 ε 和 x_0 有关), 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 且 $(x, y_0) \in D$ 时 $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
取 $\delta \le \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 则当 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$ 且 $\boldsymbol{x} \in D$ 时 $|x - x_0| \le \|x - x_0\| < \delta \le \delta_2, \quad |y - y_0| \le \|x - x_0\| < \delta \le \delta_1$. 于是
$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \le |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Proposition 5.3 ((*Young* 命题))

设 $D \in \mathbb{R}^2$ 上的二元函数 $f(x, y)$. 若 f 在 D 上对于 x 和 y 都连续, 且对于其中一个变量单调, 则 f 在 D 上连续.

Proof $\forall (x_0, y_0) \in D$. 由于 f 在 D 上对于 x 连续, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ 使得当 $|x - x_0| < \delta_1$ 且 $(x, y_0) \in D$ 时 $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
f 在 D 上对于 y 都连续, 故
$\forall \varepsilon, \exists \delta_2$, 使得当 $|y - y_0| < \delta_2$ 且 $(x_0, y) \in D$ 时 $|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 当 $\|(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ 时, $|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta$. 不妨设 f 对于 x 单调, 则

$$|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\le\max\{|f(x_0+\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|,|f(x_0-\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\}$$
$$\le|f(x_0\pm\delta_1,y_0+\Delta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|+|f(x_0\pm\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

于是可知f在D上连续.

Theorem 5.1.6 (多元函数连续的充要条件)

设函数$f:D\to\mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.则f在D上连续 $\Leftrightarrow$ $\forall$开集$E\in\mathbb{R}$, 都有$f^{-1}(E)$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.

其中 f^{-1} 的意义是表示原像集

Proof (i)证明必要性.设f在D上连续.若$f^{-1}(E)=\varnothing$, 则$f^{-1}(E)$是开集.

下设$f^{-1}(E)\ne\varnothing$.任取$x_0\in f^{-1}(E)$, 则$f(x_0)\in E$.由于E是$\mathbb{R}$中的一个开集, 因此存在一个邻域$N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq E$.

由于f在$\boldsymbol{x}_0$处连续, 且D是一个开集, 故存在邻域$N_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subseteq D$使得$f[N_\delta(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq E$.因此$N_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subseteq f^{-1}(E)$.

这表明$f^{-1}(E)$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.

(ii)证明充分性.任取$\boldsymbol{x}_0\in D$, 取$f(\boldsymbol{x}_0)$的一个邻域$E=N_\varepsilon[f(\boldsymbol{x}_0)]$, 它是$\mathbb{R}$中的一个开集.

由条件可知$f^{-1}(E)$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.由于$\boldsymbol{x}_0\in f^{-1}(E)$

故存在$N_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}(E)$, 即$f[N_\delta(\boldsymbol{x}_0)]\subseteq E$.这表明$f$在$\boldsymbol{x}_0$处连续, 于是可知$f$在$D$上连续.

Definition 5.4 (多元函数的一致连续性)

设函数$f:D\to\mathbb{R}\,(D\subseteq\mathbb{R}^n)$.若$\forall\varepsilon>0$都$\exists\delta>0$使得$\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in D$, 只要$\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|<\delta$, 就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

则称f在D上一致连续 $(uniformly\ continuous)$.

Proposition 5.4

设区间D上的函数f.则f在D上一致连续 $\Leftrightarrow$ $\forall$点列$\{\boldsymbol{x}_n\},\{\boldsymbol{y}_n\}\in D$, 只要$\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_n\to0$, 就有$\lim\limits_{n\to\infty}[f(\boldsymbol{x}_n)-f(\boldsymbol{y}_n)]=0$.

我们只需找到一对点列$\{\boldsymbol{a}_n\}$和$\{\boldsymbol{b}_n\}$它们满足$\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{b}_n\to0$但不满足$f(\boldsymbol{a}_n)-f(\boldsymbol{b}_n)\to0$.

Note 对于多元函数我们同样可以建立一致连续和 Lip 一致连续条件

5.1.4 有界闭集连续函数性质

Theorem 5.1.7 (($Bolzano-Weierstrass$定理))

$\mathbb{R}^n$中的有界点列一定有收敛子列

Proof 设点列 $\{x_k\}$ 有界, 它的各项坐标为$\boldsymbol{x}_k=\left(x_k^1,x_k^2,\cdots,x_k^n\right)$, $\quad k=1,2,\cdots$.考虑 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 各项第i个坐标组成的数列 $\left\{x_k^i\right\}_{k=1}^{\infty}$.
由于 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有界, 故存在M满足 $\left|x_k^i\right|\le\|x_k\|\le M$.因此 $\left\{x_k^i\right\}_{k=1}^{\infty}$ 也有界.
由数列的$Bolzano-Weierstrass$定理可知 $\left\{x_k^1\right\}_{k=1}^{\infty}$ 存在收敛子列 $\left\{x_{p_{1,k}}^1\right\}_{k=1}^{\infty}$.
考察按同样序号选取的 $\left\{x_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$ 的子列 $\left\{x_{p_{1,k}}^2\right\}_{k=1}^{\infty}$.它仍然是一个有界数列, 因此也存在一个收敛子列 $\left\{x_{p_{2,k}}^2\right\}_{k=1}^{\infty}$.
继续这样操作下去, 最后可以从有界数列 $\left\{x_{p_{n-1,k}}^n\right\}_{k=1}^{\infty}$ 中找到一个收玫子列 $\left\{x_{p_{n,k}}^n\right\}_{k=1}^{\infty}$.
根据以上讨论容易知道 $\left\{x_{p_{n,k}}^i\right\}_{k=1}^{\infty}$ $(i=1,2,\cdots,n)$是 $\left\{x_k^i\right\}_{k=1}^{\infty}$ $(i=1,2,\cdots,n)$的收敛子列.
这样我们就找到了点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的一个收敛子列 : $\boldsymbol{x}_{p_{n,k}}=\left(x_{p_{n,k}}^1,x_{p_{n,k}}^2,\cdots,x_{p_{n,k}}^n\right)$, $\quad k=1,2,\cdots$

Theorem 5.1.8 (一致连续定理)

设函数$f:D\to\mathbb{R}\,(D\subseteq\mathbb{R}^n)$ 在D上连续.若D是一个有界闭集, 则f在D上一致连续.

Proof 用反证法.假设函数f在D上不一致连续.则
$\exists\varepsilon_0>0$对于任一$k\in\mathbb{N}^*$都存在$\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_k\in D$使得 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}_k\|<\dfrac{1}{k}$, $\quad\left|f\left(\boldsymbol{x}_k\right)-f\left(\boldsymbol{y}_k\right)\right|\ge\varepsilon_0$.
由于 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq D$, 故 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有界, 由$Bolzano-Weierstrass$定理可知 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有一个子列$\boldsymbol{x}_{p_k}\to\xi$.
由于D是一个闭集, 故$\xi\in D$.由于$p_k\ge k$, 因此
$\left\|\boldsymbol{y}_{p_k}-\xi\right\|\le\left\|\boldsymbol{y}_{p_k}-\boldsymbol{x}_{p_k}\right\|+\left\|\boldsymbol{x}_{p_k}-\xi\right\|<\dfrac{1}{p_k}+\left\|\boldsymbol{x}_{p_k}-\xi\right\|\le\dfrac{1}{k}+\left\|\boldsymbol{x}_{p_k}-\xi\right\|\to 0.$
因此$\boldsymbol{y}_{p_k}\to\xi$.由于$f$在$\xi$处连续, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\boldsymbol{x}_{k_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\boldsymbol{y}_{k_n}\right)=f(\xi)$.这与$\left|f\left(\boldsymbol{x}_n\right)-f\left(\boldsymbol{y}_n\right)\right|\ge\varepsilon_0$矛盾.
于是可知f在D上一致连续.

Proposition 5.5

设函数f在$\mathbb{R}^n$上连续.若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(\boldsymbol{x})$存在且有限, 则$f$在$\mathbb{R}^n$上一致连续.

Proof 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(\boldsymbol{x})$存在且有限, 由$Cauchy$收玫原理可知
$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$使得当 $\|x_1\|>\eta,\|x_2\|>\eta$时 $|f\left(\boldsymbol{x}_1\right)-f\left(\boldsymbol{x}_2\right)|<\varepsilon$
考虑有界闭集$\bar{N}_{\eta+1}(0)$.由于f在$\mathbb{R}^n$上连续, 故f在$\bar{N}_{\eta+1}(0)$上一致连续.
因此对于上述给定的ε, 存在正数$\delta<1$使得当 $\|x_1-x_2\|<\delta$且$x_1,x_2\in\bar{N}_{\eta+1}(0)$时 $|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)|<\varepsilon$
现在任取两点$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^n$满足 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|<\delta<1$.若假设$\boldsymbol{x}_1$满足 $\|\boldsymbol{x}_1\|\le\eta$, 则 $\|x_2\|\le\|x_2-x_1\|+\|x_1\|<\delta+\eta<\eta+1$.
因此$\boldsymbol{x}_2$在$\bar{N}_{\eta+1}(0)$.这表明$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$要么都在$\bar{N}_{\eta+1}(0)$内, 要么同时满足 $\|x_1\|>\eta,\|x_2\|>\eta$.因此总是有 $|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)|<\varepsilon$

Theorem 5.1.9

设函数$f:D\to\mathbb{R}\,(D\subseteq\mathbb{R}^n)$ 在D上连续.若D是一个有界闭集, 则f在D上有界.

Proof 用反证法.假设f在D上无上界.则任一自然数k都不是它的上界.故存在$\boldsymbol{x}_k\in D$使得$f\left(x_k\right)>k$, $\quad k=1,2,\cdots$.
由于 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq D$, 故 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有界, 由$Bolzano-Weierstrass$定理可知 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有一个子列$\boldsymbol{x}_{p_k}\to\xi$, 由于$D$是一个闭集
因此$\xi\in D$.由于f在ξ处连续, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\boldsymbol{x}_{p_k}\right)=f(\xi)$另一方面, 由于$f\left(x_{p_k}\right)>p_k\ge k$, $\quad k=1,2,\cdots$.
令$k\to\infty$得$f\left(x_{k_n}\right)\to+\infty$, 出现矛盾.于是可知$f$在$D$上有上界.

Theorem 5.1.10

设函数$f : D \to \mathbb{R}\,(D \subseteq \mathbb{R}^n)$在$D$上连续.若$D$是一个有界闭集,则$f$在$D$上可以取到最大值和最小值.

Proof 只证明最大值的情况.

令$M = \sup f(D)$.由于f在D上有界,因此$M \in \mathbb{R}$.故$\forall k \in \mathbb{N}^*$都$\exists \boldsymbol{x}_k \in D$使得$M - \dfrac{1}{k} < f(\boldsymbol{x}_k) \le M$.

由于$\{\boldsymbol{x}_k\} \subseteq D$,故$\{\boldsymbol{x}_k\}$有界,由$Bolzano - Weierstrass$定理可知$\{\boldsymbol{x}_k\}$有一个子列$\boldsymbol{x}_{k_k} \to \boldsymbol{\xi}$.由于$D$是一个闭集,因此$\xi \in D$.

我们有$M - \dfrac{1}{p_k} < f\left(x_{p_k}\right) \le M$.令$k \to \infty$得$\lim\limits_{k\to\infty} f\left(\boldsymbol{x}_{p_k}\right) = M$.由于$f$在$\xi$处连续

故$\lim\limits_{k\to\infty} f\left(\boldsymbol{x}_{p_k}\right) = f(\boldsymbol{\xi})$.这表明$f$在$\xi$处取得最大值$M$.

5.2 偏导数与微分

5.2.1 方向导数与偏导数

Definition 5.5 (方向导数)

设函数$f:D\to\mathbb{R}$,其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.给定一个方向向量$\boldsymbol{u}$和一点$\boldsymbol{x}_0$.

若存在$\ell\in\mathbb{R}$使得$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t\boldsymbol{u})-f(x_0)}{t}=\ell$.则称$\ell$为$f$在点$\boldsymbol{x}_0$沿着$\boldsymbol{u}$的方向导数(*directional derivative*),

记作$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(x_0):=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t\boldsymbol{u})-f(x_0)}{t}$.

令一元函数$\varphi(t)=f(x_0+t\boldsymbol{u})$,则$\varphi$在$|t|$充分小时有定义,且

$\varphi'(0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)$

注 注方向导数$\boldsymbol{u}$的长度是1.

注 定义中要求函数f的定义域是一个开集,这样做是为了使得$\boldsymbol{x}_0$加上一个很小的增量$\boldsymbol{h}$后$\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}$仍在定义域中.

Problem 5.1 设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.讨论$f(x,y)$在$\boldsymbol{x}_0=0$的方向导数.

Proof 任一方向向量都可以表示为$\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$,其中$\theta\in[0,2\pi)$.

令$\varphi(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})$,则$\varphi(t)=\begin{cases}f(x_0)=f(0,0)=1, & t=0\\ f(x_0+t\boldsymbol{u})=f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\sin2\theta, & t\neq0\end{cases}$.

若要$\varphi(t)$在0处可导,则需要$\varphi(t)$在0处连续,因此$1=\varphi(0)=\lim_{t\to0}\varphi(t)=\sin2\theta$.故$\theta=\pi/4$或$5\pi/4$.

此时$\varphi(t)\equiv1$.故$\varphi'(0)=0$.

于是可知f在$\boldsymbol{x}_0=0$处只有在$(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2),(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)$两个方向上有方向导数,且方向导数都为零. □

Note 设函数$f:D\to\mathbb{R}$,其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.

我们称f在点$\boldsymbol{x}_0$处沿第i个单位坐标向量$\boldsymbol{e}_i$的方向导数为f在x_0处的第i个偏导数(*partial derivative*)

记作$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$或$f'_{x_i}(x_0)$或$\mathcal{D}_{x_i}f(x_0)$.

我们来试着计算f在$\boldsymbol{x}_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$处的偏导数$f'_1(\boldsymbol{x}_0)$.

由定义可知$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+te_1)-f(x_0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_1+t,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{t}$.于是引出了偏导数的等价定义.

Definition 5.6 (偏导数)

设函数$f:D\to\mathbb{R}$,其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.取一点$\boldsymbol{x}_0=(x_1,\cdots,x_n)\in D$.

若以下极限存在且有限:$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_1,\cdots,x_i+t,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}{t}$.

则把极限值称为f在点$\boldsymbol{x}_0$处关于x_i的偏导数(*partial derivative*)

记作$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ 或$f'_{x_i}(x_0)$ 或$\mathcal{D}_{x_i}f(x_0)$.

Problem 5.2 设n元函数$f(x)=\|x\|$.求f的偏导数

Proof 设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则$f(x)=\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^{1/2}$.

当$\boldsymbol{x}\neq0$时,f的第i个偏导数为$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)^{-1/2}\cdot2x_i=\dfrac{x_i}{\|\boldsymbol{x}\|},\quad i=1,2,\cdots,n.$

当$\boldsymbol{x}=0$时，对于任一方向向量都有$\dfrac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x})}{t}=\dfrac{\|t\boldsymbol{u}\|}{t}=\dfrac{|t|}{t}=\begin{cases}1, & t>0\\-1, & t<0\end{cases}$.
当$t\to 0$时，上式极限不存在.这表明f在$\boldsymbol{x}=0$处的任何方向导数都不存在，从而所有偏导数也都不存在.
注函数$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$的图像是一个顶点在原点的圆锥. □

Problem 5.3 设函数$f(x,y)=\begin{cases}y\ln\left(x^2+y^2\right), & (x,y)\neq(0,0)\\1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 求$f$在$(0,0)$处的两个偏导数.

Proof 由定义可知$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$.由于$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\ln t^2=-\infty$.
因此f_y'不存在. □

Note 我们知道，一元函数在x_0处可导，意味着在这一点连续.
但如果多元函数f在$\boldsymbol{x}_0$处所有的偏导数都存在，则不意味着f在$\boldsymbol{x}_0$处连续，甚至不能推得f在$\boldsymbol{x}_0$有极限.

Example 5.9 设函数$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\0, & xy=0\end{cases}$. 则在$(0,0)$处$f_x'$和$f_y'$都存在，但$f$在$(0,0)$的极限不存在.

Proof 由定义可知$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$.
取点列$\boldsymbol{a}_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\to(0,0)$, $\boldsymbol{b}_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\to(0,0)$则$f(\boldsymbol{a}_n)\equiv 0$, $f(\boldsymbol{b}_n)\equiv 1$.因此$f$在$(0,0)$处极限不存在. □

Proposition 5.6

设开集D上的的二元函数$f(x,y)$.
若两个偏导数f_x', f_y'在(x_0,y_0)的某个邻域内存在且有界，则f在(x_0,y_0)处连续.

Proof 令$\Delta f=f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)$.由一元函数的$Lagrange$中值定理可知

$$\begin{aligned}\Delta f&=f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)+f\left(x_0,y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y\right)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0+\theta_2\Delta y\right)\Delta y,\end{aligned}$$

其中$\theta_1,\theta_2\in(0,1)$.由于$f_x', f_y'$在$(x_0,y_0)$的某个邻域内存在且有界，故$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta f=0$.于是可知$f$在$(x_0,y_0)$处连续. □

5.2.2 全微分

Definition 5.7 (多元函数全微分)

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.给定$\boldsymbol{x}_0 \in D$.

若存在$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$使得$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \lambda \boldsymbol{h} + o(\| \boldsymbol{h} \|), \quad \| \boldsymbol{h} \| \to 0$, 其中$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)^T$是全增量

则称函数f在点$\boldsymbol{x}_0$处可微 ($differentiable$).

并称关于$\boldsymbol{h}$的线性映射$\lambda \boldsymbol{h}$为f在x_0处的全微分 ($total\ differential$), 简称微分.记作 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = \lambda \boldsymbol{h}$.

若f在D上的每一点都可微, 则称f是D上的一个可微函数 ($differentiable\ function$).

Note 下面我们先来确定上述定义中的线性映射$\lambda \boldsymbol{h}$的系数λ.令$y = f(\boldsymbol{x})$.

为了简化问题, 不妨令$\boldsymbol{h} = (0, \cdots, h_i, \cdots, 0)$.

这时$f(x_1, \cdots, x_i + h_i, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) = \lambda_i h_i + o(|h_i|)$.

于是

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_i + h_i, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{h_i} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是我们就完全确定了全微分的系数λ, 它的第i个分量λ_i恰好是f在x_0处的第i个偏导数y_i'.于是我们可以把f在$\boldsymbol{x}_0$的全微分写成

$$\mathrm{d}y = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Note 设投影$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$.则

$\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_i} h_i + \cdots + \dfrac{\partial x_i}{\partial x_n} h_n = h_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

因此我们可以把h_1看作是自变量x_i的微分 $\mathrm{d}x_i$.于是全微分可以表示为 $\mathrm{d}y = \left[\dfrac{\partial y}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial y}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix}$

为了简洁, 我们可以令$\nabla y := \left[\dfrac{\partial y}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial y}{\partial x_n} \right]$

Note 我们把$\dfrac{\partial y}{\partial x_1} \mathrm{d}x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$称为函数$f$关于$x_i$的偏微分 ($partial\ differential$), 记作 $\mathrm{d}_i y (i = 1, 2, \cdots, n)$.

如此一来偏导数也可以表示成两个微分的商 : $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{\mathrm{d}_i y}{\mathrm{d}x_i}$.

Theorem 5.2.1 (全微分刻画形式 1)

设函数$y = f(x)$在x_0处可微.则它在$\boldsymbol{x}_0$的全微分为每个变量偏微分的线性组合, 其中系数为各个变量在x_0处的偏导数, 即

$$\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right] \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix} = \nabla y \boldsymbol{h}.$$

Theorem 5.2.2 (全微分刻画形式 2)

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.给定$\boldsymbol{x}_0 \in D$.则

函数f在$\boldsymbol{x}_0$可微 $\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{h}+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\boldsymbol{h})h_i$.当 $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$时, $\varepsilon_i(\boldsymbol{h}) \to 0 (i=1,2,\cdots)$.

Proof (i)证明充分性.根据全微分表达形式一我们就来验证是否有 : $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}})h_i=o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|)$

由于

$\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}}) \to 0 (i=1,2,\cdots)$, 故

$$\left|\frac{1}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}})h_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\boldsymbol{h})\frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}})\frac{h_i}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}})\right| \to 0, \quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\| \to 0.$$

这表明$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}})h_i=o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|)$.于是可知$f$在$\vec{\boldsymbol{x}}_0$可微.

(ii)证明必要性.设f在$\vec{\boldsymbol{x}}_0$可微, 则$f(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{h})-f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)=\nabla f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\,\vec{\boldsymbol{h}}+o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|), \quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\| \to 0$,

令$r(\vec{\boldsymbol{h}})=f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\vec{\boldsymbol{h}}\right)-f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)-\nabla f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\,\vec{\boldsymbol{h}}$.则当 $\|\vec{\boldsymbol{h}}\| \to 0$时, $r(\vec{\boldsymbol{h}})=o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|)$.由于

$$r(\vec{\boldsymbol{h}})=r(\vec{\boldsymbol{h}})\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i^2}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|^2}=\frac{r(\vec{\boldsymbol{h}})}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}h_i.$$

因此可令$\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}})=\dfrac{r(\vec{\boldsymbol{h}})}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\cdot\dfrac{h_i}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}$.

由于$\left|\dfrac{h_i}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\right| \le 1, \quad i=1,2,\cdots,n$.与$r(\vec{\boldsymbol{h}})=o(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|) \Longrightarrow$ 因此$\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}}) \to 0 (i=1,2,\cdots)\left(\|\vec{\boldsymbol{h}}\| \to 0\right)$

$\Longrightarrow$ 满足$f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\vec{\boldsymbol{h}}\right)-f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)=\nabla f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\,\vec{\boldsymbol{h}}+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\vec{\boldsymbol{h}})h_i$.

Problem 5.4 设$Vandermonde$行列式$u=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

则 (1) $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0$, $\quad$ (2) $\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{n(n-1)}{2}u$.

Proof

u是一个多项式函数, 显然可微, 故$u(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-u(\boldsymbol{x}_0)=\left(\dfrac{\partial y}{\partial x_1},\dfrac{\partial y}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial y}{\partial x_n}\right)\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0$, 其中$\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^T$.

(1)令$h_1=h_2=\cdots=h_n=h$.由于$u=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

故$u(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-u(\boldsymbol{x}_0)=\prod_{1\le i<j\le n}\left[(x_j+h)-(x_i+h)\right]-\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=0$.

于是$0=h\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+o(h), \quad h \to 0$这表明$\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=0$

(2)令$h_i=x_ih (i=1,2,\cdots,n)$, 则

$u(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-u(x_0)=\prod_{1\le i<j\le n}\left[(x_j+x_jh)-(x_i+x_ih)\right]-\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\left[(h+1)^{C_n^2}-1\right]u$.

于是$\left[(h+1)^{C_n^2}-1\right]u=h\sum_{i=1}^{n}x_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+o(h), \quad h \to 0$

于是可知 $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(h+1)^{C_n^2}-1\right]u}{h} = C_n^2 u = \frac{n(n-1)}{2}u.$ □

Theorem 5.2.3 (可微函数的方向导数定理)

设函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿任一方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right]\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u}.$$

Proof 由于 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微, 故 $f(x_0+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)t\boldsymbol{u} + o(t)$. 于是可知 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u}$.

注 对于二元函数, 方向向量通常写成 $(\cos\theta, \sin\theta)$,

三元函数的方向通常可以用方向余弦 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 表示, 其中 α, β, γ 分别是这一方向与 x, y, z 轴的夹角.

Definition 5.8 (梯度)

设向量 $\nabla f(x_0)$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 θ, 则 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{u} = |\nabla f(\boldsymbol{x}_0)|\cos\theta$.

因此当 $\cos\theta = 1$, 即 $\theta = 0$ 时方向导数取到最大值.

这表明函数 f 沿着向量 $\nabla f(x_0)$ 的方向导数是最大的, 换句话说函数 f 沿着 $\nabla f(x_0)$ 方向的增速最快.

因此向量 $\nabla f(x_0)$ 就有了明确的几何意义, 我们称它为梯度 (*gradient*), 因此 $\nabla f(x_0)$ 也可以记作 $\mathrm{grad} f(\boldsymbol{x}_0)$.

Example 5.10 设函数 $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$ 求 f 在 $\boldsymbol{x}_0 = (0,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{u} = (3/5, -4/5)$ 的方向导数.

Proof 法一 令 $\varphi(t) = f(x_0+t\boldsymbol{u}) = f\left(\frac{3t}{5}, 1-\frac{4t}{5}\right) = \left(\frac{3t}{5}-1\right)^2 - \left(1-\frac{4t}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}t^2 + \frac{2}{5}t$ 于是 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \varphi'(0) = \frac{2}{5}$.

法二 函数 f 在 x_0 的两个偏导数为 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 2(x-1)|_{(0,1)} = -2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = -2y|_{(0,1)} = -2$.

于是可知 f 在 $\boldsymbol{x}_0 = (0,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{u} = (3/5, -4/5)$ 的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)u_2 = \frac{2}{5}$. □

Example 5.11 设函数 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上可微. 若 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是三个互相垂直的方向向量. 则 $\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$

Proof 设 $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$, $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$, $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$. 令 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ 则

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}, \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}\right] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = \nabla f\boldsymbol{A}.$$

$$\text{于是}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{w}}\right)^2 = \nabla f\boldsymbol{A}(\nabla f\boldsymbol{A})^T = \nabla f\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\nabla f\boldsymbol{A}^T = \nabla f(\nabla f)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

□

Note 我们已经知道, 偏导数是只让一个变量发生改变, 其余变量全部固定. 而全微分是允许所有变量全部发生改变. 现在我们来研究一种中间状态 : 让其中一部分变量变得, 固定其余变量. 设开集 D 上的一个 $n+p$ 元函数.

为了简洁, 我们把 $\mathbb{R}^{n+p}$ 看作 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$: $\begin{aligned} f: D &\to \mathbb{R}^n \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \end{aligned}$ 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_p)$.

模仿偏导数和全微分的定义, 可以定义只有 $\boldsymbol{x}$ 变化或只有 $\boldsymbol{y}$ 变化时的可微性.

Definition 5.9 (偏微分)

设函数 $f: D\to\mathbb{R}$, 其中 D 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$ 上的一个开集. 给定 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in D$.

若存在

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 使得 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h},\boldsymbol{y}_0)-f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\lambda_x\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|)$, $\quad\|\boldsymbol{h}\|\to 0$, 其中 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^T$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的增量

则称函数 f 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处对 $\boldsymbol{x}$ 可微 ($differentiable$).

并称关于 $\boldsymbol{h}$ 的线性映射 $\lambda_x\boldsymbol{h}$ 为 f 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处对 $\boldsymbol{x}$ 的偏微分 ($partial\ differential$)

记作 $\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\lambda_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{h}$.

注 以上定义中的 $n=1$ 时, λ_x 就是 x 的偏导数 : $f(x_0+h,\boldsymbol{y}_0)-f(x_0,\boldsymbol{y}_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,\boldsymbol{y}_0)\,h+o(h)$, $\quad h\to 0$,
当 $p=0$ 时, 偏微分就成了全微分.

Theorem 5.2.4 (偏微分刻画形式)

设函数 $n+p$ 元函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in D$ 处对 $\boldsymbol{x}$ 可微, 则它在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处对于 $\boldsymbol{x}$ 的偏微分等于 $\boldsymbol{x}$ 的每个变量偏微分的线性组合, 其中系数分别为各个变量在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处的偏导数, 即

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\sum_{i=1}^n \mathrm{d}_{x_i}y=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\,\mathrm{d}x_i=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\right]\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{bmatrix}.$$

为了记号简洁

可以令 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\right]$, $\quad\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),\cdots,\frac{\partial f}{\partial y_p}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\right]$.

不难看出, 若 f 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 可微, 则 $\boldsymbol{J}f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\left[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\right]$.

反之, 若向量值函数 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}f$ 和 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}f$ 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处连续, 则 f 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处可微.

Definition 5.10 (切线切面)

设曲线 $\Gamma: y=f(x)$

取 Γ 上一点 $M_0(x_0,y_0)$. 过 M_0 作直线 $L: y=\ell(x)$. 任取 Γ 上一点 $M(x,y)$. 若 $f(x)-\ell(x)=o(x-x_0)$, $\quad x\to x_0$.

则称直线 L 是曲线 Γ 在 x_0 处的切线 ($tangent\ line$).

在 $\mathbb{R}^3$ 中设曲面 $S: z=f(x,y)$, 取 S 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 过 M_0 作平面 $\pi: z=p(x,y)$. 任取 Γ 上一点 $M(x,y,z)$.

若 $f(x,y)-p(x,y)=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$, $\quad(x,y)\to(x_0,y_0)$. 其中 $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=y-y_0$,

则称平面 π 是曲面 S 在 (x_0,y_0) 处的切面 ($tangent\ surface$).

5.2.3 多元函数可微的条件

Theorem 5.2.5 (多元函数可微的必要条件)

1.关于分量的n个偏导数都存在

2.设n元函数f在x_0处可微, 则f在$\boldsymbol{x}_0$处连续

Proof 1.由全微分的形式立马知道

2.由于f在$\boldsymbol{x}_0$处可微, 因此$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|)$, $\quad \|\boldsymbol{h}\|\to 0$.

因此$\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to 0}[f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)]=0$.于是可知$f$在$\boldsymbol{x}_0$处连续.

Example 5.12 偏导数存在, 函数极限不存在, 函数不连续例子

设函数$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$. 则在$(0,0)$处$f_x'$和$f_y'$都存在, 但$f$在$(0,0)$的极限不存在.

Proof 由定义可知$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0.\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$

取点列$\boldsymbol{a}_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\to(0,0),\quad \boldsymbol{b}_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\to(0,0)$则$f(\boldsymbol{a}_n)\equiv 0,\quad f(\boldsymbol{b}_n)\equiv 1$.因此$f$在$(0,0)$处极限不存在. □

Example 5.13 函数连续, 不存在偏导数例子

$f(x,y)=|x|+|y|$ 则函数在$(0,0)$处连续但不存在偏导数

Example 5.14 偏导数存在, 函数不连续, 函数不可微例子

设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 则

1.f在0的两个偏导数都存在,

2.f在$(0,0)$不连续

2.$f(x,y)$在$\boldsymbol{x}_0=0$处不可微.

Proof

由偏导数的定义可知f在0的两个偏导数为:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=0,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=0.$

Example 5.15 方向导数存在, 函数不连续, 函数不可微例子

设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 则

1.f在原点0处各个方向导数都存在,

2.f在$(0,0)$不连续

3.f在原点处不可微.

Proof 设方向向量为$\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$, 其中$\theta\in[0,2\pi)$.

令$\varphi(t)=f(0+t\boldsymbol{u})=f(t\cos\theta,t\sin\theta)$.则$\dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\dfrac{f(t\cos\theta,t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\dfrac{\cos^2\theta\sin\theta}{t^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$.

于是可知$\varphi'(0)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}, & \sin\theta\neq 0\\ 0, & \sin\theta=0\end{cases}$.

于是可知f在原点0处各个方向导数都存在.由$y=kx^2$知道f在0处不连续, 故它在0处不可微.

Example 5.16 偏导数存在且函数连续但不可微例子

设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 则

(1)f在原点 $(0,0)$处连续.

(2)f在原点 $(0,0)$处的两个偏导数都存在.

(3)f在的两个偏导数在原点 $(0,0)$处不连续.

(4)f在 $(0,0)$处不可微.

Proof (1)由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^2\cos^2\theta\cdot r\sin\theta}{r^2}=\lim\limits_{r\to0} r\cos^2\theta\sin\theta=0.$
因此f在 $(0,0)$连续.

(2)由偏导数的定义可知
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=0.\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=0.$

(3)计算可知, 当 $(x,y)\neq(0,0)$时$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$

对于f_x', 取$x=2/n\to0, y=1/n\to0$, 则$\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{4}{25}\neq0,\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{2}{n},\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{12}{25}\neq0.$

因此f_x', f_y'在 $(0,0)$处都不连续.

(4)若f在 $(0,0)$处可微, 则
$f\left(h_1,h_2\right)-f(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)\Longleftrightarrow\dfrac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2}=o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)$
令$h_1=h_2=h$, 则$\dfrac{h}{2}=o(\sqrt{2}h)\Longleftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=o(1)$.这显然不成立.于是可知$f$在 $(0,0)$处不可微. □

Theorem 5.2.6 (多元函数可微充分条件)

设函数$f:D\to\mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.
若f的各个偏导数$f_i'(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,n)$在$\boldsymbol{x}_0$的一个邻域中都存在, 且在点$x_0$处都连续, 则$f$在$x_0$处可微.

Proof 对n进行归纳.当$n=1$时, 显然成立, 这是因为一元函数在一点可导当且仅当这一点可微.
假设$n-1$时命题成立.下面来看n时的情况.
令$f\left(x_0+\boldsymbol{h}\right)-f\left(x_0\right)=d_1+d_2$其中
$d_1=f\left(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+h_n\right)-f\left(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n\right), d_2=f\left(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n\right)-f\left(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n\right).$
对d_1使用一元函数的$Lagrange$中值定理, 即存在$\theta\in(0,1)$使得

$$d_1=f_n'\left(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+\theta h_n\right)h_n=\left[f_n'\left(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+\theta h_n\right)-f_n'\left(x_0\right)\right]h_n+f_n'\left(x_0\right)h_n.$$

令$\varepsilon_n(\boldsymbol{h})=f_n'\left(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+\theta h_n\right)-f_n'\left(\boldsymbol{x}_0\right)$ 则$d_1=f_n'\left(\boldsymbol{x}_0\right)h_n+\varepsilon_n(\boldsymbol{h})h_n$.
由于f的各个偏导数$f_i'(\boldsymbol{x})(i=1,2,\cdots,n)$在$\boldsymbol{x}_0$的一个邻域中都存在, 且在点$\boldsymbol{x}_0$处都连续, 故

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\varepsilon_n(\boldsymbol{h})=\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}f_n'\left(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+\theta h_n\right)-f_n'\left(\boldsymbol{x}_0\right)=0.$$

另一方面, 由归纳假设可知$d_2=\sum\limits_{i=1}^{n-1}f_i'\left(\boldsymbol{x}_0\right)h_i+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i(\boldsymbol{h})h_i$, 其中$\varepsilon_i(\boldsymbol{h})\to0(\|\boldsymbol{h}\|\to0)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 于是

$$f\left(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\right)-f\left(\boldsymbol{x}_0\right)=d_1+d_2=\sum_{i=1}^{n}f_i'\left(\boldsymbol{x}_0\right)h_i+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\boldsymbol{h})h_i\text{其中}\varepsilon_i(\boldsymbol{h})\to0(\|\boldsymbol{h}\|\to0)(i=1,2,\cdots,n).$$

于是可知f在$\boldsymbol{x}_0$处可微.由数学归纳原理可知对于任一$n \in \mathbb{N}^*$命题都成立. □

Example 5.17 函数可微但偏导函数并不连续例子

设二元函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 则

1.f在0处可微,

2.f的两个偏导数在0不连续.

Proof (i)分别计算f的两个偏导数.当$(x,y)\neq(0,0)$时

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

当$(x,y)=(0,0)$时

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}t\sin\frac{1}{t^2}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}t\sin\frac{1}{t^2}=0.$$

设两个点列$\boldsymbol{a}_n=(1/\sqrt{2n\pi},0),\boldsymbol{b}_n=(0,1/\sqrt{2n\pi})$则$\boldsymbol{a}_n\to0,\boldsymbol{b}_n\to0$.但

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}_n)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin 2n\pi-2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty.\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{b}_n)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\sin 2n\pi-2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty.$$

因此两个偏导数在0处的极限都不是0,因此它们在0处都不连续.

(ii)由于 $\displaystyle\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-f_x'(0,0)h_1-f_y'(0,0)h_2}{\|\boldsymbol{h}\|}=\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\|\boldsymbol{h}\|\sin\frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|^2}=0.$

这表明f在0处可微. □

5.2.4 向量值函数微分与可微映射

Definition 5.11 (向量值函数的微分)

设向量值函数$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$,其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.给定$\boldsymbol{x}_0 \in D$.

若存在$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$使得$\lim\limits_{\|\boldsymbol{h}\| \to 0} \dfrac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0$.则称$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处可微,称线性映射$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$是$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的微分.

记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$.

或者$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})$ 其中 $\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|=o(\|\boldsymbol{h}\|)$ 则称可微

注 若$\boldsymbol{f}$在D上每一点都可微,则称$\boldsymbol{f}$在D上可微

此时对于给定的$\boldsymbol{h}$微分$\mathcal{A}\boldsymbol{h}$是$\boldsymbol{x}$的向量值函数,若它在$D$上连续,则称$\boldsymbol{f}$在$D$上连续可微,记作$\boldsymbol{f} \in C^1(D)$.

注 由于$\mathbb{R}^n$中的范数都是等价的,因此不同范数下的微分都是等价的

注 由于$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$都是$m$维向量,因此不能写成$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0$.

但可以写成$\|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|=o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0$

如果令$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$.则$f$可微当且仅当$\lim\limits_{\boldsymbol{h} \to 0} \dfrac{\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0$

Note 设向量值函数$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$,其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.给定$\boldsymbol{x}_0 \in D$.则

$\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 在$\boldsymbol{x}_0$处可微当且仅当分量函数$f_i(i=1,2,\cdots,m)$都在$\boldsymbol{x}_0$处可微.

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \cdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h}=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_m \end{bmatrix}$.由于

$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|=o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \boldsymbol{h} \to 0$当且仅当$|f_i(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f_i(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{h}|=o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \boldsymbol{h} \to 0$

上式利用范数不等式

因此$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$可微当且仅当$f_i(i=1,2,\cdots,m)$在$\boldsymbol{x}_0$处可微.且$\boldsymbol{A}_i=\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0), \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0), \cdots, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right], \quad i=1,2,\cdots,m$

Definition 5.12 (Jacobi 矩阵)

设向量值函数$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$,其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.

给定$\boldsymbol{x}_0 \in D$.若$\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$的所有分量函数在$x_0$处存在所有偏导数,则可令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \nabla f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \nabla f_2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix}.$$

我们把矩阵$\boldsymbol{A}$称为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处的$Jacobi$矩阵 ($Jacobian\ maxtrix$),记作$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

Theorem 5.2.7 (可微映射的充分条件)

若映射f在x_0的某一邻域内存在$Jacobi$矩阵Jf,且Jf的各元素在点x_0处连续,则映射f在点x_0处可微.

Example 5.18 设线性映射$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.求$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.

设$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中$\boldsymbol{A}$是一个$m\times n$矩阵.由于$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}(t\boldsymbol{h})\|}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-t\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|}{t}=0.$
于是可知$\boldsymbol{J}f=\boldsymbol{A}$.
以上例子说明线性映射的微分就是它本身.
恒等映射$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.则$\boldsymbol{J}f=\boldsymbol{I}_n$,其中$\boldsymbol{I}_n$是$n$级单位矩阵.

Proposition 5.7 (Jacobi 算子的性质)

设向量值函数$f,g:D\to\mathbb{R}^m$,其中D是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.则
(1)$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}f)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.
(2)$\boldsymbol{J}(f+g)=Jf+Jg$.
(3)$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{g}\right)=\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{J}$.
其中$\boldsymbol{A}$是一个$p\times m$矩阵,$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$都看作列向量.

Proof 证明设$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m),\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_m),\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)(i=1,2,\cdots,p,j=1,2,\cdots,m)$.
(1)显然等式两边都是$p\times n$矩阵,下面分别看他们的$(i;j)$元:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}f)(i;j)=\boldsymbol{J}\begin{bmatrix}\sum\limits_{k=1}^m a_{1k}f_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^m a_{pk}f_k\end{bmatrix}(i;j)=\frac{\partial\sum\limits_{k=1}^m a_{ik}f_k}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^m a_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(i;j)=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{p1}&\cdots&a_{pm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}(i;j)=\sum_{k=1}^m a_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

(2)显然等式两边都是$m\times n$矩阵,下面分别看它们的$(i;j)$元:$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(i;j)=\dfrac{\partial\left(f_i+g_i\right)}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$.
$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{g})(i;j)=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

(3)显然等式两边都是$1\times n$矩阵,下面分别看它们的$(1;j)$元:

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{g}\right)(1;j)=\left(\boldsymbol{J}\sum_{k=1}^m f_kg_k\right)(1;j)=\frac{\partial\sum\limits_{k=1}^m f_kg_k}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^m g_k\frac{\partial f_k}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^m f_k\frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$

$$\left(\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}\right)(1;j)=(g_1,\cdots,g_m)\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}(1;j)+(f_1,\cdots,f_m)\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial g_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}(1;j)=\sum_{k=1}^m g_k\frac{\partial f_k}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^m f_k\frac{\partial g_k}{\partial x_j}.$$

注 若函数$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$可微,则可以用可微的定义验证.下面来证明
(1).由于$\boldsymbol{f}$可微,对于任一$\varepsilon>0$都存在$\delta>0$,当$0<\|\boldsymbol{h}\|<\delta$时就有$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\|<\frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{A}\|}\|\boldsymbol{h}\|$
于是$\|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}]\|<\varepsilon\|\boldsymbol{h}\|$.
于是可知$\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$也可微,且$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{f})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.
注 公式(3)的左边是$\mathbb{R}^m$中的内积,右边是$1\times m$与$m\times n$的矩阵乘法,所以这里的$\boldsymbol{g}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{f}\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}$不能写成$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}$和$\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}\boldsymbol{f}$.

Theorem 5.2.8 (向量值函数可微必要条件)

设向量值函数$\boldsymbol{f}$.若$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处可微,则$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处连续.

Proof 由条件可知$\boldsymbol{f}$的所有分量函数都在$\boldsymbol{x}_0$处可微,故$\boldsymbol{f}$的所有分量函数都在$\boldsymbol{x}_0$处连续,于是可知$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}_0$处连续. □

Definition 5.13 (向量值函数的偏微分)

设向量值函数$f: D \to \mathbb{R}^m$,其中D是$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$上的一个开集.给定$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$.

若存在$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}}$

使得$\|f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}_0) - f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{h}\| = o(\|\boldsymbol{h}\|), \quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0$,其中$\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)^{\boldsymbol{T}}$是$\boldsymbol{x}$的增量

则称f在$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$处对$\boldsymbol{x}$可微$(differentiable)$.称关于$\boldsymbol{h}$的线性映射$A_x h$为$f$在$(x_0, y_0)$处对$\boldsymbol{x}$的偏微分$(partial\ differential)$

记作$\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{h}$.

容易知道$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{x}}$就是$f$的$Jacobi$矩阵的一个子矩阵.

Theorem 5.2.9

设向量值函数$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$,其中$D$是$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$上的一个开集.若$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$在$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$处对$\boldsymbol{x}$可微,则

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix}.$$

为了记号简洁,可以令

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_p}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \end{bmatrix}.$$

不难看出,若$\boldsymbol{f}$在$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$可微,则$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x_0, y_0) = \left[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(x_0, y_0), \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}(x_0, y_0)\right]$.

反之,若向量值函数$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}$在$(x_0, y_0)$处连续,则$\boldsymbol{f}$在$(x_0, y_0)$处可微.

从微分的定义看出,只要有范数就可以定义映射的微分

换句话说,在一般的赋范线性空间(一般是$Banana$空间)之间的映射都可以定义可微性,这样一来微分的思想就可以推广到无穷维空间

Definition 5.14 (可微映射)

设赋范线性空间(V_1, N_1)到(V_2, N_2)的映射f.给定$x_0 \in V_1$.

若存在线性映射$\mathcal{A}: V_1 \to V_2$使得$\lim_{N_1(\boldsymbol{h}) \to 0} \frac{N_2[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \mathcal{A}\boldsymbol{h}]}{N_1(\boldsymbol{h})} = 0$.

则称f在$\boldsymbol{x}_0$处可微,称线性映射$\mathcal{A}$是f在$\boldsymbol{x}_0$处的微分.记作$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = \mathcal{A}\boldsymbol{h}$.

以上定义的可微通常称为$Fr\ell chet$可微$(Fr\ell chet\ differentiable)$.

Note 如果要让命题中的结论在$Banach$空间中定义的可微映射继续成立,只需定义一个线性映射的范数.

设线性映射$\mathcal{A}: V \to W$, 令 $\| \mathcal{A} \| := \sup\limits_{x \in V} \frac{\| \mathcal{A}x \|}{\| x \|}$.显然这样定义的 $\| \cdot \|$ 满足范数的三条公理.
线性映射的范数满足以下性质
(1) $\| \mathcal{A}x \| \le \| \mathcal{A} \| \| x \|$.
(2) $\| \mathcal{A}\mathcal{B} \| \le \| \mathcal{A} \| \| \mathcal{B} \|$.

(1) 由于 $\frac{\| \mathcal{A}x \|}{\| x \|} \le \sup\limits_{x} \frac{\| \mathcal{A}x \|}{\| x \|} = \| \mathcal{A} \|$.因此 $\| \mathcal{A}x \| \le \| \mathcal{A} \| \| x \|$.
(2) 由 (1) 可知 $\frac{\| \mathcal{A}\mathcal{B}x \|}{\| x \|} \le \frac{\| \mathcal{A} \| \| \mathcal{B}x \|}{\| x \|} \le \frac{\| \mathcal{A} \| \| \mathcal{B} \| \| x \|}{\| x \|} = \| \mathcal{A} \| \| \mathcal{B} \|, \quad \forall x$
因此 $\| \mathcal{A}\mathcal{B} \| = \sup\limits_{x} \frac{\| \mathcal{A}\mathcal{B}x \|}{\| x \|} \le \| \mathcal{A} \| \| \mathcal{B} \|$.
以上定义的范数要求 $\| x \| \neq 0$.以上定义的线性映射的范数和矩阵范数满足相同的性质, 因此命题4.2中 (1)仍旧成立 : $\mathcal{J}(\mathcal{A}f) = \mathcal{A}\mathcal{J}f$.
这里的$\mathcal{J}f$是一个线性映射, 不再是矩阵.这样一来这个性质就可以推广到无穷维空间.

5.3 多元微分学计算

5.3.1 链式法则与一阶微分形式不变性

Definition 5.15 (多元函数的求导链式法则)

设m元可微函数$y=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)$,其中$x_i$都是$n$元可微函数$x_i=g_i\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)$, $\quad i=1,2,\cdots,m$

则复合函数$y=f\left[g_1\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right),\cdots,g^m\left(t_1,t_2,\cdots,t_n\right)\right]$是一个$n$元可微函数,且

$$\frac{\partial y}{\partial t_i}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

以上结论可以用矩阵表示为
$$\left[\frac{\partial y}{\partial t_1},\frac{\partial y}{\partial t_2},\cdots,\frac{\partial y}{\partial t_m}\right]=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t^m}\\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t^m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \frac{\partial x_n}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m}\end{bmatrix}.$$

令向量值函数$\boldsymbol{g}=\left(g_1,g_2,\cdots,g_m\right)$,则可以用$Jacobi$矩阵简洁地写出:$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})=\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}$,其中$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$.

如果把$\boldsymbol{J}$看作是作用在映射上的算子,则它具有类似于同态的性质,我们称这样的性质为函子性质.

Example 5.19 设函数$u=f(x,y)$满足$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, 其中$x=t,y=t$.求$u_t'$.

Proof 由题设可知$u=f(t,t)=\begin{cases}\dfrac{t^2t}{t^2+t^2}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}=\dfrac{1}{2}t$. 于是可知$u_t'=1/2$.

已经计算过$f_x'=f_y'=0$.如果用链式法则计算得到$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$.

计算结果错误的原因是f在$(0,0)$处不可微.因此不能使用链式法则. □

Example 5.20 设可微函数$u=f\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right)$.求$u_x',u_y',u_z'$.

Proof 法一

令$\xi=x+y+z,\eta=x^2+y^2+z^2$.由链式法则可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}+2x\frac{\partial f}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}+2y\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial \xi}+2z\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

法二

令$\xi=x+y+z,\eta=x^2+y^2+z^2$.由$Jacobi$矩阵等式可知

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\left[\frac{\partial f}{\partial \xi},\frac{\partial f}{\partial \eta}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z}\\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial f}{\partial \xi},\frac{\partial f}{\partial \eta}\right]\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2x & 2y & 2z\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial f}{\partial \xi}+2x\frac{\partial f}{\partial \eta},\frac{\partial f}{\partial \xi}+2y\frac{\partial f}{\partial \eta},\frac{\partial f}{\partial \xi}+2z\frac{\partial f}{\partial \eta}\right].$$

于是可知$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+2x\dfrac{\partial f}{\partial \eta},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+2y\dfrac{\partial f}{\partial \eta},\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+2z\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$

Example 5.21 设函数$u(x,y)$有连续的一阶偏导数,其中$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$.则$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$.

Proof 法一由链式法则可知

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta.$$

于是计算可知$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

法二我们有$Jacobi$矩阵等式:$\left[\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]=\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial \theta}\\\frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial \theta}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right]\begin{bmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{bmatrix}$.

于是可知$\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\left[\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\begin{bmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\begin{bmatrix}r\cos\theta&r\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$.

于是$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\\frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos\theta&-\sin\theta\\r\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}\\\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{bmatrix}$于是可知

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\\frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\begin{bmatrix}r\cos\theta&r\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\cos\theta&-\sin\theta\\r\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}\\\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\begin{bmatrix}r^2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}\\\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial u}{\partial r},\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}\\\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{bmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

Example 5.22 行列式的微分设n阶行列式$y=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$,其中$a_{ik}(i,k=1,2,\cdots,n)$都是$t$的可微函数.求$y'_t$.

Proof 将行列式按第k列展开得$y=\sum_{i=1}^{n}A_{ik}a_{ik}$.其中$A_{ik}$是第$i$行第$k$列的代数余子式.因此$\frac{\partial y}{\partial a_{ik}}=A_{ik}$.

由链式法则可知$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial a_{ik}}\frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t}$.

注容易看出$\sum_{i=1}^{n}A_{ik}\frac{\mathrm{d}a_{ik}}{\mathrm{d}t}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a'_{1k}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a'_{2k}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a'_{nk}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

因此y'等于n个行列式的和,其中第k个行列式是由原行列式的第k列求导后得到的. □

Note 现在来看向量值函数的链式法则.

设可微的向量值函数$\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l:\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_\ell)$

其中每一个分量函数f_i都是m元函数:$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m),\quad i=1,2,\cdots,\ell$

设其中x_i都是n元函数$x_i=g_i(t_1,t_2,\cdots,t_n),\quad i=1,2,\cdots,m$.令$\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$.

若$\boldsymbol{g}$也是一个可微向量值函数,则复合映射$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$是可微映射吗?我们知道$\boldsymbol{f}$可微当且仅当分量函数$f_i(i=1,2,\cdots,\ell)$可微

而每个f_i可微当且仅当每个x_i可微于是得到复合映射$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$是可微映射

根据定理可知$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}(f_1\circ\boldsymbol{g})\\ \boldsymbol{J}(f_2\circ\boldsymbol{g})\\ \vdots\\ \boldsymbol{J}(f_\ell\circ\boldsymbol{g})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}f_1\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{J}f_2\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}\\ \vdots\\ \boldsymbol{J}f_\ell\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}f_1\\ \boldsymbol{J}f_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{J}f_\ell\end{bmatrix}\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}$.于是就得到了向量值函数的链式法则.

以上证法是从多元函数的链式法则直接推演过来的

我们还可以直接用向量值函数微分的定义来证明,这样的证法可以推广到更一般的情况,因此需要掌握.

Theorem 5.3.1 (向量值函数链式法则)

设函数$\boldsymbol{g}:D\to\mathbb{R}^m\ (D\subseteq\mathbb{R}^n)$在$\boldsymbol{t}_0$处可微.向量值函数$\boldsymbol{f}:\boldsymbol{g}(D)\to\mathbb{R}^l$在$\boldsymbol{x}_0$处可微.

若$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0)$,则$f\circ g$在$t_0$处可微,且$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(t_0)=\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{J}\boldsymbol{g}(t_0)$

Proof 由于g和$\boldsymbol{f}$分别在$\boldsymbol{t}_0$和$\boldsymbol{x}_0$处可微,故$\begin{cases}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})\end{cases}$ 其中 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\dfrac{\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0,\quad\lim\limits_{\|\boldsymbol{k}\|\to0}\dfrac{\|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})\|}{\|\boldsymbol{k}\|}=0.$

令$\varepsilon(\boldsymbol{h})=\dfrac{\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|},\quad\delta(\boldsymbol{k})=\dfrac{\|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})\|}{\|\boldsymbol{k}\|}$.对于给定的$h$,令$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0)$,则

$$\|\boldsymbol{k}\|=\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0)\|=\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|\le\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|+\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|=\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|+\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|\le[\|\boldsymbol{B}\|+\varepsilon(\boldsymbol{h})]\|\boldsymbol{h}\|.$$

于是

$$\begin{aligned}&\|(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t}_0+\boldsymbol{h})-(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t}_0)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|\\ =&\|\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0+\boldsymbol{h})]-\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}_0)]-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|\\ =&\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{h})+\boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})\|\le\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{h})\|+\|\boldsymbol{s}(\boldsymbol{k})\|=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|+\delta(\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{k}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|+\delta(\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{k}\|\\ \le&\|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|+\delta(\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{k}\|\le\|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})\|\boldsymbol{h}\|+\delta(\boldsymbol{k})[\|\boldsymbol{B}\|+\varepsilon(\boldsymbol{h})]\|\boldsymbol{h}\|.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\varepsilon(\boldsymbol{h})=0,\ \lim\limits_{\|\boldsymbol{k}\|\to0}\delta(\boldsymbol{k})=0$, 因此

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\frac{\|(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t}_0+\boldsymbol{h})-(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})(\boldsymbol{t}_0)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\{\|\boldsymbol{A}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})+\delta(\boldsymbol{k})[\|\boldsymbol{B}\|+\varepsilon(\boldsymbol{h})]\}=0$$

Theorem 5.3.2 (一阶微分的形式不变性)

设函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可微,则$\mathrm{d}f=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$.

Proof 假设$x_1,x_2,\cdots,x_n$不是自变量,而是$t_1,t_2,\cdots,t_m$的函数:$x_i=x_i(t_1,t_2,\cdots,t_m),\quad i=1,2,\cdots,n$.

令$g(t_1,t_2,\cdots,t_m)=f[x_1(t_1,t_2,\cdots,t_m),x_2(t_1,t_2,\cdots,t_m),\cdots,x_n(t_1,t_2,\cdots,t_m)]$.则

$\mathrm{d}g=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial g}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i$由链式法则可知$\dfrac{\partial g}{\partial t_i}=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial t_i},\quad i=1,2,\cdots,m$因此

$\mathrm{d}g=\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\dfrac{\partial x_j}{\partial t_i}\right)\mathrm{d}t_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial x_j}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j$.这表明复合函数$f$的微分是$\mathrm{d}f=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$.

这表明无论$x_1,x_2,\cdots,x_n$是自变量,还是$t_1,t_2,\cdots,t_m$的函数,f作为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的函数的一阶微分在形式上是不变的.

微分的这个性质被称为一阶微分形式的不变性.在一元微分中已经见过微分的这个性质. □

Example 5.23 设函数$f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$.求$f_x'$和$f_y'$.

Proof 法一直接计算可知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\frac{1}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\quad\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-\frac{1}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2}+1}=-\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

法二由一阶微分形式不变性可知

$$\mathrm{d}f(x,y)=\mathrm{d}\arctan\frac{x}{y}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)}\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

由全微分的定义可知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\quad\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

5.3.2 高阶偏导数

Example 5.24 设函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$. 求函数$f$在$(0,0)$处的两个二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$

Proof 容易验证f在$(0,0)$处连续.先求f的一阶导函数.当

$$x^2+y^2>0\text{时}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

当$x=y=0$时$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0.\quad \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0.$

于是可以计算f在$(0,0)$处的两个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{y}\left[\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

Note 由上例子可知一般来说混合偏导数,对x和y的求导次序是不能随便交换的.下面来探索偏微分算子可以换序的条件.

令

$$\begin{aligned}\Phi(h,k)&=\frac{1}{h}\left[\frac{f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0+h,y_0\right)}{k}-\frac{f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{k}\right]\\&=\frac{1}{k}\left[\frac{f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0+h,y_0\right)}{h}-\frac{f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}\right].\end{aligned}$$

则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'_y\left(x_0+h,y_0\right)-f'_y\left(x_0,y_0\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\Phi(h,k).$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f'_x\left(x_0,y_0+k\right)-f'_x\left(x_0,y_0\right)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\lim\limits_{h\to 0}\Phi(h,k).$

因此偏微分算子的换序问题本质上就是累次极限的换序问题.可以转化到累次极限中一节的换序问题

Theorem 5.3.3

设函数$f:D\to\mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^2$中的开集.

若f'_x,f'_y,f''_{xy}在(x_0,y_0)的附近存在,且f''_{xy}在(x_0,y_0)处连续(可以减弱到有极限,但是不常用该条件)

则f''_{yx}在(x_0,y_0)处存在,且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

Proof 令$\varphi(h,k)=\left[f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0+h,y_0\right)\right]-\left[f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]$.

再令$g(x)=f\left(x,y_0+k\right)-f\left(x,y_0\right)$.

则由$Lagrange$中值定理可知,存在$\theta_1,\theta_2\in(0,1)$使得

$$\begin{aligned}\varphi(h,k)&=g\left(x_0+h\right)-g\left(x_0\right)=g'\left(x_0+\theta_1 h\right)h=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_1 h,y_0+k\right)h-\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0+\theta_1 h,y_0\right)h\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k\right)hk.\end{aligned}$$

由于f''_{xy}在(x_0,y_0)处连续,因此$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(x_0,y_0\right)$.

另一方面,由于f'_x,f'_y存在,故由累次极限一节可知

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'_y\left(x_0+h,y_0\right)-f'_y\left(x_0,y_0\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f'_x\left(x_0,y_0+k\right)-f'_x\left(x_0,y_0\right)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}=\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{\varphi(h,k)}{hk}$. □

Theorem 5.3.4 (偏导算子的交换定理)

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^n$中的开集.
若$k-1$阶的一切偏导数和一切k阶混合偏导都存在, 且它们都在D中连续,
则任一k阶混合偏导的计算结果与逐次计算偏导的次序无关.

Proof (i)证明$k=2$的情况, 即$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.事实上, 只需将$x_i$和$x_j$以外的变量看作常数, 那么就变成了和上个定理一样的情况.
(ii)当$k>2$时, 先证明$\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_h}\partial x_{i_{h+1}}\cdots\partial x_{i_k}} = \dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{h+1}}\partial x_{i_h}\cdots\partial x_{i_k}}$
其中$i_1, i_2, \cdots, i_h, i_{h+1}, i_k$是$1, 2, \cdots, n$个数中$k$个数的某一个排列 (允许重复).
首先前$h-1$阶导数是相等的, 应用 (i)的结论可以知道进行完h阶和$h+1$阶求导后还是相等的.而剩下的运算是相同的, 因此上式成立.
(iii)由于任一k阶混合偏导的逐次偏导顺序变化总是可以分解为有限次的两个相继元素偏导的互换, 于是可知一般情况也是成立的.

Definition 5.16 (Laplace 算子)

设n元函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.令$\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.则称$\Delta$为$Laplace$算子 ($Laplace\ operator$)
已知$\Delta f = \nabla f \cdot (\nabla f)^T$

Proposition 5.8

下面来看复合函数的高阶偏导数.
用第二数学归纳法容易证明如果两个函数都有连续偏导, 则它们的复合函数也有连续偏导.更确切地有以下命题.

设函数$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.和向量值函数$\boldsymbol{x} = \begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \cdots, t_m) \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \cdots, t_m) \\ \cdots \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \cdots, t_m) \end{cases}$.

若函数f和$\boldsymbol{x}$的所有分量函数都有一切k阶连续偏导数, 则复合函数$f \circ \boldsymbol{x}$的所有k阶偏导都存在, 且都是连续的
且它们都是关于f和$x_1, x_2, \cdots, x_n$的偏导数的多项式.

Definition 5.17

设多元函数$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.若对于任一$x \in \mathbb{R}^n$和任一非零实数$t$都有$F(tx) = t^k F(x)$
则称F为k次齐次函数 ($homogeneous\ \ function$).此时方程$F(x)=0$称为齐次方程 ($homogeneous\ equation$).

Theorem 5.3.5 ($Euler$齐次函数定理)

设n元函数$f \in C^1(D)$, 其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集, 则f是一个k次齐次函数 $\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x) = kf(x)$.

Proof (i)证明必要性.设f是一个k次齐次函数, 则对于任一$x \in D$都有$f(t\boldsymbol{x}) = t^k f(\boldsymbol{x})$.
在等式两边求t的偏导可得$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(t\boldsymbol{x}) = kt^{k-1} f(\boldsymbol{x})$
令$t=1$, 即得$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x) = kf(x)$

(ii)证明充分性.令$\varphi(t)=\dfrac{f(t\boldsymbol{x})}{t^k}$.

可知$\varphi'(t)=\dfrac{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(t\boldsymbol{x})\right]t^k-kt^{k-1}f(t\boldsymbol{x})}{t^{2k}}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^n tx_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(t\boldsymbol{x})-kf(t\boldsymbol{x})}{t^{k+1}}=0.$

因此$\varphi(t)$是常值函数.设$\varphi(t)=C$.令$t=1$得$C=\varphi(1)=f(\boldsymbol{x})$.于是可知$\dfrac{f(t\boldsymbol{x})}{t^k}=\varphi(t)=C=f(\boldsymbol{x})$. □

Example 5.25 设$Vandermonde$行列式$u=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$.

则$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{n(n-1)}{2}u$.

Proof 由于$u=\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$, 故

$u(t\boldsymbol{x})=\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(tx_j-tx_i)=t^{\mathrm{C}_n^2}u$.因此$u$是一个$\mathrm{C}_n^2$次齐次函数, 于是可知$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=\mathrm{C}_n^2u=\frac{n(n-1)}{2}u$.

Example 5.26 设可微函数$u=F(x,y)$满足$x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.则$F(x,y)$在极坐标下只是$\theta$的函数.

Proof 由题意可知$F(x,y)$是一个零次齐次函数, 故$F(x,y)=F(tx,ty)$.

令$t=1/x$, 则$F(x,y)=F\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$.令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则$F(x,y)=F(1,\tan\theta)$.

于是可知$F(x,y)$在极坐标下只是θ的函数.

Proposition 5.9

k次齐次函数满足$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^k\varphi\left(\dfrac{x_2}{x_1},\cdots,\dfrac{x_n}{x_1}\right)$.

Theorem 5.3.6

设n元函数$f\in C^n(D)$, 其中D是$\mathbb{R}^n$上的一个开集

若f是一个k次齐次函数, 则$\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^n f(\boldsymbol{x})=k(k-1)\cdots(k-n+1)f(\boldsymbol{x})$.

当$k<n$时上式右侧为零.

Theorem 5.3.7 (多项式定理)

设多项式$x_1+x_2+\cdots+x_n$.它的$k\ (k\in\mathbb{N}^*)$次展开式为$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k=\displaystyle\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

Proof 对n进行归纳.当$n=2$时命题就是二项式定理.

假设$n-1$的情况命题成立, 下面来看n的情况.由归纳假设和二项式定理可知

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k=[(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+x_n]^k=\sum_{\alpha_n=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_n!\,(k-\alpha_n)!}(x_1+\cdots+x_{n-1})^{k-\alpha_n}x_n^{\alpha_n}$$
$$=\sum_{\alpha_n=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_n!\,(k-\alpha_n)!}\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=k-\alpha_n}\frac{(k-\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{\alpha_n}$$
$$=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

由数学归纳原理可知对于任一$n\in\mathbb{N}^*$命题都成立. □

Theorem 5.3.8

设n元函数有一切连续的k阶导数, 则f有k阶全微分, 且 $\mathrm{d}^k y=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^k y$.

Proof 对k进行归纳. 当$k=1$时命题成立. 假设k阶全微分展开式成立, 则$k+1$阶全微分为

$$\mathrm{d}^{k+1}y=\mathrm{d}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)^k y\right]=\mathrm{d}\left(\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\mathrm{d}x_1^{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_n^{\alpha_n}\right)y$$
$$=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_i^{\alpha_i+1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\mathrm{d}x_1^{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_i^{\alpha_i+1}\cdots\mathrm{d}x_n^{\alpha_n}\right)y$$
$$=\left(\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\mathrm{d}x_1^{\alpha_1}\cdots\mathrm{d}x_n^{\alpha_n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)y$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)^k\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)^{k+1}y.$$

由数学归纳原理可知对于一切$k\in\mathbb{N}^*$命题都成立. □

Definition 5.18 (多重指标记号)

一组指标$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可以记作 : $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 设另一个多重指标$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,
这样的记号称为多重指标记号 $(multi-indexnotation)$. 规定如下几种记号

1.$|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

2.$\boldsymbol{\alpha}!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$

3.$\mathrm{C}_k^{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{k!}{\alpha!}=\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!},\quad k=|\boldsymbol{\alpha}|.$

4.$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

5.$\mathcal{D}^{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$

6.$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}:=\mathrm{d}x_1^{\alpha_1}\mathrm{d}x_2^{\alpha_2}\cdots\mathrm{d}x_n^{\alpha_n}.$

7.$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n)$

8.$\boldsymbol{\alpha}\le\boldsymbol{\beta}\Longleftrightarrow\alpha_i\le\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$

9.$\mathrm{C}_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}}=\mathrm{C}_{\alpha_1}^{\beta_1}\mathrm{C}_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\mathrm{C}_{\alpha_n}^{\beta_n}=\frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})!}$

注 有了多重指标记号就可以把多项式定理写成 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\boldsymbol{x}^{\alpha}=\sum_{|\alpha|=k}\mathrm{C}_k^{\alpha}\boldsymbol{x}^{\alpha}$
这样就在形式上与二项式定理一致了.
于是就可以写出高阶微分的展开式 $\mathrm{d}^k y=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^k y=\sum_{|\alpha|=k}\mathrm{C}_k^{\alpha}\mathcal{D}^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\alpha}y.$

Example 5.27 设函数$u=\arctan\dfrac{x}{y}$.求$u_{xxx},u_{xxy},u_{xyy},u_{yyy}$.

Proof 计算一阶全微分：$\mathrm{d}u=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

计算二阶全微分：$\mathrm{d}^2u=\dfrac{d(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\left(x^2+y^2\right)-(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

计算三阶全微分：

$$\mathrm{d}^3u=\frac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2-8(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)\left(x^2+y^2\right)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$

$$=\frac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)\left(x^2+y^2\right)-8(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2}{\left(x^2+y^2\right)^4}$$

于是可知$\dfrac{\partial^3u}{\partial x^3}=\dfrac{6x^2y-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}$, $\dfrac{\partial^3u}{\partial x^2y}=\dfrac{6xy^2-2x^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}$, $\dfrac{\partial^3u}{\partial xy^2}=\dfrac{2y^3-3x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3}$, $\dfrac{\partial^3u}{\partial y^3}=\dfrac{2x^3-6xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}$

Note 和一元函数的情况类似，多元函数的高阶微分不具有形式不变性.

设函数$u=f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，其中$x_i=x_i\left(t_1,t_2,\cdots,t_m\right)(i=1,2,\cdots,n)$.计算复合函数的二阶微分：

$$\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}(\mathrm{d}u)=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)$$

$$=\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1+\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_2+\cdots+\mathrm{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\mathrm{d}x_n+\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x_1\right)+\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x_2\right)+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}\left(\mathrm{d}x_n\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^2u+\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}^2x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}^2x_2+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}^2x_n.$$

通过以上计算可以看到二阶微分不再具有形式不变性，这是因为当x_i是一个中间变量时$\mathrm{d}x_i$不再是一个常数，而是一个函数.

特别地，若x_i是一个线性函数，即$x_i=k_0+k_1t_1+\cdots+k_mt_m$, $k_0,k_1,\cdots,k_m\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n$，则$\mathrm{d}x_i=k_1\mathrm{d}t_1+\cdots+k_m\mathrm{d}t_m$.

此时$\mathrm{d}x_i(i=1,2,\cdots,n)$都是常数，因此$\mathrm{d}^kx_1=\mathrm{d}^kx_2=\cdots=\mathrm{d}^kx_n\equiv0$, $k=2,3,\cdots$.因此复合函数u可以继续保持微分形式的不变性.

5.3.3 多元函数中值定理与泰勒公式

Theorem 5.3.9

设可微函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中$D \subseteq \mathbb{R}^n$是一个凸区域.
则对于任意$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in D$, 则存在$\theta \in (0,1)$使得$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})$.

Proof 令$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}), \quad t \in [0,1]$.显然$\varphi$是$[0,1]$上的一个可微函数.由一元函数的$Lagrange$中值定理可知
存在$\theta \in (0,1)$使得$\varphi'(\theta) = \varphi(1) - \varphi(0) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})$.设$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$,
由链式法则可知$\varphi'(\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})h_2 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})h_n = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})$.
微分形式的有限增量公式更加简洁. □

Theorem 5.3.10

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^n$中的一个区域.
若对于任一$x \in D$都有$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) = 0$.则$f$是$D$上的一个常值函数.

Proof (i)当D是$\mathbb{R}^n$上的一个凸区域时, 由多元函数的微分中值定理立刻可知f是D上的一个常值函数.
(ii)当D不是$\mathbb{R}^n$上的一个凸区域时.任取$\boldsymbol{x}_0 \in D$.
令$A = \{x \in D : f(x) = f(x_0)\}, \quad B = \{x \in D : f(x) \neq f(x_0)\}$.下面来证明$B = \varnothing$.
显然$A \neq \varnothing$.(因为有x_0该点存在).任取$\boldsymbol{a} \in A \subseteq D$.由于$D$是一个开集, 因此存在邻域$N_r(\boldsymbol{a}) \subseteq D$.
由于邻域都是凸区域, 因此f在$N_r(\boldsymbol{a})$上是常值函数.因此对于任一$\boldsymbol{x} \in N_r(\boldsymbol{a})$都有$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}_0)$.
因此$N_r(\boldsymbol{a}) \subseteq A$, 这表明$A$是一个开集.同理可证$B$也是一个开集.
由于$A \cup B = D, A \cap B = \varnothing, A \neq \varnothing$, 且$D$是一个连通集, 因此$B = \varnothing$. □

Theorem 5.3.11 (多元函数带拉格朗日型余项)

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中$D \subseteq \mathbb{R}^n$是一个凸区域.$f \in C^{k+1}(D)$, 任取$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in D$
则存在$\theta \in (0,1)$使得$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})$.

Proof 令$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}), \quad t \in [0,1]$.显然$\varphi \in C^{k+1}([0,1])$.
由一元函数的带$Lagrange$余项的$Taylor$公式可知, 存在$\theta \in (0,1)$使得
$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \varphi(1) - \varphi(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\mathrm{d}^i \varphi(0) + \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{d}^{k+1}\varphi(\theta)$.
由于$\varphi(t)$是多元函数f和线性函数$\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}$的复合函数, 因此它的高阶微分继续保持形式不变性, 于是可知
$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\mathrm{d}^i \varphi(0) + \frac{1}{(m+1)!}\mathrm{d}^{k+1}\varphi(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(k+1)!}\mathrm{d}^{k+1} f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})$. □

Theorem 5.3.12

设函数$f: D \to \mathbb{R}$, 其中$D \subseteq \mathbb{R}^n$是一个凸区域.$f \in C^{k+1}(D)$
任取$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in D$, 则存在$\theta \in (0,1)$使得$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\mathrm{d}^i f(\boldsymbol{x}) + R_k(\boldsymbol{x})$.
其中余项$R_k(x)$可以是

$$R_k(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(k+1)!}\mathrm{d}^{k+1}f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}) \qquad \text{拉格朗日型}$$
$$R_k(\boldsymbol{x})=\frac{1}{k!}\mathrm{d}^{k+1}f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})(1-\theta)^k \qquad \text{柯西型}$$
$$R_k(\boldsymbol{x})=\frac{1}{k!}\int_0^1(1-t)^k\,\mathrm{d}^{k+1}f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\mathrm{d}t \qquad \text{积分型}$$

Example 5.28 将下列多项式在 $(1,1,1)$处展开成$Taylor$多项式：$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$

Proof 解先求各个偏导数：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3z,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=-3y,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=6,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=6,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=-3.$$

其余各阶偏导都是零.计算 $(1,1,1)$处的各阶偏导数：

$$f(1,1,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1)=6,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(1,1,1)=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(1,1,1)=-3.$$

由$Taylor$公式可知

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{2}\left(6h_1^2+6h_2^2+6h_3^2-6h_1h_2-6h_2h_3-6h_3h_1\right)+\frac{1}{6}\left(6h_1^3+6h_2^3+6h_3^3-18h_1h_2h_3\right)\\
&=h_1^3+h_2^3+h_3^3+3h_1^2+3h_2^2+3h_3^2-3h_1h_2-3h_2h_3-3h_3h_1-3h_1h_2h_3\\
&=(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3+3(x-1)^2+3(y-1)^2+3(z-1)^2\\
&-3(x-1)(y-1)-3(y-1)(z-1)-3(z-1)(x-1)-3(x-1)(y-1)(z-1).
\end{aligned}$$

在实际应用时,只需要把$Taylor$公式展开到二阶,具体写出来就是

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x})+\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2f(\boldsymbol{x})+R_2(\boldsymbol{x})$$
$$=f(\boldsymbol{x})+h_1\frac{\partial}{\partial x}f(\boldsymbol{x})+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}f(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}\sum_{i+j=2}^{n}h_ih_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}f(\boldsymbol{x})+R_2(\boldsymbol{x}).$$

Theorem 5.3.13 (Hesse 矩阵)

设函数$f:D\to\mathbb{R}$,其中$D\subseteq\mathbb{R}^n$是一个开集.$f\in C^2(D)$.令$\boldsymbol{H}f=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}.$

我们称矩阵$\boldsymbol{H}f$为f的$Hesse$矩阵 $(Hessian-matrix)$.

注 $Hesse$矩阵是以德国数学家$LudwigOttoHesse$命名的.

不难看出,$Hesse$矩阵可以看作是f的梯度∇f的$Jacobi$矩阵,也可以看作f的$Jacobi$矩阵的$Jacobi$矩阵：$\boldsymbol{H}f=\boldsymbol{J}(\nabla f)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{J}f).$

函数的$Jacobi$矩阵就是多元函数的导数,因此$Hesse$矩阵实质上就是函数的二阶导.

用函数f的梯度和$Hesse$矩阵可以把展开到二阶记作$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+\nabla f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+R_2(\boldsymbol{x}).$

由于$Hesse$矩阵是一个对称矩阵,因此$\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$表示一个二次型.

Theorem 5.3.14 (带$Peano$余项的$Taylor$公式)

设函数$f:D\to\mathbb{R}$, 其中$D\subseteq\mathbb{R}^n$是一个凸区域.$f\in C^m(D)$, 任取$\vec{\boldsymbol{x}}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{x}_0\in D$, 令$\vec{\boldsymbol{h}}=\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{x}}_0=(h_1,\cdots,h_n)$, 则

$$f(\vec{\boldsymbol{x}})=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+o\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^m\right)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+o\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^m\right),\quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0.$$

Proof 1.

由于$f\in C^m(D)$, 由带$Lagrange$余项的$Taylor$公式可知

$$f(\vec{\boldsymbol{x}})=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}d^k f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\ +\ \frac{1}{m!}d^m f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\ +\ \frac{1}{m!}d^m f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)$$

改写为多重指标形式

$$f(\vec{\boldsymbol{x}})=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+\sum_{|\alpha|=m}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right).$$

2.

而题干中要求证明的式子为$f(\vec{\boldsymbol{x}})=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+o\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^m\right)$

其$=\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\vec{\boldsymbol{x}})\ +\ \frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+o\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^m\right)$

3.

因此只需证明 WTS : $\displaystyle\sum_{|\alpha|=m}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f(x_0)+o\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^m\right),\quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0.$

4.

由于$f\in C^m(D)$, 因此

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\mathcal{D}^\alpha f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)=\mathcal{D}^\alpha f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)\iff\mathcal{D}^\alpha f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)=\mathcal{D}^\alpha f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+o(1),\quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0$$

$$\iff\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)=\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+o\left(\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha\right),\quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0$$

$$\iff\sum_{|\alpha|=m}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)+o\left(\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha\right),\quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0.$$

结合3.

只需 WTS : $\left|\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha\right|\leqslant\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^m$

5.

因为$\mathbb{R}^n$中的范数都等价所以考虑该点

记$H=\max\{|h_1|\cdots|h_n|\}$

由于$\left|\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha\right|=\left|h_1^{\alpha_1}\cdots h_n^{\alpha_n}\right|=|h_1|^{\alpha_1}\cdots|h_n|^{\alpha_n}\le H^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}=\|\vec{\boldsymbol{h}}\|_\infty^m$

因此$\displaystyle\sum_{|\alpha|=m}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\theta\vec{\boldsymbol{h}}\right)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{\vec{\boldsymbol{h}}^\alpha}{\alpha!}\mathcal{D}^\alpha f(\boldsymbol{x}_0)+o\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^m\right),\quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0$.于是可知命题成立.

既然多元函数也有微分中值定理,那么很自然地想法是想把微分中值定理进一步推广到向量组函数中.
下面先看一个例子.设向量值函数$\vec{\boldsymbol{f}}(t)=\left(t^2,t^3\right)\ (0\leq t\leq 1)$.则$\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(t)=\begin{bmatrix}2t\\3t^2\end{bmatrix}$.
假设存在$\theta\in(0,1)$使得$\vec{\boldsymbol{f}}(1)-\vec{\boldsymbol{f}}(0)=\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\theta)(1-0)=\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\theta)$.则$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\theta\\3\theta^2\end{bmatrix}$.出现矛盾,因此这样的$\theta$不存在.

Theorem 5.3.15 (拟微分中值定理)

设向量值函数$\vec{\boldsymbol{f}}:D\to\mathbb{R}^m$,其中$D$是$\mathbb{R}^n$上的凸区域.其中$\vec{\boldsymbol{f}}$返回出为列向量
若$\vec{\boldsymbol{f}}$在D上可微,则对于任意$\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{x}}+\vec{\boldsymbol{h}}\in D$,都存在$\theta\in(0,1)$使得$\parallel\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}}+\vec{\boldsymbol{h}})-\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}})\parallel\leq\parallel\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\parallel\parallel\vec{\boldsymbol{h}}\parallel$.

Proof 令$\varphi(t)=\boldsymbol{u}^T\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+t\vec{\boldsymbol{h}}),\quad t\in[0,1]$.
容易知道$\varphi(t)$是$[0,1]$上连续,在$(0,1)$上可导.由$Lagrange$中值定理可知
存在$\theta\in(0,1)$使得$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)=\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{u}^T\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\right)=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{J}\left(\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\right)=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\vec{\boldsymbol{h}}$.
另一方面$\varphi(1)-\varphi(0)=\boldsymbol{u}^T\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\vec{\boldsymbol{h}})-\boldsymbol{u}^T\vec{\boldsymbol{f}}(x)=\boldsymbol{u}^T[\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\vec{\boldsymbol{h}})-\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x})]$
则我们有$\left\|\boldsymbol{u}^T[\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\vec{\boldsymbol{h}})-\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x})]\right\|=\left\|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\vec{\boldsymbol{h}}.\right\|$
令$\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\vec{\boldsymbol{h}})-\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x})$.
则$LHS=\parallel\boldsymbol{u}\parallel^2$.
$RHS=\left\|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\vec{\boldsymbol{h}}\right\|\leq\parallel\boldsymbol{u}\parallel\parallel\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\vec{\boldsymbol{h}}\parallel\leq\parallel\boldsymbol{u}\parallel\parallel\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\parallel\parallel\vec{\boldsymbol{h}}\parallel$
于是可知$\parallel\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\vec{\boldsymbol{h}})-\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x})\parallel\leq\parallel\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x}+\theta\vec{\boldsymbol{h}})\parallel\parallel\vec{\boldsymbol{h}}\parallel$. □

Example 5.29 设可微向量值函数$\boldsymbol{f}:D\to\mathbb{R}^m$,其中$D$是$\mathbb{R}^n$上的凸区域.
若$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$在$D$上每一点处都是零矩阵.则$\boldsymbol{f}$是$D$上的常值函数.

Proof 取定一点$x_0\in D$.对于任一$x\in D$,由拟微分中值定理可知$\left\|\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x})-\vec{\boldsymbol{f}}\left(\vec{x}_0\right)\right\|\leq\parallel 0\parallel\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|=0$.因此$\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{x})=\vec{\boldsymbol{f}}\left(\vec{x}_0\right)\ (\forall x\in D)$.
这表明$\boldsymbol{f}$是D上的常值函数.拟微分中值定理对于估计向量值函数的界有着至关重要的作用.在隐映射定理的证明中将会看到这一点.

5.3.4 多元函数普通极值

Theorem 5.3.16 (极值的必要条件)

设n元函数f在$\boldsymbol{a}$处取得极值,且f在$\boldsymbol{a}$处的各个偏导数都存在,则$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})=0, \quad i=1,2,\cdots,n.$

若函数f在$\boldsymbol{a}$可微,则取得极值的必要条件可以写作 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})=0$.

Proof 只证明$\boldsymbol{a}$是极小值点的情况.由极小值点的定义可知存在$\boldsymbol{a}$的一个球形邻域$N_r(\boldsymbol{a})$使得对于任一$\boldsymbol{x}\in N_r(\boldsymbol{a})$都有$f(\boldsymbol{x})\geq f(\boldsymbol{a})$.

设$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$.下面来证明$f_i(\boldsymbol{a})=0$.

令$\varphi(t)=f(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_n)$.任取$t$使得$|t-a_i|<r$.

由于 $\|(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_n)-(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots,a_n)\|=|t-a_i|<r$.

因此 $(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_n)\in N_r(\boldsymbol{x})$.

故$f(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_n)\geq f(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots,a_n)\Longleftrightarrow\varphi(t)\geq\varphi(a_i)$

这表明φ在a_i处取到极小值,由$Fermat$引理可知$\varphi'(a_i)=0\Longleftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})=0$.

同理可证其余偏导数也都为零. □

Theorem 5.3.17 (多元函数极值充分条件)

设n元函数f,$\boldsymbol{x}_0$是f的一个驻点.f在$\boldsymbol{x}_0$的一个邻域内有连续的二阶偏导数.

(1)若$\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)$是正定的,则$\boldsymbol{x}_0$是$f$的一个严格极小值点.

(2)若$\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)$是负定的,则$\boldsymbol{x}_0$是$f$的一个严格极大值点.

(3)若$\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)$是不定的,则$\boldsymbol{x}_0$不是$f$的极值点.

Proof 由于f在x_0的一个邻域内有连续的二阶偏导数,因此f在x_0处可微,且$\boldsymbol{x}_0$是f的一个驻点,

故$f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)=\dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{h}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{h}}+o\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|^2\right), \quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0.$其中$\vec{\boldsymbol{h}}=\vec{x}-\vec{x}_0$.$(*)$

(1)令$Q(\vec{\boldsymbol{y}})=\vec{\boldsymbol{y}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{y}}, \quad \vec{\boldsymbol{y}}\in S^{n-1}$.其中$S^{n-1}$是单位球面$S^{n-1}$.由于$\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)$是正定的,因此$Q(\vec{\boldsymbol{y}})>0, \quad \forall\vec{\boldsymbol{y}}\in S^{n-1}$.

显然Q是S^{n-1}上的连续函数,且S^{n-1}是一个有界闭集,因此Q在S^{n-1}上可以取得最小值

设这个最小值是$m>0$于是$Q(\boldsymbol{y})\geq m>0, \quad \forall\boldsymbol{y}\in S^{n-1}$.

于是$\dfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{h}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{h}}=\dfrac{1}{2}\|\vec{\boldsymbol{h}}\|^2\left(\dfrac{\vec{\boldsymbol{h}}^T}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\dfrac{\vec{\boldsymbol{h}}}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\right)=\dfrac{1}{2}\|\vec{\boldsymbol{h}}\|^2Q\left(\dfrac{\vec{\boldsymbol{h}}}{\|\vec{\boldsymbol{h}}\|}\right)\geq\dfrac{m}{2}\|\vec{\boldsymbol{h}}\|^2$.

结合$(*)$可知$f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)\geq\|\vec{\boldsymbol{h}}\|^2\left[\dfrac{m}{2}+o(1)\right], \quad \|\boldsymbol{h}\|\to 0$.因此$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_0)$.这表明$f$在$\boldsymbol{x}_0$这点取到严格的极小值点.

同理可知 (2)成立.

(3)由于$\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)$是不定的,故存在$\vec{\boldsymbol{p}},\vec{\boldsymbol{q}}\in\mathbb{R}^n$使得$\vec{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{p}}<0<\vec{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{q}}$.

$(*)$中的$\vec{\boldsymbol{h}}$分别取$\varepsilon\vec{\boldsymbol{p}}$和$\varepsilon\vec{\boldsymbol{q}}$得

$$f(\vec{x}_0+\varepsilon\vec{\boldsymbol{p}})-f(\vec{x}_0)=\frac{1}{2}\left[\vec{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{p}}\right]\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)=\left[\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{p}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{p}}+o(1)\right]\varepsilon^2.$$

$$f(\vec{x}_0+\varepsilon\vec{\boldsymbol{q}})-f(\vec{x}_0)=\frac{1}{2}\left[\vec{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{q}}\right]\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)=\left[\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{H}f(\vec{x}_0)\vec{\boldsymbol{q}}+o(1)\right]\varepsilon^2.$$

当ε充分小时$f(\vec{x}_0+\varepsilon\vec{\boldsymbol{p}})<f(\vec{x}_0)<f(\vec{x}_0+\varepsilon\vec{\boldsymbol{q}})$.这表明$x_0$不是$f$的极值点. □

Proposition 5.10 (最小二乘法)

最小二乘法在平面上有一组点(x_i,y_1) $(i=1,2,\cdots,n)$,发现这组点的近似地分布在某一条直线附近.

现在我们希望找到一条直线来拟合这组点.那么很自然的想法是,所有点与这条直线的偏差之和应最小.

为了取消中值定理和$Taylor$公式正负性的影响,于是我们考虑偏差的平方和.

设满足要求的直线为$y=ax+b$,令$\varphi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$.讨论二元函数$\varphi$是否存在最小值.

解 建立驻点方程:$\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}(a,b)=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0,\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}(a,b)=2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0.$

整理得到$\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)a+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)b=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)a+nb=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\end{cases}.$

根据$Cramer$法则,需要看系数行列式是否为零.

由$Cauchy-Schwarz$不等式可知$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}1\cdot x_i\right)^2\leq\sum\limits_{i=1}^{n}1^2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=n\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right).$

现在假设$x_1,x_2,\cdots,x_n$不全相等,则上述$\leq$取到严格$<$.

于是可知线性方程组的系数矩阵不为零,因此方程组有唯一解这表明φ有唯一驻点.

下面来看这个驻点是不是极值点.计算$Hesse$矩阵:$\boldsymbol{H}\varphi(a,b)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}&\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a\partial b}\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial a\partial b}&\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial b^2}\end{bmatrix}_{(a,b)}=2\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2&\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i&n\end{bmatrix}.$

由于$n\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2>0,\quad \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2>0.$

由此可知φ的唯一驻点正是它的极小值.显然当$(a,b)\to(\infty,\infty)$时,$\varphi(a,b)\to+\infty$.可知,φ的极小值点就是它的最小值点.

此时的直线方程为$\begin{vmatrix}x&y&1\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2&\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i&\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i&\sum\limits_{i=1}^{n}y_i&n\end{vmatrix}=0.$

5.4 隐函数定理

5.4.1 多类型型隐函数定理及求导方法

Theorem 5.4.1 (1+1 型隐函数定理)

设函数$F: D \to \mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^2$中的一个开集.若F满足

$1^\circ F \in C^1(D)$.

2°存在$(x_0, y_0) \in D$使得$F(x_0, y_0) = 0$.

$3^\circ F_y'(x_0, y_0) \neq 0$.

则存在一个包含(x_0, y_0)的开矩形$I \times J \subseteq D$使得

1°方程$F(x, y) = 0$在$I \times J$上确定了一个y关于x的函数, 即对于任一$x \in I$方程$F(x, y) = 0$在J中都有唯一的解$f(x)$.

$2^\circ y_0 = f(x_0)$.

$3^\circ f \in C^1(I)$.

4°当$x \in I$时, 有$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}$, 其中$y = f(x)$.

Proof (i)证明隐函数的存在性.由于$F_y'(x_0, y_0) \neq 0$, 不妨设$F_y'(x_0, y_0) > 0$.
由于F_y'在D上连续故存在包含(x_0, y_0)的开矩形$I' \times J \subseteq D$使得在$I' \times J$上保持$F_y' > 0$.
因此对于任意给定的$x \in I'$, 关于y的函数$F(x, y)$在闭区间$\bar{J}$都是严格递增的.
设$\bar{J} = [c, d]$, 由于$F(x_0, y_0) = 0$, 因此$F(x_0, c) < 0, \quad F(x_0, d) > 0$.
由于F在D上连续, 因此存在含有x_0的开区间$I \subseteq I'$使得当$x \in I$时$F(x, c) < 0, \quad F(x, d) > 0$.
由零点定理可知, 对于任一$x \in I$都存在$f(x) \in J$使得$F(x, f(x)) = 0$.
由于函数是严格递增的, 故这样的$f(x)$是唯一存在的.这就证明了1°.
特别地, 当$x = x_0$时存在唯一的$f(x_0)$满足$F(x, y) = 0$, 因此$y_0 = f(x_0)$.这就证明了2°.

(ii)证明连续性.先证明f在I上连续.先看f在x_0的情况.事实上(i)的证明过程已经证明了f在x_0连续.
只要让$\varepsilon > 0$, 只需令$J = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$, 就存在满足$(i)$中证明过程中要求的$I$
因此只需取δ满足$N_\delta(x_0) \subseteq I$, 就有当$x \in N_\delta(x_0)$时$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.这表明$f$在$x_0$处连续.
现任取$x_1 \in I$, 下面证明f在x_1连续.设$y_1 = f(x_1)$.对于(x_1, y_1)可以重复前面对(x_0, y_0)的讨论过程.
这样就可以知道以下事实 : 存在包含(x_1, y_1)的开矩形$\tilde{I} \times \tilde{J} \subseteq I \times J$使得当$x \in \tilde{I}$时方程$F(x, y) = 0$在$\tilde{J}$上有唯一解$g(x)$
且函数g在x_1处连续.由于当$x \in \tilde{I}$时唯一性$f = g$, 这表明f在x_1处连续.

(iii)证明可微性.设$x \in I$, 取充分小的h使得$x + h \in I$.设$y = f(x)$, 则$F(x, y) = 0.k = f(x + h) - f(x)$.
则$F(x + h, y + k) = F(x + h, f(x + h)) = 0$.由于$F \in C^1(D)$, 故$F$在$D$上可微
因此$0 = F(x + h, y + k) - F(x, y) = \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} h + \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} k + \alpha h + \beta k$, 其中$\alpha, \beta$满足当$(h, k) \to (0, 0)$时$\alpha \to 0, \beta \to 0$.
由于f在I上连续, 因此当$h \to 0$时, $k \to 0$.这表明当$h \to 0$时$\alpha \to 0, \beta \to 0$.于是可知

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{F_x'(x, y) + \alpha}{F_y'(x, y) + \beta} = -\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}.$$

由上式立刻可知f'在I上连续, 这表明$f \in C^1(I)$.这就证明了3°.

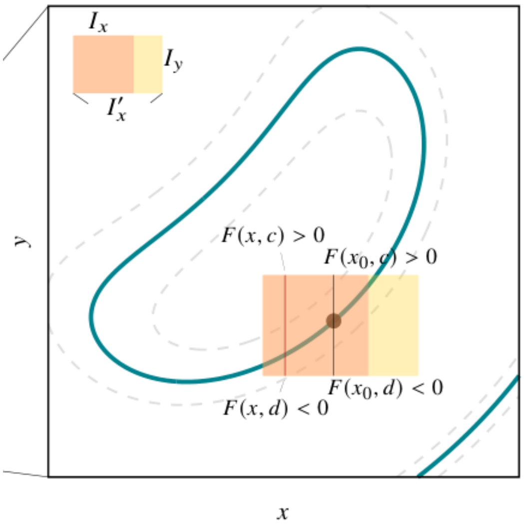


图 5.2

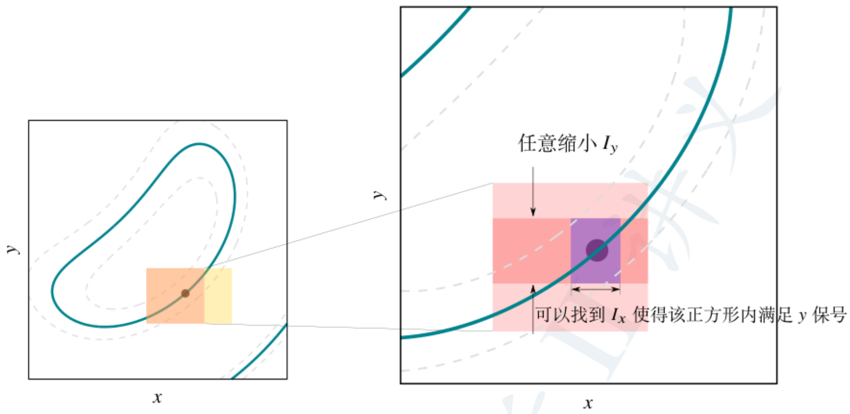


图 5.3

Theorem 5.4.2 (n+1 型隐函数定理)

设函数$F:D\to\mathbb{R}$, 其中D是$\mathbb{R}^{n+1}$中的一个开集.若F满足

$1^\circ F\in C^1(D)$.

2°存在$(\vec{x}_0,y_0)\in D$使得$F(\vec{x}_0,y_0)=0$, 其中$\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n, y_0\in\mathbb{R}$.

$3^\circ F'_y(\vec{x}_0,y_0)\neq 0$.

则存在一个包含$(\vec{x}_0,y_0)$的邻域$I\times J\subseteq D$, 其中I是$\vec{x}_0$在$\mathbb{R}^n$上的一个邻域, J是y_0在$\mathbb{R}$上的一个开区间, 使得

1°方程$F(\vec{x},y)=0$在$I\times J$上确定了一个y关于x的函数, 对于任一$x\in I$方程$F(\vec{x},y)=0$在J中都有唯一的解$f(\vec{x})$.

$2^\circ y_0=f(\vec{x}_0)$.

$3^\circ f\in C^1(I)$.

4°当$x\in I$时, 有$\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}=-\dfrac{F'_{x_i}(\vec{x},y)}{F'_y(\vec{x},y)},\quad i=1,2,\cdots,n.$

其中$y=f(x)$.注隐函数定理仅仅给出了隐函数存在的一个充分条件, 而非必要条件.隐函数的存在性是局部性的.

Example 5.30 设方程$\sin x+\ln y-xy^3=0$.判断方程是否在$(0,1)$附近确定了函数$y=f(x)$.如果是, 则求出$f'(0)$.

Proof 令$F(x,y)=\sin x+\ln y-xy^3$.计算得$F(0,1)=0$.由于$\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1)=\dfrac{1}{y}-3xy^2\big|_{(0,1)}=1\neq 0$

由隐函数定理可知方程在点 $(0,1)$附近可以确定函数$y=f(x)$.于是$f'(0)=-\dfrac{F_x'(0,1)}{F_y'(0,1)}=\left.\dfrac{\cos x-y^3}{\frac{1}{y}-3xy^2}\right|_{(0,1)}=0$ □

Note 在确定隐函数存在的情况下,若要求各个偏导,我们可以对方程直接求导,而不必套用定理中的公式.
设方程$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$确定了隐函数$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.我们现在可以尝试两种方法来求$f_{x_i}'(i=1,2,\cdots,n)$.
(1)把y看作$x_1,x_2,\cdots,x_n$的函数,在$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$两边对$x_i$求导:$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=0\Longleftrightarrow\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F_{x_i}'}{F_y'},\quad i=1,2,\cdots,n.$
(2)直接对方程$F(x,y)=0$两边全微分:
$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y=0\Longleftrightarrow\mathrm{d}y=-\frac{F_{x_1}'}{F_y'}\mathrm{d}x_1-\frac{F_{x_2}'}{F_y'}\mathrm{d}x_2-\cdots-\frac{F_{x_n}'}{F_y'}\mathrm{d}x_n$$
于是可知$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F_{x_i}'}{F_y'},\quad i=1,2,\cdots,n.$
由此可见以上两种方法求出的结果和隐函数定理中的公式是一致的.下面看几个例子.

下面来看隐函数的高阶导数.假定$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)\in C^2(D)$,且方程$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$确定了隐函数$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.
则可以在$\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{F_{x_i}'}{F_y'}$两边继续求导:
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}=\frac{\left(F_{yx_i}+F_{yy}y_{x_i}\right)F_{x_i}-\left(F_{x_ix_i}+F_{x_i}y_{x_i}\right)F_y}{F_y^2}$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_ix_j}=\frac{\left(F_{yx_j}+F_{yy}y_{x_j}\right)F_{x_i}-\left(F_{x_ix_j}+F_{x_iy}y_{x_j}\right)F_y}{F_y^2}$$
这表明f也是二阶连续可导的.用数学归纳法不难知道以下结论.

Proposition 5.11

若函数$F\in C^k$有,则$F(x,y)=0$确定的隐函数也满足$f\in C^k$.

Example 5.31 设方程$x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$.它确定了函数$z=f(x,y)$.求$f_x',f_y'$.

Proof 法一把z看成x和y的函数,在方程两边对x求导:
$1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}\left(-1-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\Longleftrightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1.$同理可知$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1$

法二在方程两边全微分:$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{-(x+y+z)}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)\Longleftrightarrow\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$于是可知$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1.$

法三原方程等价于$x+y+z=t$,其中t是满足方程$t=\mathrm{e}^{-t}$的常数.于是可知$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-1.$ □

Example 5.32 设方程$z=x+y\varphi(z)$.它确定了一个函数$z=f(x,y)$.则$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\varphi(z)\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Proof 直接对方程两边全微分:$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\varphi(z)\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}\varphi(z)\Longleftrightarrow\mathrm{d}z=\dfrac{1}{1-y\varphi'(z)}\mathrm{d}x+\dfrac{\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}\mathrm{d}y.$
于是可知等式6$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}.$ □

Example 5.33 设方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在局部确定了隐函数$z=f(x,y)$.求$f_x,f_y,f_{xx},f_{xy},f_{yy}$.

Proof 对方程两边全微分$\dfrac{x\mathrm{d}x}{a^2}+\dfrac{y\mathrm{d}y}{b^2}+\dfrac{z\mathrm{d}z}{c^2}=0$
于是 $\mathrm{d}z=-\dfrac{c^2x}{a^2z}\mathrm{d}x-\dfrac{c^2y}{b^2z}\mathrm{d}y.(*)$

于是可知$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{c^2x}{a^2z},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{c^2y}{b^2z}$

对(∗)两边全微分$\dfrac{\mathrm{d}x^2}{a^2}+\dfrac{\mathrm{d}y^2}{b^2}+\dfrac{\mathrm{d}z^2+z\mathrm{d}^2z}{c^2}=0$于是

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{a^2}+\frac{\mathrm{d}y^2}{b^2}+\frac{\mathrm{d}z^2}{c^2}\right)=-\frac{c^2}{z}\left[\frac{\mathrm{d}x^2}{a^2}+\frac{\mathrm{d}y^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\left(\frac{c^2x}{a^2z}\mathrm{d}x-\frac{c^2y}{b^2z}\mathrm{d}y\right)^2\right]$$

$$=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x^2-2\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}y^2.$$

于是可知$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\dfrac{c^4}{a^2z^3}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{c^4xy}{a^2b^2z^3},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\dfrac{c^4}{b^2z^3}\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right).$

Theorem 5.4.3 (n+m 型隐函数定理)

设向量值函数$\boldsymbol{F}:D\to\mathbb{R}^m$,其中$D$是$\mathbb{R}^{n+m}$中的一个开集.若满足

1°$\boldsymbol{F}\in C^1(D)$

2°存在$(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\in D$ 使得$\boldsymbol{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=0$,其中$\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n,\vec{y}_0\in\mathbb{R}^m$

3° $\det \boldsymbol{J}_{\vec{y}}\boldsymbol{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\neq 0$

则存在一个包含$(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$的邻域$I\times J\subseteq D$使得

1°对于任一$\vec{x}\in I$,方程$\boldsymbol{F}(\vec{x},\vec{y})=0$在$J$中都有唯一的解$\vec{f}(\vec{x})$.

2°$\vec{y}_0=\vec{f}(\vec{x}_0)$

3°$\vec{f}\in C^1(I)$.

4°当$\vec{x}\in I$时,有$\boldsymbol{J}\vec{f}(\vec{x})=-\left[\boldsymbol{J}_{\vec{y}}\boldsymbol{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1}\boldsymbol{J}_{\vec{x}}\boldsymbol{F}(\vec{x},\vec{y})$,其中$\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$.

Proof 用数学归纳法对方程个数m进行归纳,当$m=1$时就是$n+1$型的隐函数定理.
现在假设方程个数为$m-1$时命题成立,下面来看m个方程的情况.

(*i*)由于$\det \boldsymbol{J}_{\vec{y}}\boldsymbol{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\neq 0$,且$\boldsymbol{F}\in C^1(D)$,故存在一个$(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$的邻域$D_1\subseteq D$使得对于任一$(\vec{x},\vec{y})\in D_1$都有$\det \boldsymbol{J}_{\vec{y}}\boldsymbol{F}(\vec{x},\vec{y})\neq 0$.
不失一般性,下面就把D_1看作D.设$\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,\cdots,F_m)$.
由于$\det \boldsymbol{J}_{\vec{y}}\boldsymbol{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\neq 0$,因此它对应的矩阵的元素不全为零,不妨设$\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\neq 0$.

下面把y_m解出来.为了叙述方便,我们令$\vec{y}=(\vec{u},t)$,其中$\vec{u}=(y_1,\cdots,y_{m-1})$,$t=y_m$,令$\vec{y}_0=(\vec{u}_0,t_0)$,其中$\vec{u}_0\in\mathbb{R}^{m-1},t_0\in\mathbb{R}$.
于是$\dfrac{\partial F_m}{\partial t}(\vec{x}_0,\vec{u}_0,t_0)\neq 0,\quad F_m(\vec{x}_0,\vec{u}_0,t_0)=0$
由$n+1$型隐函数定理可知,存在一个包含$(\vec{x}_0,\vec{u}_0,t_0)$的邻域$I_{\vec{x}}\times I_{\vec{u}}\times I_t\subseteq D$,使得
a.对于任一$(\vec{x},\vec{u})\in I_{\vec{x}}\times I_{\vec{u}}$,方程$F_m(\vec{x},\vec{u},t)=0$在$I_t$中都有唯一的解$t=\varphi(\vec{x},\vec{u})$.
b.$t_0=\varphi(\vec{x}_0,\vec{u}_0)$.
c.$\varphi\in C^1(I_{\vec{x}}\times I_{\vec{u}})$.其中$I_{\vec{x}}$是$\vec{x}_0$在$\mathbb{R}^n$上的一个邻域,$I_{\vec{u}}$是$\vec{u}_0$在$\mathbb{R}^{m-1}$上的一个邻域,$I_t$是$t_0$在$\mathbb{R}$上的一个开区间.

(*ii*)下面我们把解出来的t代入前面的$m-1$个方程,消去t:$\begin{cases}F_1(\vec{x},\vec{u},\varphi(\vec{x},\vec{u}))=0\\ \cdots\\ F_{m-1}(\vec{x},\vec{u},\varphi(\vec{x},\vec{u}))=0\end{cases}$.
令$\Phi_i(\vec{x},\vec{u})=F_i(\vec{x},\vec{u},\varphi(\vec{x},\vec{u})),\quad i=1,2,\cdots,m-1$.再令$\Phi=(\Phi_1,\cdots,\Phi_{m-1})$,这是$I_x\times I_u$到$\mathbb{R}^{m-1}$的映射.

下面只需证明$\Phi(\vec{x},\vec{u})$满足定理的三个条件,就可以用归纳假设了.
1.显然$\Phi\in C^1$.这是因为对于某个Φ_i来说,每个F_i都是C^1的,且每个F_i里的φ也是C^1的
2.又有$\Phi_i(\vec{x}_0,\vec{u}_0)=F_i(\vec{x}_0,\vec{u}_0,\varphi(\vec{x}_0,\vec{u}_0))=F_i(\vec{x}_0,\vec{u}_0,t_0)=F_i(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=0$.(因为题干$\boldsymbol{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=0$)所以$\Phi(\vec{x}_0,\vec{u}_0)=0$
3.下面验证满足定理的第三个条件,即要证明$\det \boldsymbol{J}_{\vec{u}}\Phi(\vec{x}_0,\vec{u}_0)\neq 0$.

在$\Phi_i(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}})=F_i(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}},\varphi(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}}))$两边对$y_j$求导：$\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial y_j}=\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}+\dfrac{\partial F_i}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_j},\quad i,j=1,2,\cdots m-1.$

在$F_m(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}},\varphi(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}}))=0$两边对$y_j$求导：$\dfrac{\partial F_m}{\partial y_j}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_j}=0,\quad j=1,2,\cdots m-1$

$$\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{y}}_0\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}_{(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{y}}_0)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}&\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&&\vdots&\\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}}+\dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}&\dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}&\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_{m-1}}&\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\\ \dfrac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial\Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}}&\dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\\ 0&\cdots&0&\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}_{(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{y}}_0)}\xrightarrow{\text{按第}m\text{ 行展开}}\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0,t_0\right)\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{u}}}\Phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0\right).$$

则 $\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{y}}_0\right)=\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0,t_0\right)\times\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{u}}}\Phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0\right)$

由于$\underbrace{\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{y}}_0\right)\neq 0,}_{\text{题干已知}}\ \underbrace{\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}},t_0\right)\neq 0.}_{\text{不防假设的}}\quad\Rightarrow\quad\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{u}}}\Phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0\right)\neq 0$

综上可知Φ满足归纳假设的三个条件.由归纳假设可知存在$\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0\right)$的一个邻域$I\times J\subseteq I_{\vec{\boldsymbol{x}}}\times I_{\vec{\boldsymbol{u}}}$使得

A.对于任一$\vec{\boldsymbol{x}}\in I$,方程$\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}})=0$在$J$中都有唯一的解$\vec{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}})$.

B.$\vec{\boldsymbol{u}}_0=\vec{\boldsymbol{g}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$.

C.$\vec{\boldsymbol{g}}\in C^1(I)$.

(iii)由$y_m=t=\varphi(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}})$和$(y_1\cdots y_{m-1})=\vec{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}})$得知

令$\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})=(\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}),\varphi(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}))(\vec{\boldsymbol{x}}\in I)$.下面来证明$f$满足定理的四条结论.

1.当$x\in I$时,$(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}))\in I\times J\subseteq I_{\vec{\boldsymbol{x}}}\times I_{\vec{\boldsymbol{u}}}$.由于对任一$\vec{\boldsymbol{x}}\in I$,方程$\Phi(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}})=0$在$J$中都有唯一的解$\vec{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}})$

故$F_i(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}}))=F_i(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}),\varphi(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}})))=\Phi_i(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}))=0,\quad i=1,2,\cdots,m-1.$

又由于对任一$(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}})\in I_{\vec{\boldsymbol{x}}}\times I_{\vec{\boldsymbol{u}}}$,方程$F_m(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}},t)=0$在$I_t$中都有唯一的解$t=\varphi(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{u}})$

故$F_m(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}}))=F_m(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}}),\varphi(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{g}(\vec{\boldsymbol{x}})))=0.$

这表明当$\vec{\boldsymbol{x}}\in I$时$\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}}))=0.$

于是可知$\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})$是方程$\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})=0$的唯一解.因此$\boldsymbol{f}$满足定理的第一个结论.

2.由于$t_0=\varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0\right),\vec{\boldsymbol{u}}_0=\boldsymbol{g}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$,因此$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_0\right)=\left(\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_0\right),\varphi\left(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_0\right)\right)\right)=\left(\vec{\boldsymbol{u}}_0,\varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{u}}_0\right)\right)=\left(\vec{\boldsymbol{u}}_0,t_0\right)=\vec{\boldsymbol{y}}_0.$

因此$\boldsymbol{f}$满足定理的第二个结论.

3.由于$\varphi\in C^1\left(I_{\boldsymbol{x}}\times I_{\boldsymbol{u}}\right),\boldsymbol{g}\in C^1(I)$,因此$\boldsymbol{f}\in C^1(I)$.因此$\boldsymbol{f}$满足定理的第三个结论.

4.当$x\in I$时$\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}}))=0$.在等式两边对$\vec{\boldsymbol{x}}$求导：$\left[\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{F},\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}\right]\begin{bmatrix}I_n\\ \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})\end{bmatrix}=0\iff\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})+\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})\times\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})=0.$

由于$\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}$在$D$上处处不为零,故$\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}$可逆.于是由上式可知

$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{x}})=-\left[\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})\right]^{-1}\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})$,其中$\vec{\boldsymbol{y}}=f(\vec{\boldsymbol{x}})$.

于是可知f满足定理的第四条结论.

Note 前面已经看到研究方程是否可以确定一个函数, 本质上就是研究方程的解.如果是非线性方程, 一般是无法得到解析解的. 历史上著名的Newton法是一种很有价值的研究方程解的方法.
设方程$f(x)=0$.若f连续可导且$f'\neq 0$, 则可以构造迭代序列 : $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=1,2,\cdots$.
若$x_n\to x_0$, 则在递推公式两边取极限即得$f(x_0)=0$.
这表明我们构造的数列如果收敛, 则收敛到方程$f(x)=0$的一个根.接下来的问题就是, 满足什么条件时, 数列$\{x_n\}$收敛?
涉及迭代序列收敛性的问题很容易联想到我们之前讲过的压缩映射原理.现在把刚刚构造数列的迭代公式看作一个映射
令$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.若存在$K\in[0,1)$使得$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leq K|x-y|,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$.
则φ是一个压缩映射, 此时$x_n\to x_0$, 且x_0就是φ的唯一不动点.这个结论就是压缩映射原理.

现在重新考虑隐函数定理的问题.设连续可微二元函数$F(x,y)$满足$F(x_0,y_0)=0,\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.
现在要证明在(x_0,y_0)的一个邻域$I\times J$上确定了一个隐含函数$y=f(x)$
即对于任一$x\in I$, 是否存在唯一的$y\in J$使得方程$F(x,y)=0$成立.现在用牛顿法来考虑这个问题.
令$y_{n+1}=y_n-\dfrac{F(x,y_n)}{F_y'(x,y_n)},\quad n=1,2,\cdots$.下面只需研究数列$\{y_n\}$的收敛性.
令$\varphi(y)=y-\dfrac{F(x,y)}{F_y'(x,y)}$.下面只需研究函数$\varphi$是不是一个压缩映射.
为了让计算简便, 我们可以考虑简化牛顿法.由于(x,y_n)很接近(x_0,y_0), 因此考虑用$F_y'(x_0,y_0)$代替$F_y'(x,y_n)$:
$y_{n+1}=y_n-\dfrac{F(x,y_n)}{F_y'(x_0,y_0)},\quad n=1,2,\cdots$.如果$y_n\to y$, 则y显然满足$F(x,y)=0$.
因此这样的简化是可行的.于是相应的函数就变成了$\Phi(y)=y-\dfrac{F(x,y)}{F_y'(x_0,y_0)}$.

Theorem 5.4.4

设向量值函数$\vec{F}:D\to\mathbb{R}^m$, 其中D是$\mathbb{R}^{n+m}$中的一个开集.若满足
$1^\circ\ \vec{F}\in C^1(D)$
2° 存在$(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\in D$ 使得$\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=0$, 其中$\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n,\vec{y}_0\in\mathbb{R}^m$
$3^\circ\ \det J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\neq 0$
则存在一个包含$(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$的邻域$I\times J\subseteq D$使得
1° 对于任一$\vec{x}\in I$, 方程$\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=0$在$J$中都有唯一的解$\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$.
$2^\circ\ \vec{y}_0=\vec{f}(\vec{x}_0)$
$3^\circ\ \vec{f}\in C^1(I)$.
4° 当$\vec{x}\in I$时, 有$J\vec{f}(\vec{x})=-\left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1}J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})$, 其中$\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})$.

Proof
(i)
证明1°和2°.
令$\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})=\vec{y}-\left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\right]^{-1}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})$.
任意取定$\vec{x}\in I$, 令$\vec{\Phi}(\vec{y})=\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})$.

下面来证明$\vec{\Phi}(\vec{y})$是完备空间上的一个压缩映射.
1.证明压缩映射
由拟微分中值定理可知, 存在$\vec{\xi}'$使得$\left\|\vec{\Phi}(\vec{y}')-\vec{\Phi}(\vec{y}'')\right\|\leq\left\|J\vec{\Phi}\left(\vec{\xi}'\right)\right\|\|\vec{y}'-\vec{y}''\|$; 要证明其$\leq K\|\vec{y}'-\vec{y}''\|$
$\Longleftrightarrow$ 证 : $\left\|J\vec{\Phi}\left(\vec{\xi}'\right)\right\|\leqslant K\quad K\in(0,1)\Longleftrightarrow$ 证 : $\forall\vec{y}$有$\left\|J\vec{\Phi}(\vec{y})\right\|\leqslant K\quad K\in(0,1)\Longleftrightarrow\|J_{\vec{y}}\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})\|\leqslant K\quad K\in(0,1)$
我们来看$J_{\vec{y}}\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})$
两边偏微分计算可知$J_{\vec{y}}\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})=I_m-\left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\right]^{-1}J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})$.

因此$J_{\vec{y}}\vec{\varphi}\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)=I_m-\left[J_{\vec{y}}\vec{F}\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)\right]^{-1}J_{\vec{y}}\vec{F}\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)=I_m-I_m=0.$
由于$\vec{F}\in C^1(D)$, 因此任一$K\in(0,1)$, 都存在$\delta>0$, 当$\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|\leq\delta$且$\left\|\vec{y}-\vec{y}_0\right\|\leq\delta$时, 都有$\left\|J_{\vec{y}}\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})\right\|<K$

2.证明完备

把$\left\|\vec{y}-\vec{y}_0\right\|\leq\delta$该$\vec{y}$的区间叫做$J$

$\Longleftrightarrow$ 证$\vec{\Phi}(\bar{J})\subseteq\bar{J}$. $\Longleftrightarrow$ 证 : 任取$\vec{y}\in\bar{J},\vec{\Phi}\left(\vec{y}\right)\in J\Longleftrightarrow$ 证 : $\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}\right)-\vec{y}_0\right\|\leqslant\delta$

由拟微分中值定理可知, 存在$\vec{\xi}$使得

$\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}\right)-\vec{y}_0\right\|\leq\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}\right)-\vec{\Phi}\left(\vec{y}_0\right)\right\|+\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}_0\right)-\vec{y}_0\right\|\leq\| J\vec{\Phi}(\vec{\xi})\|\left\|\vec{y}-\vec{y}_0\right\|+\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}_0\right)-\vec{y}_0\right\|$

要证上式$\leqslant\delta$: 而前者$\| J\vec{\Phi}(\vec{\xi})\|\left\|\vec{y}-\vec{y}_0\right\|$在1.中已经证明了$\leqslant K\delta$.

那么考虑估计$\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}_0\right)-\vec{y}_0\right\|\leqslant(1-K)\delta$ 而$\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}_0\right)-\vec{y}_0\right\|=\left\|\vec{\varphi}\left(\vec{x},\vec{y}_0\right)-\vec{y}_0\right\|$

而$\vec{\varphi}\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)=\vec{y}_0-\left[J_{\vec{y}}\vec{F}\left(\vec{x}_0,\vec{y}_0\right)\right]^{-1}\underbrace{\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}_{\text{题干条件为0}}.=\vec{y}_0$

所以只需足够小$\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|<\eta\,(<\delta)$就有$\left\|\vec{\Phi}\left(\vec{y}_0\right)-\vec{y}_0\right\|=\left\|\vec{\varphi}\left(\vec{x},\vec{y}_0\right)-\vec{y}_0\right\|<(1-K)\delta$

综上 :

$\exists I:=\left\{\vec{x}\ \mid\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|<\eta\right\}\quad J:=\left\{\vec{y}\ \mid\left\|\vec{y}-\vec{y}_0\right\|<\delta\right\}$ 使得$\vec{\Phi}(\vec{y})$是一个完备空间上的压缩映射

那么有$\forall\vec{x}\in I,\ \exists!\vec{y}\in J$.使得$\vec{\Phi}(\vec{y})=\vec{y}\Longleftrightarrow\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})=\vec{y}\Longleftrightarrow\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=0$

这表明$\vec{F}(\vec{x},\vec{y})$确定了一个I到J的映射, 记作$\vec{f}=\vec{y}=\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})$.显然有$\vec{y}_0=\vec{f}\left(\vec{x}_0\right)$.

(ii)

证明$\vec{f}\in C(I)$. $\Longleftrightarrow$ 证 :$\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|\to 0\quad\left(\left\|\vec{h}\right\|\to 0\right)$

我们有$\vec{f}(\vec{x})=\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})=\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{f}(\vec{x})),\quad\forall\vec{x}\in I.$

由拟微分中值定理可知, 存在$\vec{\xi}''$使得

$$\begin{aligned}\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|&=\|\vec{\varphi}(\vec{x}+\vec{h},\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}))-\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{f}(\vec{x}))\|\\&\leq\underbrace{\|\vec{\varphi}(\vec{x}+\vec{h},\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}))-\vec{\varphi}(\vec{x}+\vec{h},\vec{f}(\vec{x}))\|}_{\text{利用压缩映射}}+\underbrace{\|\vec{\varphi}(\vec{x}+\vec{h},\vec{f}(\vec{x}))-\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{f}(\vec{x}))\|}_{\text{拟微分中值定理}}\\&\leq K\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|+\left\|J_x\vec{\varphi}\left(\vec{\xi}'',\vec{f}(\vec{x})\right)\right\|\left\|\vec{h}\right\|.\end{aligned}$$

令$A=\sup\limits_{(\vec{x},\vec{y})\in\bar{I}\times\bar{J}}\left\|J_x\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{y})\right\|$

那么$K\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|+\left\|J_x\vec{\varphi}\left(\vec{\xi}'',\vec{f}(\vec{x})\right)\right\|\left\|\vec{h}\right\|\ \leqslant\ K\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|+A\left\|\vec{h}\right\|$

则有$\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|\leqslant K\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|+A\left\|\vec{h}\right\|$

$\Rightarrow\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})\|\leqslant\dfrac{A}{1-K}\left\|\vec{h}\right\|$ (这甚至为lip连续)

令$B=\dfrac{A}{1-K}$

(iii)

证明4°.

$\Leftrightarrow J\vec{f}(\vec{x})=-\left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1}J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\Longleftrightarrow\left\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})+\left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1}J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{h}\right\|<\varepsilon\left\|\vec{h}\right\|\ \varepsilon\to 0\left(\left\|\vec{h}\right\|\to 0\right)$

取$\vec{x}\in I,\vec{y}=\vec{f}(\vec{x})\in J$, 取一个充分小的$\vec{h}$使得$\vec{x}+\vec{h}\in I$.令$\vec{k}=\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})$.

由于$\vec{F}$可微, 故

$\left\|\vec{F}(\vec{x}+\vec{h},\vec{y}+\vec{k})-\vec{F}(\vec{x},\vec{y})-J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{h}-J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{k}\right\|=\alpha\|\vec{h}\|+\beta\|\vec{k}\|,\quad\alpha,\beta\to 0\left(\|\vec{h}\|,\|\vec{k}\|\to 0\right)$

而$\vec{F}(\vec{x}+\vec{h},\vec{y}+\vec{k})-\underbrace{\vec{F}(\vec{x},\vec{y})}_{\text{题干条件=0}}=\vec{F}[\vec{x}+\vec{h},\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})]-\vec{F}[\vec{x},\vec{f}(\vec{x})]=0.$

故进一步化简为
$\left\| J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{h} + J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{k}\right\| = \alpha \parallel \vec{h} \parallel + \beta \parallel \vec{k} \parallel \leqslant \alpha \parallel \vec{h} \parallel + \beta B \left\|\vec{h}\right\| = (\alpha+\beta B) \parallel \vec{h} \parallel \quad \alpha,\beta \to 0 \left(\parallel \vec{h} \parallel, \parallel \vec{k} \parallel \to 0\right)$

我们现在开始估计 $\left\|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) + \left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1} J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{h}\right\|$
$= \left\|\vec{k} + \left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1} J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{h}\right\| = \left\|\left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1}\left[J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{h} + J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\vec{k}\right]\right\|$
令 $C = \left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1}$ 则 $\leqslant \|C\| \times (\alpha+\beta B) \times \parallel \vec{h} \parallel$
当 $\boldsymbol{h} \to 0$ 时；因为 $\vec{k} = \vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x})$.$\vec{f}$ 是连续的 $\Longrightarrow \boldsymbol{k} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \to 0, \beta \to 0.$
那么 $(\alpha+\beta B) \to 0$ 所以 $\|C\| \times (\alpha+\beta B) \to 0$
这表明 $\vec{f}$ 可微，且 $J\vec{f}(\vec{x}) = -\left[J_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1} J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})$

Example 5.34 设方程组 $\begin{cases} x_1y_2 - 4x_2 + 2e^{y_1} + 3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 6y_1 + y_2\cos y_1 = 0 \end{cases}$ 确定了向量值函数 $(y_1,y_2) = \boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3)$.
当 $\boldsymbol{x}_0 = (-1,1,-1), \boldsymbol{y}_0 = (0,1)$ 时，求 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$.

Proof 法一
设方程组中两个方程左边的函数为 F_1,F_2, 令 $\boldsymbol{F} = [F_1,F_2]^T$. 于是
$$\boldsymbol{J_x F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} y_2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{J_y F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} 2e^{y_1} & x_1 \\ -6 - y_2\sin y_1 & \cos y_1 \end{bmatrix}_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}.$$
由隐映射定理可知 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 10 & -24 & -2 \end{bmatrix}.$

法二
对方程组全微分 $\begin{cases} y_2dx_1 + x_1dy_2 - 4dx_2 + 2e^{y_1}dy_1 = 0 \\ 2dx_1 - dx_3 - 6dy_1 + \cos y_1 dy_2 - y_2\sin y_1 dy_1 = 0 \end{cases}$.
把方程组看作关于 dy_1 和 dy_2 的方程组，并把 $\boldsymbol{x}_0 = (-1,1,-1), \boldsymbol{y}_0 = (0,1)$ 代入：$\begin{cases} 2dy_1 - dy_2 = 4dx_2 - dx_1 \\ 6dy_1 - dy_2 = 2dx_1 - dx_3 \end{cases}$.
解得：$dy_1 = \frac{3}{4}dx_1 - dx_2 - \frac{1}{4}dx_3, \quad dy_2 = \frac{5}{2}dx_1 - 6dx_2 - \frac{1}{2}dx_3$
于是可知 $\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -6 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Example 5.35 设方程组 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$. 其中 f 和 g 都是可微的. 以上方程组确定了一个 z 关于 x 的函数. 求 z'_x.

Proof 对方程组全微分 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = dz \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}dx + \dfrac{\partial g}{\partial y}dy = 0 \end{cases}$.
把方程组看作关于 dx 和 dy 的方程组，解得
$dx = \dfrac{g_y}{f_xg_y - f_yg_x}dz$. 于是可知 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{f_xg_y - f_yg_x}{g_y}$

Proposition 5.12 (极坐标变换)

极坐标变换设方程组 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. 确定了函数 $(r,\theta) = \boldsymbol{f}(x,y)$.求$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.

Proof 法一对方程组全微分 $\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\mathrm{d}r + r\cos\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$ 把方程组看作关于 $\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta$的方程组,解得

$\mathrm{d}r = \cos\theta\mathrm{d}x + \sin\theta\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}\theta = -\dfrac{\sin\theta}{r}\mathrm{d}x + \dfrac{\cos\theta}{r}\mathrm{d}y.$

法二由原方程组解得$r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \theta = \arctan\dfrac{y}{x}$.全微分可得

$$\mathrm{d}r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y = \cos\theta\mathrm{d}x + \sin\theta\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y = -\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{d}x + \frac{\cos\theta}{r}\mathrm{d}y.$$

于是可知$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$. □

Proposition 5.13 (球坐标变换)

球坐标变换设方程组 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ 确定了函数 $(r,\theta,\varphi) = \boldsymbol{f}(x,y,z)$.求$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.

Proof 法一对方程组全微分 $\begin{cases} \mathrm{d}x = \sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\varphi\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}y = \sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\varphi\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$

把方程组看作关于 $\mathrm{d}r,\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}\varphi$的方程组,解得

$$\mathrm{d}r = \sin\theta\cos\varphi\mathrm{d}x + \sin\theta\sin\varphi\mathrm{d}y + \cos\theta\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\mathrm{d}x + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\mathrm{d}y - \frac{\sin\theta}{r}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\mathrm{d}x + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\mathrm{d}y.$$

于是可知$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}$

5.4.2 逆映射定理

Theorem 5.4.5 (逆映射定理)

设向量值函数$f: D\to\mathbb{R}^n$, 其中D是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.若满足

1°$\vec{f}\in C^1(D)$

2°$\vec{y}_0=\vec{f}(\vec{x}_0)$

3° $\det \boldsymbol{J}\vec{f}(\vec{x}_0)\neq 0$

则存在$\vec{x}_0$的一个邻域U和$\vec{y}_0=\vec{f}(\vec{x}_0)$的一个邻域$V$使得

1°f是U到V的一个可逆映射.

2°$\vec{f}^{-1}\in C^1(V)$.

3°当$\vec{y}\in V$时$\boldsymbol{J}\vec{f}^{-1}(\vec{y})=[\boldsymbol{J}\vec{f}(\vec{x})]^{-1}$, 其中$\vec{x}=\vec{f}^{-1}(\vec{y})$.

Proof 令$\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{f}(\vec{x})-\vec{y}$.它的定义域是$E=D\times f(D)\subseteq\mathbb{R}^{2n}$.
显然有$\vec{F}\in C^1(E)$, 且$\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=\vec{f}(\vec{x}_0)-\vec{y}_0=0$, $\det \boldsymbol{J}_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)=\det \boldsymbol{J}\vec{f}(\vec{x}_0)\neq 0$.
于是$\vec{F}$满足隐映射定理的条件, 因此存在一个包含$(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$的邻域$H\times V\subseteq E$使得
1°对于任一$\vec{y}\in V$方程$\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=0$在$H$中都有唯一的解$\vec{x}=\vec{f}^{-1}(\vec{y})$.
2°$\vec{f}^{-1}\in C^1(V)$.
3°当$\vec{y}\in V$时, 有$\boldsymbol{J}\vec{f}^{-1}(\vec{y})=-\left[\boldsymbol{J}_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})\right]^{-1}\boldsymbol{J}_{\vec{y}}\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=-[\boldsymbol{J}\vec{f}(\vec{x})]^{-1}(-I)=[\boldsymbol{J}\vec{f}(\vec{x})]^{-1}$, 其中$\vec{x}=\vec{f}^{-1}(\vec{y})$.
令$U=f^{-1}(V)$, 则$\vec{f}(U)=V$.由于$\vec{f}$是一个连续映射, 且V是一个开集, 因此V在f下的原象U也是一个开集.综上可知定理成立.

我们知道如果映射$\boldsymbol{f}: U\to V$可逆, 且$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{f}^{-1}$都连续, 则$\boldsymbol{f}$是一个同胚.
逆映射定理中, 向量值函数$\boldsymbol{f}$是U到V的可逆映射, 且$\boldsymbol{f}\in C^1(U)$, $\boldsymbol{f}^{-1}\in C^1(V)$.
因此f是一个同胚, 而且它还有微分结构.这样的同胚我们给他一个定义.

Definition 5.19 (微分同胚)

设向量值函数$\boldsymbol{f}: U\to V$, 其中U和V是$\mathbb{R}^n$上的开集.
若$\boldsymbol{f}$可逆, 且$\boldsymbol{f}\in C^r(U).\boldsymbol{f}^{-1}\in C^r(V)$, 则称$f$为$C^r$微分同胚$(diffeomorphism)$
当$r=0$时, $\boldsymbol{f}$就是普通的同胚.当$r=\infty$时, $\boldsymbol{f}$称为光滑同胚.不难证明如果逆映射定理中的$f\in C^r(D)$, 则f^{-1}也是C^r的.

Theorem 5.4.6 (局部隐映射定理普通版本)

设向量值函数$f: D\to\mathbb{R}^n$, 其中D是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.若满足

1° $\boldsymbol{f}\in C^r(D)$.

2° $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

3° $\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$.

则f在x_0处是一个C^r微分同胚.

Proposition 5.14

设向量值函数$\boldsymbol{f}: D\to\mathbb{R}^n$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的开集.若$\boldsymbol{f}$在$U$处是一个微分同胚.则对于任一$x\in U$, 都有$\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$.
但若将微分同胚的条件削弱到该点可逆是否可以？结果是不行的
函数$f(x)=x^3$ 在$\mathbb{R}$ 上可逆, 但$f'(0)=0$.

Proof f在U处是一个微分同胚, 因此对于任一$\boldsymbol{x}\in U$, 都有$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1}=\mathcal{I}$.于是$I_n=J\mathcal{I}=\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1}\right)=\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}^{-1}$.
于是$\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}^{-1}=\det \boldsymbol{I}_n\neq 0$.于是可知$\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$.

Proposition 5.15 (极坐标变换)

极坐标变换设方程组 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. 确定了函数 $(r,\theta) = \boldsymbol{f}(x,y)$.求$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.

Proof 由逆映射定理可知$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Proposition 5.16 (球坐标变换)

球坐标变换设方程组 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ 确定了函数 $(r,\theta,\varphi) = \boldsymbol{f}(x,y,z)$.求$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}$.

Proof 直接计算$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$.于是可知

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f} = \left[\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{f}^{-1}\right)\right]^{-1} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{bmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi & r^2\sin^2\theta\sin\varphi & r^2\sin\theta\cos\theta \\ r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi & r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi & -r\sin^2\theta \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}.$$

逆映射定理和隐映射定理一样,只在局部成立.即使每一点的局部都存在逆映射,也无法断言逆映射的整体存在性.

Example 5.36 研究向量值函数$f(x,y) = (\mathrm{e}^x\cos y, \mathrm{e}^x\sin y)$.的逆映射.

Proof 由于对于任一 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$都有 $\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x\cos y & -\mathrm{e}^x\sin y \\ \mathrm{e}^x\sin y & \mathrm{e}^x\cos y \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \neq 0.$

因此由逆映射定理可知,每一点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$的局部都存在$\boldsymbol{f}$的逆映射.

但是由于$\boldsymbol{f}(x,y+2\pi) = \boldsymbol{f}(x,y)$.故$\boldsymbol{f}$在$\mathbb{R}^2$上不是单射.因此$\boldsymbol{f}$在$\mathbb{R}^2$上不可逆.

注 上例表明即使把局部逆映射的条件2°加强为$\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{F}$在每一点都不为零仍然无法推出整体的逆映射定理.

Theorem 5.4.7 (开映射定理)

设映射$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^n$,其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.若满足

1° $\boldsymbol{f} \in C^1(D)$.

2°对于任一$\boldsymbol{x} \in D$都有 $\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

则$G = \boldsymbol{f}(D)$是一个开集.

Proof 任取$\vec{y} \in G$,则存在$\vec{x}$使得$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}$.由逆映射定理可知,存在$\vec{x}$的一个邻域$U$和$\vec{y}$的一个邻域$V$满足$V = f(U)$.
因此$V = f(U) \subseteq f(D) = G$.这表明$\vec{y}$是$G$的一个内点.于是可知$G$是一个开集. □

Definition 5.20 (开映射)

因此满足局部逆映射条件的映射称为开映射.

设映射$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^n$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.若$\boldsymbol{f}$把开集映成开集, 则称$\boldsymbol{f}$是一个开映射 $(open - map)$.

Theorem 5.4.8 (整体逆映射定理)

设映射$\vec{\boldsymbol{f}}: D \to \mathbb{R}^n$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的一个开集.若满足

$1^\circ \vec{\boldsymbol{f}} \in C^r(D)$.

2°对于任一$\vec{\boldsymbol{x}} \in D$都有 $\det \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \neq 0$.

$3^\circ \vec{\boldsymbol{f}}$是$D$上的一个单射.

则$\vec{\boldsymbol{f}}$是D到$G = \vec{\boldsymbol{f}}(D)$的$C^r$微分同胚.

Definition 5.21

注为了叙述方面, 我们把满足逆映射定理条件的映射称为正则映射

Theorem 5.4.9 ($Hadamard$定理)

设映射$\vec{\boldsymbol{f}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.若满足

$1^\circ \vec{\boldsymbol{f}} \in C^r\left(\mathbb{R}^n\right)$.

2°对于任一$\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$都有 $\det \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \neq 0$.

3°存在$M > 0$对于任一$\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$使得$\left\|(\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}}))^{-1}\right\| < M$.

则$\vec{\boldsymbol{f}}$是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的C^r微分同胚.

Theorem 5.4.10

设映射$\vec{\boldsymbol{f}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.若满足

$1^\circ \vec{\boldsymbol{f}} \in C^r\left(\mathbb{R}^n\right)$.

2°对于任一$\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$都有 $\det \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}}) \neq 0$.

则$\vec{\boldsymbol{f}}$是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的C^r微分同胚 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\|\vec{\boldsymbol{x}}\| \to +\infty} \|\vec{\boldsymbol{f}}(\vec{\boldsymbol{x}})\| = +\infty$.

5.4.3 秩定理与函数相关性

Definition 5.22 (映射的秩)

设向量值函数$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的开集.若$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{p}$处可微, 则称 $\operatorname{rank}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$为$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{p}$处的秩, 记作 $\operatorname{rank}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{p}}$.

Proposition 5.17

我们知道可逆矩阵作用于$\boldsymbol{A}$不改变$\boldsymbol{A}$的秩.类似的结论可以推广到非线性映射.

设C^1函数$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的开集.若$\boldsymbol{\varphi}$在$\boldsymbol{p}$处是一个局部微分同胚.则 $\operatorname{rank}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{f} = \operatorname{rank}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi})$.

Proof 由于$\boldsymbol{\varphi}$在$\boldsymbol{p}$处是一个局部微分同胚, 故$\boldsymbol{J}\boldsymbol{\varphi}$在局部都可逆.由于可逆矩阵的作用不改变矩阵的秩
于是可知 $\operatorname{rank}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\varphi}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{J}\boldsymbol{f} = \operatorname{rank}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{f}$. □

Theorem 5.4.11 (秩定理)

设C^1函数$\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$中的开集.若对于任一$\boldsymbol{p} \in D$都有 $\operatorname{rank}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{f} = r$.

则$\forall \boldsymbol{x} \in D$, 都存在$\boldsymbol{x}$的一个邻域$U$和$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的一个邻域$V$, 以及$C^1$微分同胚$\boldsymbol{\varphi}: U \to \boldsymbol{\varphi}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$和$\boldsymbol{\psi}: V \to \boldsymbol{\psi}(V) \subseteq \mathbb{R}^m$

使得$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x, 0)$其中$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^r, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n-r}$.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\varphi}(U) \arrow[r, dotted, "\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{-1}"] & \boldsymbol{\psi}(V) \\
U \arrow[u, "\boldsymbol{\varphi}"] \arrow[r, "\boldsymbol{f}"] & V \arrow[u, "\boldsymbol{\psi}"']
\end{tikzcd}$$

图 5.4

Proof 由于 $\operatorname{rank}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{f} = r$, 因此$\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$存在一个不为零的$r$阶子式.不妨设这个子式位于左上角.

令$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$, 其中$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^r, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{m-r}$.于是左上角的非零子式就是$\det \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}$.

(i)首先考虑映射$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$, 它的$Jacobi$矩阵为 : $\boldsymbol{J}\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{u} \\ 0 & \boldsymbol{I}_{n-r} \end{bmatrix}$.

由于$\det \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{u} \neq 0$, 因此$\boldsymbol{\varphi}$在局部是一个微分同胚.令$\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$.

于是 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varphi}\left[\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right] = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})$.这表明$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}$.

于是$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}))$.

令$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.则$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & 0 \\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{r} & \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{r} \end{bmatrix}$.由于 $\operatorname{rank}_{\boldsymbol{p}}\left(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}\right) = r(\forall \boldsymbol{p} \in D)$, 因此$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{r} = 0$, 这表明$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{y}$无关

因此可以令$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$.于是$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}))$.

(ii)下面考虑映射$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}))$.由于$\boldsymbol{J}\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & 0 \\ -\boldsymbol{J}\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}) & \boldsymbol{I}_{m-r} \end{bmatrix}$.

因此ψ在局部是一个微分同胚.容易知道$\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x}, 0)$.

Definition 5.23 (函数相关性)

设一组C^1函数$f_1, f_2, \cdots, f_m : D \to \mathbb{R}$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.
若存在C^1函数$\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$满足$\Phi(f_1, f_2, \cdots, f_m) \equiv 0$, 且$\nabla\Phi(\vec{x}) \neq 0\ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m)$
则称$f_1, f_2, \cdots, f_m$在D上是相关的 $(dependent)$.否则称它们在D是独立的 $(independent)$.

Proposition 5.18 (局部函数无关的刻画)

设一组C^1函数$f_1, f_2, \cdots, f_m : D \to \mathbb{R}$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.
则$f_1, f_2, \cdots, f_m$在$\boldsymbol{x}_0 \in D$处附近局部相关的 $\Longleftrightarrow$
在x_0附近存在函数$\Psi \in C^1$使得$f_1, f_2, \cdots, f_m$中的某个函数f_i可以表示为$f_i = \Psi(f_1, \cdots, f_{i-1}, f_{i+1}, \cdots, f_m)$.

Theorem 5.4.12

设一组C^1函数$f_1, f_2, \cdots, f_m : D \to \mathbb{R}$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n (m \leq n)$上的一个开集.
令$\vec{\boldsymbol{F}} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$.若 $\operatorname{rank}_{\vec{\boldsymbol{p}}}\vec{\boldsymbol{F}} = m, \quad \forall \vec{\boldsymbol{p}} \in D$, 则$f_1, f_2, \cdots, f_m$是独立的.

Proof 用反证法, 假设$f_1, f_2, \cdots, f_m$是相关的, 则存在C^1函数$\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$满足$\Phi(\vec{\boldsymbol{F}}) = 0$且$\nabla\Phi(\vec{x}) \neq 0\ (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m)$.
由链式法则立刻可知$\nabla\Phi \cdot \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in D$.
由$Sylvester$秩不等式可知$0 = \operatorname{rank}(\nabla\Phi \cdot \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{F}}) \geq \operatorname{rank}\nabla\Phi + \operatorname{rank}\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{F}} - m$.
由于 $\operatorname{rank}\nabla\Phi \neq 0$, 故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{x}) < m$, 这与 $\operatorname{rank}_{\vec{\boldsymbol{p}}}\vec{\boldsymbol{F}} = m$矛盾.
于是可知命题成立.和线性代数中的情况类似, 以上定理中的$\vec{\boldsymbol{F}}$被称为满秩的 $(full-rank)$. □

Theorem 5.4.13 (函数独立性定理)

设一组C^1函数$f_1, f_2, \cdots, f_m : D \to \mathbb{R}$, 其中$D$是$\mathbb{R}^n$上的一个开集.令$\vec{\boldsymbol{F}} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$.若 $\operatorname{rank}_{\vec{\boldsymbol{x}}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = \max_{\boldsymbol{p} \in D} \operatorname{rank}_{\vec{\boldsymbol{p}}}\vec{\boldsymbol{F}} = r$.
则$f_1, f_2, \cdots, f_m$在$\vec{\boldsymbol{x}}_0$附近存在r个函数是独立的, 而其余的函数均与这r个函数相关.

Proof (i)
只需证明$r < m$的情况.由于 $\operatorname{rank}_{\vec{\boldsymbol{x}}_0}\vec{\boldsymbol{F}} = r$, 故$\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{F}}$存在一个$r$阶子式$D$在$\vec{\boldsymbol{x}}_0$处不等于零.
于是存在一个$\vec{\boldsymbol{x}}_0$的邻域U使得D在U上都不为零.这是因为行列式都是连续函数
由于 $\max_{\boldsymbol{p} \in D} \operatorname{rank}_{\vec{\boldsymbol{p}}}\vec{\boldsymbol{F}} = r$, 故在$U$上不会有不为零的超过$r$阶的子式, 于是可知$\vec{\boldsymbol{F}}$在$U$上的秩恒为$r$.
根据秩定理可知存在微分同胚$\vec{\boldsymbol{\psi}}$和$\vec{\boldsymbol{\varphi}}$使得$\vec{\boldsymbol{\psi}} \circ \vec{\boldsymbol{F}} \circ \vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1}(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n) = \underbrace{(x_1, \cdots, x_r, 0, \cdots, 0)}_{m\text{维}}$

令$\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$满足$\Psi(x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_m) = x_m$.显然这样定义的$\Psi$满足$\nabla\Psi(\vec{x}) \neq 0\ (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m)$.
根据Ψ的定义可知$\Psi \circ \vec{\boldsymbol{\psi}} \circ \vec{\boldsymbol{F}} \circ \vec{\boldsymbol{\varphi}}^{-1} \equiv 0 \Longleftrightarrow \Psi \circ \vec{\boldsymbol{\psi}} \circ \vec{\boldsymbol{F}} \equiv 0$.
令$\varPhi = \Psi \circ \vec{\boldsymbol{\psi}}$.由于$\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{\psi}}$满秩, 且$\nabla\Psi(x) \neq 0\ (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m)$, 故$\nabla\varPhi(\vec{x}) = \nabla\Psi \cdot \boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{\psi}}(\vec{x}) \neq 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$.
于是可知$\vec{\boldsymbol{F}}$的m个分量函数相关.

(ii)
设$D = \dfrac{\partial(f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_r})}{\partial(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r})}$.则由上个定理立刻可知$f_{i_1}, f_{i_2}, \cdots, f_{i_r}$是独立的.根据 (i)可知其余函数均与这r个函数相关. □

5.5 多元函数微分学的应用

5.5.1 条件极值

Theorem 5.5.1 (拉格朗日乘数法)

设函数$f:D\to\mathbb{R}$和向量值函数$\vec{\Phi}:D\to\mathbb{R}^m$ $(D\subseteq\mathbb{R}^{m+n})$满足

1° $f,\vec{\Phi}$都是C^1函数.

2° 存在$z_0=(x_0,\boldsymbol{y}_0)\in D$使得$\Phi(\vec{z}_0)=0$, 其中$\vec{\boldsymbol{x}}_0\in\mathbb{R}^n,\vec{\boldsymbol{y}}_0\in\mathbb{R}^m$.

3° $\det \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)\neq 0$.

若函数f在约束条件$\vec{\Phi}=0$之下在$\vec{z}_0$处取到极值, 则存在$\vec{\boldsymbol{\lambda}}\in\mathbb{R}^m$使得$\boldsymbol{J}f(\vec{z}_0)+\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{J}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)=0$.

Proof 由条件$1^\circ,2^\circ,3^\circ$, 根据隐映射定理可知存在$\vec{z}_0=(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\vec{\boldsymbol{y}}_0)$的邻域$U=I\times J$使得方程$\vec{\Phi}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})=0$方程确定了$C^1$函数$\vec{\boldsymbol{y}}=\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{x}})$
满足$\vec{\boldsymbol{y}}_0=\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{x}}_0)$且$\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{x}}_0)=-\left[\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)\right]^{-1}\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)$.(*)
由于f在约束条件$\vec{\Phi}=0$之下在$\vec{z}_0$处取到极值, 因此$\boldsymbol{x}_0$是函数$f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{x}}))$在$I$中的一个极值点.
因此$\vec{\boldsymbol{x}}_0$是$f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{x}}))$的一个驻点, 于是$\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}f(\vec{z}_0)+\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}f(\vec{z}_0)\boldsymbol{J}\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\boldsymbol{x}}_0)=0$.(**)
把(*)与(**)结合得$\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}f(\vec{z}_0)-\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}f(\vec{z}_0)\left[\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)\right]^{-1}\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)=0$.
令$\vec{\boldsymbol{\lambda}}=-\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}f(\vec{z}_0)\left[\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)\right]^{-1}$.于是有
$\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}f(\vec{z}_0)+\vec{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{x}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)=0,\quad \boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}f(\vec{z}_0)+\vec{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{J}_{\vec{\boldsymbol{y}}}\vec{\Phi}(\vec{z}_0)=0$.这两个等式意味着证明的式子成立.

Theorem 5.5.2 (拉格朗日乘数法充分条件)

设函数f和向量值函数$\vec{\Phi}$和上个定理条件中相同.令$L(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}},\vec{\boldsymbol{\lambda}})=f(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})+\vec{\boldsymbol{\lambda}}\vec{\boldsymbol{\Phi}}(\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}})$.

已知L在$\vec{z}_0\in\mathbb{R}^{m+n}$处取到极值.

(1)若$\boldsymbol{H}L(\vec{z}_0)$严格正定, 则$f$在$\vec{z}_0$处取得严格的极小值.

(2)若$\boldsymbol{H}L(\vec{z}_0)$严格负定, 则$f$在$\vec{z}_0$处取得严格的极大值.

Proof 令$E=\left\{z\in\mathbb{R}^{m+n}:\vec{\Phi}(\vec{z})=0\right\}$.显然$\vec{z}_0\in E$.在$\vec{z}_0$附近取$\vec{z}_0+\vec{\boldsymbol{h}}\in E$.
于是$f\left(\vec{z}_0+\vec{\boldsymbol{h}}\right)-f(\vec{z}_0)=L\left(\vec{z}_0+\vec{\boldsymbol{h}}\right)-L(\vec{z}_0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T\boldsymbol{H}L(\vec{z}_0)\vec{\boldsymbol{h}}+o\left(\|\vec{\boldsymbol{h}}\|^2\right),\quad \|\vec{\boldsymbol{h}}\|\to 0$.
接下来用之前一样的方法可知结论成立.需要注意, 即使$\boldsymbol{H}L(z_0)$是不定的, 也不能断言不存在条件极值.下面看一个例子.

Example 5.37 设函数$u=xy$.求u在约束条件$x+y=1$下的条件极值.

解 令$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+y-1)$.解方程组$\begin{cases}y+\lambda=0\\x+\lambda=0\\x+y=1\end{cases}$.解得$x=y=\frac{1}{2},\quad \lambda=-\frac{1}{2}$.

不难知道u在$(1/2,1/2)$处取得极大值$1/4$.但$Hesse$矩阵$\boldsymbol{H}L=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$是不定的.

5.5.2 几何应用

情形一.

设空间曲线Γ由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\phi(t), \end{cases}$, $[\alpha,\beta]$ 给出, 并设$\varphi(t),\psi(t),\phi(t)$都可导, 且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\phi'^2(t)\neq 0$.

此时, 也称Γ是一条光滑曲线.这时, 记$\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\phi(t))$, 记点$P=\vec{r}(t_0)=(\varphi(t_0),\psi(t_0),\phi(t_0))$, $Q=\vec{r}(t_0+\Delta t)$

则$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$, 其中$P=(x_0,y_0,z_0)$.于是, $\vec{r}'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}\overrightarrow{PQ}$

是过点P的切线的一个方向向量, 因而是曲线在点P的一个切向量, 记为$\vec{T}$, 即$\vec{T}=\vec{r}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\phi'(t_0))$.

从而曲线Γ在点$P=(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程为$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\phi'(t_0)}$.

又由法平面的定义可知, 点P处的切向量$\vec{r}'(t_0)$是法平面的一个法向量.

因此, 由平面的点法式方程即得法平面的方程为$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\phi'(t_0)(z-z_0)=0$.

情形二.

设空间曲线Γ由方程组$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出, 并设F和G对各变量的连续偏导数都存在, 且在点P的某邻域上, $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$

这时, 方程组在点$P=(x_0,y_0,z_0)$的某邻域上确定了一组隐函数$y=\psi(x),z=\phi(x)$, 故过点P的一个切向量为$\vec{T}=(1,\psi'(x_0),\phi'(x_0))$.

但这时由于$y=\psi(x),z=\phi(x)$是隐函数, 所以一般直接无法求得$\vec{T}$, 而只需求一个与$\vec{T}$平行的切向量即可.

首先, 由$\begin{cases} F(x,\psi(x),\phi(x))\equiv 0, \\ G(x,\psi(x),\phi(x))\equiv 0, \end{cases}$ 两边分别关于x求导得$\begin{cases} F_x+F_y\dfrac{d\psi}{dx}+F_z\dfrac{d\phi}{dx}=0 \\ G_x+G_y\dfrac{d\psi}{dx}+G_z\dfrac{d\phi}{dx}=0 \end{cases}$

可见, $\vec{T}\cdot\operatorname{grad}F\Big|_P=0$且 $\vec{T}\cdot\operatorname{grad}G\Big|_P=0$, 即 $\vec{T}\perp\operatorname{grad}F\Big|_P$ 且 $\vec{T}\perp\operatorname{grad}G\Big|_P$.

这样可得曲线Γ在点$P=(x_0,y_0,z_0)$处平行于$\vec{T}$的一个切向量为

$$(\operatorname{grad}F\times\operatorname{grad}G)|_P=\left(\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_P,\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_P,\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_P\right)$$

空间的一张曲面Σ通常可用方程$F(x,y,z)=0,(x,y,z)\in D$来表示.若$F(x,y,z)$在D上连续, 且具有连续的各偏导数, 又$F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$

则称Σ是一张光滑曲面.

设点M是光滑曲面Σ上任一点, 则Σ上经过点M的任何光滑曲线在该点处的切线都在同一平面上.称该平面为曲面Σ上在点M处的切平面

设$M=(x_0,y_0,z_0)$为Σ上任一点, 而$\Gamma:\vec{r}=\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t),\phi(t)),t\in[\alpha,\beta]$是曲面$\Sigma$上通过点$M$的任一条光滑曲线

当$t=t_0$时对应于点M, 即$M=(\varphi(t_0),\psi(t_0),\phi(t_0))$.由导向量的几何意义, $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\phi'(t_0))$表示曲线在点$M$的一个切向量.

注意到曲线Γ在曲面Σ上, 故$F(\varphi(t),\psi(t),\phi(t))\equiv 0$.从而 $\dfrac{d}{dt}F(\varphi(t),\psi(t),\phi(t))\Big|_{t=t_0}=0$,

即$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\phi'(t_0)=0$.

记$\vec{N}=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right)=\operatorname{grad}F|_M$, 则上式即为$\vec{N}\cdot\vec{T}=0$, 也即$\vec{N}\perp\vec{T}$.

从而, 由曲线Γ的任意性可知, 通过点M的任何曲线的切线都在同一平面 (即切平面) 上.

过点M且垂直于切平面的直线称为曲面在点M处的法线.曲面上点M处的切平面的法向量也称为曲面在点M的法向量.

在上述讨论中, 可见

由方程$F(x,y,z)=0$给出的曲面Σ在任一点M的一个法向量为$\vec{N}=\operatorname{grad}F=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right)$,

故曲面Σ上过点M的切平面方程与法线方程分别为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

5.6 Advanced differential Calculus in Euclid Space

5.6.1 Directional Derivatives, Partial Derivatives and Differentials

When people discuss higher-dimensional $\mathbb{R}^n$, they often have the following impressions:

- Each point in $\mathbb{R}^n$ is simply an array $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$;
- $\mathbb{R}^n$ in two different contexts is the same $\mathbb{R}^n$.

Let us clarify this (last semester we mentioned that a space is a set plus a structure): Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers (last semester we proved its existence (unique up to isomorphism); this semester we assume such a real number field is fixed). We define

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

According to this definition, $\mathbb{R}^n$ is defined in a definite manner (hence unique). In particular, by the definition of Cartesian product, $x \in \mathbb{R}^n$ is precisely an array $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, where $x_i \in \mathbb{R}$. Especially, we have specified a particular coordinate system $(x_1, \cdots, x_n)$ on $\mathbb{R}^n$.

From the viewpoint of functions, given a point in $\mathbb{R}^n$, its i-th coordinate defines a (coordinate) map (function) from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$:

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i.$$

Note: A central topic in differential calculus is how to describe smooth/differentiable functions on $\mathbb{R}^n$ using other coordinate systems $(y_1, \cdots, y_n)$. Here, a new coordinate system $(y_1, \cdots, y_n)$ can currently be simply thought of as n functions

$$y_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

where $i = 1, 2, \cdots, n$. We require that the map obtained by putting them together

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_n)).$$

is a bijection.

In this semester's course, unless otherwise stated, we always assume Ω is an open set in $\mathbb{R}^n$; sometimes we call it an (open) region.

In last semester's course, we defined the concept of derivative (if it exists) for functions defined on $\mathbb{R}^1$. Let us briefly recall: Suppose f is a real-valued function defined on an interval $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ is a given point. If the limit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

exists, we denote this limit by $f'(x_0)$ and call it the derivative of f. We also defined the differential $df(x_0)$ of f at point x_0, which is a linear map (we will not discuss its definition for now). Both concepts can be generalized to functions on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Before giving the generalization, we must point out: $df(x_0)$ is a better concept than $f'(x_0)$ because it does not depend on the choice of coordinate system.

The correct generalization of the derivative to higher dimensions is the directional derivative:

Definition 5.24 (Directional Derivative)

Given a function $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$, $v \in \mathbb{R}^n$. If the following limit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

exists, we say that the (directional) derivative of f at x_0 along v exists, and denote it by

$$(\nabla_v f)(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}.$$

By convention, we also write $\nabla_v f$ as $\frac{\partial f}{\partial v}$.

Note In this definition, we do not use any coordinate system on $\mathbb{R}^n$. In particular, if $f : V \to \mathbb{R}$ is a function on a normed linear space, we can similarly define the directional derivative for $v \in V$.

If we use a coordinate system, we have some special vectors, such as $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (with 1 at the i-th position). We agree to denote this vector by the symbol

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \quad (1 \text{ at the } i\text{-th position}).$$

In this case, we denote the directional derivative by:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f)(x_0).$$

By convention, we call it the partial derivative.

Note Assume that for every $v \in \mathbb{R}^n$, the directional derivative of f at x_0 exists. Then we have a map (this is "almost" the definition of the differential):

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto (\nabla_v f)(x_0).$$

This map is compatible with the linear structure on $\mathbb{R}^n$, i.e., it is a linear map:

- For any $\lambda \in \mathbb{R}$, we have
$$(\nabla_{\lambda v} f)(x_0) = \lambda(\nabla_v f)(x_0).$$
In particular, $\nabla_0 f = 0$.
- For any $v, w \in \mathbb{R}^n$, we hope that
$$(\nabla_{v+w} f)(x_0) = (\nabla_v f)(x_0) + (\nabla_w f)(x_0).$$
This proposition requires additional conditions to prove; the mere existence of each directional derivative is insufficient. This property always holds for differentiable functions that we will prove later.

Example 5.38 We have two basic examples:

1. Suppose the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ depends only on the x-coordinate; we usually write it as $f(x, y) = f(x)$. Then,
$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0.$$
To see this, just compute by definition:
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x)}{h} = 0.$$
2. Consider the function defined on $\mathbb{R}^2$:
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$
Then, both partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ are 0. However, if $v = (v_1, v_2)$ with $v_1 v_2 \neq 0$, then
$$\nabla_v f(0) = \lim_{h\to 0} \frac{v_1 v_2}{h(v_1^2 + v_2^2)}$$
does not exist. This shows that the existence of partial derivatives does not guarantee the existence of other directional derivatives.

Note [Geometric Interpretation of Directional Derivatives] The directional derivative is essentially a one-dimensional derivative, as can be seen from its definition. Suppose $I = (-a, a)$ $(a > 0)$ is an interval, and

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \cdots, \gamma_n(t)),$$

is a C^1 map (last semester we proved this is equivalent to each component of γ being C^1). We call such a map γ a curve in $\mathbb{R}^n$. For such a curve, we call $\gamma(0) \in \mathbb{R}^n$ the tangent vector of γ at $\gamma(0)$. We emphasize that each tangent vector is associated with the base point $\gamma(0)$ and we consider tangent vectors at different points to be unrelated.

1. The most basic curves are straight lines: Suppose $x_0 \in \Omega, v \in \mathbb{R}^n$, consider the curve
$$\ell_v : (-a, a) \to \Omega, \quad t \mapsto x_0 + tv.$$
This is a segment of a straight line in Ω passing through x_0 with tangent vector v. Denote $L = \ell((-\varepsilon, \varepsilon))$, this is the geometric object "straight line". We should distinguish the following mathematical objects: The image of ℓ is the geometric object "straight line", but we parameterize this object using (the interval $(-a, a)$ as the domain of ℓ).

Now given a function $f : \Omega \to \mathbb{R}$, we denote by $f|_L$ the restriction of f to L. Then, $(\nabla_v f)(x_0)$ is exactly the derivative of the function

$$(f|_L) \circ \ell : I \to \mathbb{R}$$

at 0, i.e.,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big((f|_L) \circ \ell\big) = (\nabla_{\ell'(0)}) f(\ell(0)).$$

Of course, we can parameterize L in other ways, e.g.,

$$\ell' : \left(-\frac{a}{\lambda}, \frac{a}{\lambda}\right) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto x_0 + \lambda t v.$$

Its image $\mathrm{Im}(\ell')$ is also $\mathrm{Im}(\ell)$, but the tangent vector of ℓ' at $\ell'(0) = \ell(0)$ is $\lambda \cdot v$. So a change of parameterization may alter the tangent vector of the curve.

2. More generally, given a C^1-curve

$$\gamma : (-a, a) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(t).$$

Denote $C = \mathrm{Im}(\gamma)$, then

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big((f|_C) \circ \gamma\big) = (\nabla_{\gamma'(0)}) f(\gamma(0)).$$

The proof of this statement is left as an exercise.

3. There is a class of curves that is particularly important; they can be used to characterize surfaces in higher-dimensional spaces. Suppose all partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ of a function $f : \Omega \to \mathbb{R}$ are defined on Ω. Consider its graph

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \Omega\}.$$

This is a hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$. Given $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$, we specify a point on Γ_f; conversely, taking the first n coordinates of a point on Γ_f gives a point on Ω. We can intuitively think that the coordinates on Ω give a coordinate net on Γ via $x \mapsto (x, f(x))$. Fix a point $p = (p_1, \cdots, p_n)$, consider the curve (straight line) on Ω:

$$\gamma_k : (-a, a) \to \Omega, \quad t \mapsto (p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}, p_k + t, p_{k+1}, \cdots, p_n).$$

This is a parametric representation of the x_k-coordinate axis passing through p. We can lift this curve to Γ_f, obtaining

$$\widetilde{\gamma}_k : (-a, a) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \mapsto (\gamma_k(t), f(\gamma_k(t))).$$

In the figure, these correspond to two blue curves.

By definition, the tangent vector of the first curve at p is $e_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, shown in red in the figure; the tangent vector of the second curve at $(p, f(p))$ is

$$E_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}.$$

If we denote by $T_{(p,f(p))}\Gamma_f$ the tangent space of this surface at point $(p, f(p))$ (regardless of how it is defined for now), then these E_k should exactly span this tangent space.

Here, by lifting curves, we computed the tangent space of a surface (using partial derivatives). Such hypersurfaces appearing as graphs of functions are the most basic geometric objects in multivariable calculus, and we will encounter them countless times in later lectures.

We now define the differential of a function:

Definition 5.25 (Differential of a Function)

Given a function $f:\Omega\to\mathbb{R}$ and $x_0\in\Omega$. If there exists an $\mathbb{R}$-linear map $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ such that as $v\to 0$, where $v\in\mathbb{R}^n$, we have

$$f(x_0+v)=f(x_0)+A(v)+o(v),$$

i.e.,

$$\lim_{v\to 0}\frac{|f(x_0+v)-f(x_0)-A(v)|}{|v|}=0,$$

where the length $|v|$ of the vector can be chosen as any norm (e.g., the Euclidean norm $\|\cdot\|_2$ defined by the Pythagorean theorem), then we say f is differentiable at x_0 and call the linear map A the differential of f at x_0. We usually write A as:

$$df|_{x=x_0}=df(x_0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}.$$

If f is differentiable at every point of Ω, we say f is a differentiable function on Ω.

When $n=1$, we proved last semester that if the derivative of f at x_0 exists, then $df(x_0)$ also exists and can be written as

$$df(x_0):\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad v\mapsto f'(x_0)\cdot v,$$

where: is a number multiplied by a 1-dimensional vector.

Moreover, by definition, if f is differentiable at $x_0\in\Omega$, then f is continuous at x_0. This is almost obvious:

$$f(x_0+v)-f(x_0)=A(v)+o(v)=o(1).$$

Note In the definition of the differential, we did not use any coordinate system on $\mathbb{R}^n$: we only used the concept of the length of v. Therefore, we can naturally define the differential for functions defined on a normed linear space $(V,\|\cdot\|)$: given a function $f:V\to\mathbb{R}$ and $x_0\in V$, where $(V,\|\cdot\|)$ is a normed linear space (over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). If there exists an $\mathbb{R}$ (or $\mathbb{C}$)-linear map $A:V\to\mathbb{R}$, such that

$$\lim_{v\to 0}\frac{|f(x_0+v)-f(x_0)-A(v)|}{\|v\|}=0,$$

then we say f is differentiable at x_0 and call A the differential of f at x_0; we also denote A as $df\big|_{x=x_0}=df(x_0)$.

Proposition 5.19 (Computation of the Differential: Relationship between Differential and Directional Derivatives)

Suppose $f:\Omega\to\mathbb{R}$ is differentiable at x_0. Then all directional derivatives of f at x_0 exist. In particular, for $v=(v_1,\cdots,v_n)=\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ (recall: we agree that $\frac{\partial}{\partial x_i}$ represents the vector $(0,\cdots,1,\cdots,0)$), we have

$$df(x_0)(v)=(\nabla_v f)(x_0)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)v_j.$$

This also shows that the map

$$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad v\mapsto(\nabla_v f)(x_0)$$

is a linear map.

Proof Arbitrarily given $v\in\mathbb{R}^n$, let $h\to 0$. By the definition of the differential, we have

$$f(x_0+hv)-f(x_0)=(df(x_0))(hv)+o(hv).$$

Thus, we can compute the directional derivative using the definition:

$$(\nabla_v f)(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{h(df(x_0))(v)+o(hv)}{h}=(df(x_0))(v).$$

This shows $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $v\mapsto(\nabla_v f)(x_0)$ is linear. To compute $df(x_0)$ explicitly using partial derivatives, from the above result we have

$$(df(x_0))(v)=(\nabla_v f)(x_0)=\sum_{i=1}^n v_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}f)(x_0)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)v_j.$$

The proposition is proved.

Note One of the most meaningful mathematical symbols in calculus learning is the so-called dx. Now we define dx_i using the language of differentials. Assume we have preselected a coordinate system $(x_1, \cdots, x_n)$ on $\mathbb{R}^n$. Then

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

is a function; traditionally we write π_i as x_i, so given a point $p \in \mathbb{R}^n$, $dx_i(p)$ refers to the linear map $d\pi_i(p)$. Clearly, by defining the linear map

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \mapsto \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \frac{\partial}{\partial x_i}, & i = j. \end{cases}$$

This is the differential $d\pi_i$ at some point p.

Using the traditional Kronecker delta notation, we have

$$((dx_i)(p)) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta^i_j.$$

We previously proved that if the differential of a function exists, then directional derivatives exist. The converse is not true; in fact, the following example shows that f may not even be continuous, despite all its directional derivatives existing:

Example 5.39 Consider the function defined on $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Then, all directional derivatives of f at $(0, 0)$ exist: suppose $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ and $v \neq 0$. Then we have:

1. If $v_1 = 0$, then
$$\nabla_v f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$
2. If $v_1 \neq 0$, then
$$\nabla_v f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2}{t} = \frac{v_2^2}{v_1}.$$

However, f is not differentiable at $(0, 0)$ because f is not continuous at $(0, 0)$: we can choose the sequence of points $\left\{ \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \geq 1}$; the function values at these points do not converge to 0.

This example also shows that considering only directional derivatives does not effectively control the behavior of the function near a point.

However, if the directional derivatives possess continuity, the situation is quite different. Intuitively, continuity allows us to understand the situation near a point starting from information at that point.

Proposition 5.20

Given an open region $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and $x_0 \in \Omega$, f is a function defined on Ω. Suppose all partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ of f exist in a neighborhood of x_0 (say on Ω) and each $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ is a continuous function, where $i = 1, 2, \cdots, n$. Then f is differentiable at x_0.

This proposition can be very conveniently used to judge the differentiability of a function. For example, consider the function on $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = 3y + e^{yz},$$

its partial derivatives are easily computed and are clearly continuous. Therefore, f is differentiable.

Proof Assume the differential of f at p exists, then it can be expressed using partial derivatives, i.e.,

$$df(x_0)v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) v_j, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Accordingly, we define the linear map

$$D:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad v\mapsto\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)v_j.$$

We only need to show that $r(v)=f(x_0+v)-f(x_0)-D(v)$ is an $o(v)$ term as $v\to 0$. Write x_0 in coordinates as

$$x_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n}).$$

By definition, we have

$$\begin{aligned}
r(v)&=f((x_{0,1}+v_1,\cdots,x_{0,n}+v_n))-f((x_{0,1},\cdots,x_{0,n}))-\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)v_j\\
&=\left[f((x_{0,1}+v_1,x_{0,2},\cdots,x_{0,n}))-f((x_{0,1},\cdots,x_{0,n}))-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)v_1\right]\\
&\quad+\left[f((x_{0,1}+v_1,x_{0,2}+v_2,x_{0,3},\cdots,x_{0,n}))-f((x_{0,1}+v_1,x_{0,2},\cdots,x_{0,n}))-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)v_2\right]\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\left[f((x_{0,1}+v_1,\cdots,x_{0,n}+v_n))-f((x_{0,1}+v_1,\cdots,x_{0,n-1}+v_{n-1},x_{0,n}))-\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)v_n\right]\\
&=\sum_{j=1}^n\left[\underbrace{\left(f(\cdots,x_{0,j}+v_j,x_{0,j+1},\cdots)-f(\cdots,x_{0,j-1}+v_{j-1},x_{0,j},x_{0,j+1},\cdots)\right)}_{\text{Lagrange Mean Value Theorem}}-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)v_j\right]\\
&=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_j)v_j-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)v_j\right).
\end{aligned}$$

In the step where we apply the Lagrange Mean Value Theorem, we assume all variables except the i-th one are fixed. We know that in this case, taking the partial derivative is exactly the derivative operation in the one-dimensional situation, so the Mean Value Theorem can be applied. In other words, we apply the Lagrange Mean Value Theorem on the line segment with endpoints $(x_{0,1}+v_1,\cdots,x_{0,j-1}+v_{j-1},x_{0,j},\cdots,x_{0,n})$ and $(x_{0,1}+v_1,\cdots,x_{0,j}+v_j,x_{0,j},\cdots,x_{0,n})$, where $\bar{x}_j$ is a point on this segment. As $v\to 0$, clearly $\bar{x}_j\to x_0$.

The above calculation shows

$$|r(v)|\leq\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\right||v|.$$

By continuity, $r(v)=o(v)$.

Note The key idea in the above proof is to transform the problem into discussion on a certain line or curve (dimension = 1; of course, we haven't defined what dimension is yet), thereby utilizing results from one-dimensional differential calculus. This is one of the basic ideas for handling functions of several variables. Last semester when we proved that the straight line segment is the shortest path between two points, we used this idea; in that context the space under study was the space of all curves, whose dimension is even infinite!

Let us look at another application of the above idea: This example is very important for practical applications because we can use it to compute maxima and minima of multivariate functions:

Proposition 5.21

Suppose $f:\Omega\to\mathbb{R}$ is differentiable at x_0 and x_0 is a maximum of f on Ω. Then $df(x_0)=0$.

Proof Arbitrarily given a direction $v\in\mathbb{R}^n$, consider the straight line segment through x_0:

$$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega,\quad t\mapsto x_0+tv,$$

where ε is sufficiently small so that the segment itself lies in Ω. Consider $f\circ\gamma$. In short, study the function $g(t)=f(x_0+tv)$ on $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Previous calculations show:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f\circ\gamma=\nabla_v f(x_0)=df(x_0)(v).$$

Clearly, x_0 is a maximum of $f \circ \gamma$, so $(f \circ \gamma)'(0) = 0$. This shows that for every $v \in \mathbb{R}^n$, $df(x_0)(v) = 0$. Hence, as a linear map, $df(x_0) = 0$.

Another interesting application is as follows:

Proposition 5.22

Suppose Ω is an open convex set (connectivity may replace convexity), $f : \Omega \to \mathbb{R}$ is a differentiable function. If for every $x \in \Omega$, we have $df(x) = 0$, then f is constant.

Proof The proof is left as an exercise. The basic idea is: Fix $x_0 \in \Omega$. For any $x \in \Omega$, consider the line segment from x_0 to x and restrict f to this segment. This reduces the problem to the one-dimensional case.

We introduce some notation to conclude this lecture:

Note Given a differentiable $f : \Omega \to \mathbb{R}$, for each $x \in \Omega$, $df(x)$ is a linear function on $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

To emphasize the dependence on x, we denote the domain $\mathbb{R}^n$ of $df(x)$ by $T_x\Omega$. In other words, $df(x)$ is a family of linear functions whose domain changes with the position of the space point; this is not a function in the usual sense. Later in the course, we will consider the case where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a surface (submanifold); then these discussions will become exceptionally clear.

5.6.2 Differentials of Mappings, Chain Rule for Differentials

Given a function $f : \Omega \to \mathbb{R}$, we defined its differential $df(x)$ last time. When x is fixed, this is a linear function on $\mathbb{R}^n$. Following the one-dimensional theory, differentiating the first derivative should yield the second derivative. However, to define the second derivative of f, we need to differentiate the map $x \mapsto df(x)$. Now (loosely speaking), the map $f : x \mapsto df(x)$ is a map from Ω to $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$, which is a vector-valued function. So we naturally think of defining the differential for vector-valued functions $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Of course, we could also consider each component of $df(x)$ (which depends on the choice of coordinate system) and require each component to be differentiable; at least formally, the latter approach is simpler and more elegant.

Definition 5.26 (Differential of a Mapping)

Suppose Ω is a region in $\mathbb{R}^n$, Ω' is a region in $\mathbb{R}^m$, and $f : \Omega \to \Omega'$ is a mapping. If there exists a linear map

$$df|_{x=x_0} = df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

such that as $v \to 0$ in $\mathbb{R}^n$, we have

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + df(x_0)v + o(v),$$

i.e.,

$$\lim_{v \to 0} \frac{|f(x_0 + v) - f(x_0) - df(x_0)v|}{|v|} = 0,$$

then we say f is differentiable at x_0 and call the linear map $df(x_0)$ the differential of f at x_0. If f is differentiable at every point of Ω, we say f is a differentiable mapping on Ω.

Note 1) In the above definition of the differential, we have not used any coordinate systems on $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$. In fact, in the limit

$$\lim_{v \to 0} \frac{|f(x_0 + v) - f(x_0) - df(x_0)v|}{|v|} = 0,$$

we only use the linear structures on $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ and the norms on them (we have used blue and red to denote them respectively, where red is the norm on the domain $\mathbb{R}^n$ and blue is the norm on the codomain $\mathbb{R}^m$).

Accordingly, we can generalize the above definition: Given normed linear spaces $(V_1, \|\cdot\|_1)$ and $(V_2, \|\cdot\|_2)$, nonempty open sets $\Omega_1 \subset V_1$ and $\Omega_2 \subset V_2$, and a mapping $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. If there exists a linear map

$$df|_{x=x_0} = df(x_0) : V_1 \to V_2,$$

such that as $v \to 0$ in V_1, we have

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(x_0 + v) - f(x_0) - df(x_0)v\|_2}{\|v\|_1} = 0,$$

then we say f is differentiable at x_0 and call the linear map $df(x_0)$ the differential of f at x_0.

2) Suppose f is differentiable on Ω. Then, given $x \in \Omega$, $df(x) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \approx \mathbb{R}^{mn}$ (which can be regarded as an $m \times n$ matrix; here it is convenient to use coordinates) also takes values in a vector space. (However, when defining differentials on general (infinite-dimensional) normed linear spaces, we would require $df(x) \in \mathrm{Hom}(V, W)$ to be so-called continuous linear maps; we will not expand on this here; interested students can study it in functional analysis courses.) So as x varies, we obtain a map

$$\Omega \to \mathbb{R}^{nm}, \quad x \mapsto df(x).$$

We can differentiate it to define its differential. Higher-order differentials are not the focus of this course.

3) Suppose f is differentiable at $x \in \Omega$. Then we have a map

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Since these maps depend on the point, especially on $x_0 \in \Omega$ (and $f(x_0) \in \Omega'$), we denote by $T_{x_0}\Omega$ the linear space $\mathbb{R}^n$ that is its domain, and by $T_{f(x_0)}\Omega'$ the linear space $\mathbb{R}^m$ that is its codomain. Thus, formally we have

$$df(x_0) : T_{x_0}\Omega \to T_{f(x_0)}\Omega'.$$

The symbol $T_{x_0}\Omega$ represents the tangent space (tangent plane) of Ω at x_0, and $T_{f(x_0)}\Omega'$ represents the tangent space of Ω' at $f(x_0)$. We will have specific examples to understand these objects; for now you may regard them as convenient notations.

Last time we defined directional derivatives and partial derivatives, which are one-dimensional objects. The following proposition shows that we can use these one-dimensional objects (partial derivatives) to describe $df(x_0)$, which is a higher-dimensional object:

Proposition 5.23 (Computation of the Differential)

Suppose $V = \mathbb{R}^n$ and $W = \mathbb{R}^m$. We use coordinate system $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ on V, and coordinate system $\{y_j\}_{j=1,\ldots,m}$ on W (writing the spaces as V and W emphasizes that these spaces can be described without specific coordinates). Consider $f : V \to W$ (we can also consider f defined on some region in V). In coordinates, we have:

$$x \mapsto f(x) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)).$$

Sometimes it is written as

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \quad y_2 = f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n).$$

Then we have:

1) If f is differentiable at x_0, then each component function f_j is differentiable at x_0, for $j = 1, 2, \cdots, m$.

2) If each component function f_j is differentiable at x_0 (for $j = 1, 2, \cdots, m$), then f is differentiable at x_0.

In particular, if f is differentiable at x_0, then the map $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ can be represented by the $m \times n$ matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$$

(we call this matrix the Jacobian matrix of f at x, denoted $\mathrm{Jac}(f)$ or $J(f)$; it is merely the expression of the differential in a particular coordinate system).

Proof We first prove that f is differentiable at x_0 if and only if each component f_j ($j = 1, \cdots, m$) is differentiable. Suppose f is differentiable at x_0. Then $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is defined and is a linear map. Since we have chosen bases $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i \le n}$ on $\mathbb{R}^n$ and $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\right\}_{j \le m}$ on $\mathbb{R}^m$, we can represent this linear map by a matrix $(J_{ij})_{i \le m, j \le n}$.

First, expressing in components, we have

$$\begin{aligned} |f(x_0+v) - f(x_0) - df(x_0)v| &= \frac{|(\cdots, f_j(x_0+v) - f_j(x_0), \cdots) - (\cdots, \sum_{i=1}^n J_{ji}v_i, \cdots)|}{|v|} \\ &= \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m |f_j(x_0+v) - f_j(x_0) - \sum_{i=1}^n J_{ji}v_i|^2}}{|v|}. \end{aligned}$$

Since the left-hand side is $o(1)$ as $v \to 0$, restricting to each component, we have

$$o(1) \ge \frac{|f_j(x_0+v) - f_j(x_0) - \sum_{i=1}^n J_{ji}v_i|}{|v|}.$$

By definition, this shows f_j is differentiable (because we approximated f_j by a linear map near x_0).

Conversely, assume for each $j \le m$ we have

$$\frac{|f_j(x_0+v) - f_j(x_0) - \sum_{i=1}^n J_{ji}v_i|}{|v|} = o(1).$$

Then,

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_0+v) - f(x_0) - df(x_0)v|}{|v|} &= \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m |f_j(x_0+v) - f_j(x_0) - \sum_{i=1}^n J_{ji}v_i|^2}}{|v|} \\ &\le \sum_{j=1}^m \frac{|f_j(x_0+v) - f_j(x_0) - \sum_{i=1}^n J_{ji}v_i|}{|v|} = m \times o(1) = o(1). \end{aligned}$$

So $df(x_0)$ exists.

Let $v = t\frac{\partial}{\partial x_{i_0}}$, i.e., $v_{i_0} = t$ and other components $= 0$. Then, by the definition of the differential, the left-hand side of the above expression is $o(1)$ (as $t \to 0$). Computing the right-hand side, we get

$$o(1) = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m \left|f_j(x_0 + (0, \cdots, 0, t, 0 \cdots, 0)) - f_j(x_0) - J_{ji_0}t\right|^2}}{|t|}.$$

For a particular index j_0, we naturally have

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left|f_j(x_0+(0,\cdots,0,t,0\cdots,0))-f_j(x_0)-J_{ji_0}t\right|^2}\geq|f_{j_0}(x_0+(0,\cdots,0,t,0\cdots,0))-f_{j_0}(x_0)-J_{j_0i_0}t|.$$

Thus,

$$o(1)=\frac{|f_{j_0}(x_0+(0,\cdots,0,t,0\cdots,0))-f_{j_0}(x_0)-J_{j_0i_0}t|}{|t|}.$$

By definition, this shows that the partial derivative of f_{j_0} with respect to x_{i_0} exists and equals $J_{j_0i_0}$. Hence,

$$J_{ji}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0).$$

The proposition is proved.

Note The above proposition shows that a mapping is differentiable if and only if its components are differentiable. Therefore, we can introduce the concept of k-times differentiable by successively differentiating the components (each time after taking the differential, each component of this differential can be differentiated again). So we can define $C^k(\Omega,\mathbb{R}^m)$, the space of maps whose differentials up to order k are continuous. According to the theorem from last lecture on using partial derivatives to determine differentiability, we know that as long as the continuous partial derivatives of f up to order k (possibly along different directions) exist and are continuous, the mapping is C^k. This is a very convenient and effective criterion.

We now study the differential of a composition, i.e., the so-called chain rule.

Proposition 5.24 (Chain Rule)

Suppose $\Omega_j\subset\mathbb{R}^{m_j}$ are open sets, for $j=1,2,3$, and $f:\Omega_1\to\Omega_2$, $g:\Omega_2\to\Omega_3$ are mappings. Assume f is differentiable at point $x_1\in\Omega_1$, and g is differentiable at point $x_2=f(x_1)\in\Omega_2$. Then the composite mapping $g\circ f$ is differentiable at x_1, and

$$(d(g\circ f))(x_1)=(dg)(f(x_1))\circ df(x_1).$$

Note The composition of these maps can be represented by the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \Omega_2 \arrow[d, "g"] \\
& \Omega_3
\end{tikzcd}$$

Then the corresponding differentials (at the linear level) can also be represented by a similar commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{m_1} \arrow[r, "df(x_1)"] \arrow[dr, "d(g\circ f)(x_1)"'] & \mathbb{R}^{m_2} \arrow[d, "dg(f(x_1))"] \\
& \mathbb{R}^{m_3}
\end{tikzcd}$$

The notation we introduced earlier better describes this scenario: For the map $df(x_1):\mathbb{R}^{m_1}\to\mathbb{R}^{m_2}$, we denote the $\mathbb{R}^{m_1}$ corresponding to x_1 as $T_{x_1}\Omega_1$, and the $\mathbb{R}^{m_2}$ as $T_{f(x_1)}\Omega_2$. Then we have the map

$$df|_{x=x_1}:T_{x_1}\Omega_1\to T_{f(x_1)}\Omega_2.$$

Thus, the above commutative diagram can be written as

$$\begin{tikzcd}
T_{x_1}\Omega_1 \arrow[r, "df|_{x=x_1}"] \arrow[dr, "d(g\circ f)|_{x=x_1}"'] & T_{f(x_1)}\Omega_2 \arrow[d, "dg|_{x=f(x_1)}"] \\
& T_{g(f(x_1))}\Omega_3
\end{tikzcd}$$

Proof The derivation of the chain rule is exactly the same as in the one-dimensional case: Let $x_2=f(x_1)\in\Omega_2$. By definition,

$$f(x_1+h)=f(x_1)+df(x_1)h+\delta(h),$$

$$g(f(x_1)+\ell) = g(f(x_1)) + dg(x_2)\ell + \Delta(\ell),$$

where $h \in \mathbb{R}^{m_1}, \ell \in \mathbb{R}^{m_2}$, and $\lim_{h\to 0} \frac{|\delta(h)|}{|h|} = \lim_{\ell\to 0} \frac{|\Delta(\ell)|}{|\ell|} = 0$. Accordingly,

$$\begin{aligned} g(f(x_1+h)) - g(f(x_1)) &= g(f(x_1) + df(x_1)h + \delta(h)) - g(f(x_1)) \\ &= dg(x_2)(df(x_1)h + \delta(h)) + \Delta(df(x_1)h + \delta(h)) \\ &= dg(x_2)(df(x_1)h) + dg(x_2)(\delta(h)) + \Delta(df(x_1)h + \delta(h)). \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} &\frac{g(f(x_1+h)) - g(f(x_1)) - dg(x_2)\circ df(x_1)(h)}{|h|} \\ &= \frac{dg(x_2)(\delta(h))}{|h|} + \frac{\Delta(df(x_1)h + \delta(h))}{|h|} \\ &\le C\left|\frac{\delta(h)}{|h|}\right| + \left|\frac{\Delta(df(x_1)h+\delta(h))}{|df(x_1)h+\delta(h)|}\right| \cdot \frac{|df(x_1)h+\delta(h)|}{|h|} \\ &\le C' \cdot o(1). \end{aligned}$$

Hence this is an $o(1)$ term. By the definition of the differential,

$$d(g\circ f)(x_1) = dg(x_2)\circ df(x_1).$$

This completes the proof.

As a corollary, we can compute the differential of the inverse function (inverse mapping):

Corollary 5.2

Given regions $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ and $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, and a differentiable mapping $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Suppose f is a bijection and its inverse mapping $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ is differentiable. Then

$$n_1 = n_2;$$

$$df(x) \text{ is invertible (equivalently, the determinant of } \mathrm{Jac}(f)(x) \text{ is nonzero).}$$

In this case, for any $y \in \Omega_2$, we have

$$df^{-1}(y) = \left(df|_{x=f^{-1}(y)}\right)^{-1}.$$

Proof Let $\Omega_3 = \Omega_1$, $g = f^{-1}$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, and $g\circ f = \mathrm{Id}$, where

$$\mathrm{Id} : \Omega_1 \to \Omega_1, \quad x \mapsto x,$$

is the identity map, whose differential at every point is the identity map (linear). By the chain rule, we have

$$\mathrm{Id} = dg(y)\circ df(x).$$

From matrix rank theory, we know $n_1 \le n_2$. Replacing f by f^{-1}, we get $n_2 \le n_1$. This proves the dimension part. The above equality already implies the computation of the differential of the inverse map.

第 6 章 含参积分学

6.1 含参变量常义积分

在定积分中,我们曾定义过变上限的积分型函数 $\int_a^x f(t)dt$, 也遇到过像 $\int_a^b f(t)(x-t)dt$ 这样的积分, 等等.这些就是一种含参变量 x 积分
一般地, 可设 $f(x,y)$ 是 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的二元函数.对任意的 $x\in[a,b]$, $f(x,y)$ 可看作是 y 的一元函数
若积分 $\int_c^d f(x,y)dy$ 存在, 其值由 x 唯一确定, 记作 $\varphi(x)$.这样 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy,\quad x\in[a,b]$ 就确定了 $[a,b]$ 上的一个函数
其中变量 x 在积分过程中是看作常量, 通常称之为参变量, 对应的积分称为含参变量 x 的积分.
同理, 可定义含参变量 y 的积分 $\psi(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\quad y\in[c,d]$.它们统称为含参变量积分.含参变量积分无非就是某种积分型的函数.
我们来讨论它们的基本分析性质, 如连续性、可导性与可积性等.

Theorem 6.1.1 (连续性定理 (极限号与积分号换序))

设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上连续, 进而可积.

说明极限运算与积分运算的可交换性, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)dy$.

Proof 对任意的 $x_0\in[a,b]$.因为 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 故 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续
所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall(x,y),(x_1,y_1)\in D$, 当 $|x-x_1|<\delta,|y-y_1|<\delta$ 时, $|f(x,y)-f(x_1,y_1)|<\dfrac{\varepsilon}{d-c}$.
于是, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\le\int_c^d |f(x,y)-f(x_0,y)|dy<\dfrac{\varepsilon}{d-c}\cdot(d-c)=\varepsilon$.
可见, $\varphi(x)$ 在 x_0 连续, 故 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

Theorem 6.1.2 (可导性定理 (求导与积分交换顺序))

设 $f(x,y)$ 和偏导数 $f_x(x,y)$ 都在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $\varphi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)dy$.

Proof 下面考虑 $\varphi(x)$ 的可导性.由导数定义, $\varphi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\int_c^d\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}dy$.
若 $f(x,y)$ 和偏导数 $f_x(x,y)$ 都在 D 上连续, 则由微分中值定理和连续性定理, 存在 $\theta\in[0,1]$, 使得
$\lim\limits_{\Delta x\to0}\int_c^d\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}dy=\lim\limits_{\Delta x\to0}\int_c^d f_x(x+\theta\Delta x,y)dy=\int_c^d\lim\limits_{\Delta x\to0}f_x(x+\theta\Delta x,y)dy=\int_c^d f_x(x,y)dy$.
可见, $\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $\varphi'(x)=\int_c^d f_x(x,y)dy$.

Theorem 6.1.3 (积分性定理 (积分号互换顺序))

设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$.

Proof 记 $g(u)=\int_a^u \varphi(x)dx=\int_a^u dx\int_c^d f(x,y)dy$
$h(u)=\int_c^d dy\int_a^u f(x,y)dx=\int_c^d F(y,u)\quad u\in[a,b]$
则 $g'(u)=\varphi(u)$ 且由定理可导性定理 $h'(u)=\int_c^d\left(\int_a^u f(x,y)dx\right)_u'dy=\int_c^d f(u,y)dy=\varphi(u)$.
可见, $g'(u)=h'(u)$, 故 $g(u)=h(u)+C$.令 $u=a$, 则 $C=0$, 故 $g(u)=h(u)$.

因此, $g(b)=h(b)$, 即 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$.

Theorem 6.1.4 (连续性定理)

设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 且 $c\le\alpha(x)\le d, c\le\beta(x)\le d$, 则 $\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上连续.

Proof y 介于 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 之间, 可设 $y=(1-t)\alpha(x)+t\beta(x), t\in[0,1]$, 则 $dy=(\beta(x)-\alpha(x))dt$, 故
$\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)dy=\int_0^1 f(x,(1-t)\alpha(x)+t\beta(x))\cdot(\beta(x)-\alpha(x))dt\xrightarrow{\text{记为}}\int_0^1 g(x,t)dt$, 其中 $g(x,t)$ 在 $[a,b]\times[0,1]$ 上连续
故由之前的连续性定理, $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

Theorem 6.1.5 (可导性定理)

设 $f(x,y)$ 和偏导数 $f_x(x,y)$ 都在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可导, 且 $c\le\alpha(x)\le d, c\le\beta(x)\le d$, 则
$\Phi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $\Phi'(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f_x(x,y)dy+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$.

Proof 记 $z=\alpha(x), w=\beta(x)$, 并记 $H(x,w,z)=\int_z^w f(x,y)dy$, 则 $\Phi(x)$ 可看作 $H(x,w,z)$ 与 $z=\alpha(x), w=\beta(x)$ 的复合.
从而, $\Phi'(x)=H_x+H_w\cdot w_x+H_z\cdot z_x=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f_x(x,y)dy+f(x,\beta(x))\beta'(x)-f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$.

练习 6.1 (1) $\lim_{a\to0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2\cos ax}$;
(2) $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(0<a<b)$;
(3) $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$;
(4) $I(\theta)=\int_0^\pi\ln(1+\theta\cos x)dx(|\theta|<1)$.

Proof

(1) 记 $f(x,a)=\frac{1}{1+x^2\cos ax}$, 则 $f(x,a)$ 在 $[0,1]\times\left[-\frac12,\frac12\right]$ 上连续, 故 $\lim_{a\to0}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2\cos ax}=\int_0^1\lim_{a\to0}\frac{dx}{1+x^2\cos ax}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

(2) 注意到 $\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\frac{x^y}{\ln x}\Big|_a^b=\int_a^b\left(\frac{x^y}{\ln x}\right)_y'dy=\int_a^b x^y dy$, 而定义 $0^y=0$, 则 $f(x,y)=x^y$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续.
故 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_0^1\int_a^b x^y dydx=\int_a^b dy\int_0^1 x^y dx=\int_a^b\frac{1}{1+y}dy=\ln\frac{1+b}{1+a}$.

(3) 考虑函数 $\varphi(a)=\int_0^1\frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}dx$, 则 $\varphi(0)=0, \varphi(1)=I$, 且
$\varphi'(a)=\int_0^1\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx=\frac{1}{1+a^2}\int_0^1\left[\frac{-a}{1+ax}+\frac{x+a}{1+x^2}\right]dx=\frac{1}{1+a^2}\left[-\ln(1+a)+\frac12\ln2+\frac{\pi}{4}a\right]$.
因此两边在 $[0,1]$ 上积分可得 $I=\varphi(1)-\varphi(0)=-I+\frac{\ln2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln2}{2}$, 从而 $I=\frac{\pi\ln2}{8}$.

(4) 对任意 $|\theta|<1$, 取 $a>0$, 使得 $|\theta|\le a$. 记 $f(x,\theta)=\ln(1+\theta\cos x)$, 则 f 及其偏导在 $[-a,a]\times[0,\pi]$ 上连续, 故
$I'(\theta)=\int_0^\pi\frac{\cos x}{(1+\theta\cos x)}dx=\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^\pi\frac{dx}{1+\theta\cos x}=\frac{\pi}{\theta}-\frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}$,
其中定积分的计算利用万能变换 $t=\tan\frac{x}{n}$. 注意到 $I(0)=0$, 两边在 $[0,\theta]$ 上积分可得 $I(\theta)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{n}$.

6.2 含参反常积分一致收敛性

Definition 6.1 (函数极限一致收敛定义)

设D和E是R的子集, u_0(可以是$+\infty$)是E的极限点, $f(x,u)$在$D\times E$上定义

且对任意的$x\in D$, 存在有限的极限 : $\lim\limits_{u\to u_u} f(x,u)=g(x)\left(或者\lim\limits_{u\to+\infty} f(x,u)=g(x)\right)$

$\forall\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$(或者$U>0$), 使得当$u\in E, 0<|u-u_0|<\delta$(或者$u\in E, u>U$)时, $|f(x,u)-g(x)|<\varepsilon$对所有的$x\in D$成立

我们就说当$u\to u_0$(或者$u\to+\infty$)时, 函数$f(x,u)$对$x\in D$一致收敛于极限函数$g(x)$.

Theorem 6.2.1 (一致收敛归结原则)

当$u\to u_0$时 (或者$u\to+\infty$时), 函数$f(x,u)$对$x\in D$一致收敛于极限函数$g(x)$的 $\Longleftrightarrow$

对$E\setminus\{u_0\}$ 中满足条件$u_n\to u_0$的任意序列 $\{u_n\}$ (或E中满足$u_n\to+\infty$的任意序列 $\{u_n\}$)

相应的每一函数序列$\psi_n(x)=f(x,u_n)$ $(n=1,2,\cdots)$都在D上一致收敛于函数$g(x)$.

Proof 条件的必要性是显然的, 现在来证明条件的充分性.

用反证法.

如果当$u\to u_0$时 (或者$u\to+\infty$时), 函数$f(x,u)$对$x\in D$不一致收敛于$g(x)$.

那么对某个$\varepsilon>0$, 不管$n\in\mathrm{N}^*$怎样大, 总存在$u_n\in E$, 使得 $0<|u_n-u_0|<\dfrac{1}{n}\quad\left(或者u_n>n\right)$.

有 $\sup\limits_{x\in D}|f(x,u_n)-g(x)|\geqslant\varepsilon_0$.对这样的 $\{u_n\}$, 虽然有$u_n\in E\setminus\{u_0\}, u_n\to u_0\quad(或者u_n\in E, u_n\to+\infty)$

但相应的函数列$\psi_n(x)=f(x,u_n)\quad(n=1,2,\cdots)$不能在$D$上一致地收敛于$g(x)$, 与假设矛盾.

Theorem 6.2.2

1.设$f(x,u)$定义在 $[a,b]\times E$上, u_0(可以是$+\infty$)是E的一个极限点, 并且对每个给定的$u\in E$, $f(x,u)$是x的连续函数.

如果当$u\to u_0$时 (或者当$u\to+\infty$时), $f(x,u)$对$x\in[a,b]$一致收敛于$g(x)$, 那么$g(x)$在 $[a,b]$上连续.

2.设$f(x,u)$定义在 $[a,b]\times E$上, u_0(可以是$+\infty$)是E的一个极限点, 并且对每个给定的$u\in E$, $f(x,u)$在 $[a,b]$上可积.

如果当$u\to u_0$时 (或者当$u\to+\infty$时), $f(x,u)$对$x\in[a,b]$一致收敛于$g(x)$, 那么$g(x)$在 $[a,b]$上可积, 并且

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\left(或者\lim_{u\to+\infty}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$$

Proof 1.任意取一个满足以下条件的序列 $\{u_n\}: u_n\in E\setminus\{u_0\}, u_n\to u_0\quad(或者u_n\in E, u_n\to+\infty)$.

考察函数列$\psi_n(x)=f(x,u_n)\quad(n=1,2,\cdots)$, 此连续函数列在 $[a,b]$上一致收敛于$g(x)$.由函数列级数知识.知$g(x)$在 $[a,b]$上连续.

2.任意选取一个满足以下条件的序列 $\{u_n\}: u_n\in E\setminus\{u_0\}, u_n\to u_0\quad(或者u_n\in E, u_n\to+\infty)$.

因为函数列$\psi_n(x)=f(x,u_n)\quad(n=1,2,\cdots)$在 $[a,b]$上可积, 且在 $[a,b]$上一致收敛于$g(x)$, 所以由函数列知识知$g(x)$在 $[a,b]$上可积

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f(x,u_n)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.又因为对任意满足上述条件的 $\{u_n\}$ 式 (1)都成立

所以 $\lim\limits_{u\to u_0}\displaystyle\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\left(或者\lim_{u\to+\infty}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$

Definition 6.2 (含参反常积分一致收敛定义)

设含参变量x的反常积分$\varphi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy,\ \ x\in D$

若$\forall\varepsilon>0,\exists G>c$, 当$A>G$时, $\forall x\in D,\left|\int_c^A f(x,y)dy-\varphi(x)\right|<\varepsilon,$

即$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dy\right|<\varepsilon$, 也即$\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{x\in D}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dy\right|=0$

则称$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$D$上一致收玫于$\varphi(x)$.

若$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在任意的闭子区间$[a,b]\subset D$上都一致收玫于$\varphi(x)$, 则称$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$D$上内闭一致收玫于$\varphi(x)$.

$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$D$上不一致收敛$\iff\exists\varepsilon_0>0,\forall G>c,\exists A_0>G,\exists x_0\in D,\left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x_0,y)\,dy\right|>\varepsilon_0.$

记$F(x,A)=\int_c^A f(x,y)dy$, 则$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$D$上一致收玫于$\varphi(x)$

即指$F(x,A)\rightrightarrows\varphi(x)(A\to+\infty)$.后者可称为含参变量的函数极限的一致收玫性.

练习 6.2 讨论积分$\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x(u\geqslant 0)$的一致收敛性.

Proof 当$u>0$时, 令$xu=t$, 那么$\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x=\int_{uA}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-uA}$.

因此$\eta(A)=\sup\limits_{u\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x\right|=1\nrightarrow 0$从而知积分$\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

若任取$\delta>0$, 考虑它在$[\delta,+\infty)$上的一致收玫性, 那么由于$\eta(A)=\sup\limits_{u\in[\delta,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x\right|=\mathrm{e}^{-\delta A}\to 0\quad(A\to+\infty)$

故知它在$[\delta,+\infty)$上一致收敛.

练习 6.3 含参变量a的反常积分$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$在$a\geq a_0>0$时一致收玫, 但在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

Proof 直接计算$\sup\limits_{a\geq a_0}\left|\int_A^{+\infty} e^{-ax}dx\right|=\sup\limits_{a\geq a_0}\frac{1}{ae^{aA}}=\frac{1}{a_0e^{a_0A}}\to 0(A\to+\infty)$, 但$\sup\limits_{a>0}\left|\int_A^{+\infty} e^{-ax}dx\right|=\sup\limits_{a>0}\frac{1}{ae^{aA}}=+\infty.$

Theorem 6.2.3 (柯西收敛准则)

含参变量反常积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$D$上一致收敛$\iff\forall\varepsilon>0$, 存在$G>c$, 当$A_1,A_2>G$时, $\forall x\in D,\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dy\right|<\varepsilon.$

Proof 必要性.设$F(x,A)\rightrightarrows\varphi(x)(A\to+\infty)$, 即$\forall\varepsilon>0,\exists G>c$, 当$A>G$时, $\forall x\in D,|F(x,A)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

则$\forall A_1,A_2>G,|F(x,A_1)-F(x,A_2)|\leq|F(x,A_1)-\varphi(x)|+|F(x,A_2)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

充分性.由条件, $\forall\varepsilon>0$, 存在$G>c$, 当$A,A_1>G$时, $\forall x\in D,|F(x,A)-F(x,A_1)|<\varepsilon$, 则由函数极限的$Cauchy$准则

$\forall x\in D,\lim_{A\to+\infty}F(x,A)$存在, 可设$\lim_{A\to+\infty}F(x,A)=\varphi(x)$.于是, 令$A_1\to+\infty$, 则$|F(x,A)-\varphi(x)|\leq\varepsilon$.可见$F(x,A)\rightrightarrows\varphi(x)(A\to+\infty)$.

Theorem 6.2.4 (含参反常积分和函数列级数的联系)

含参变量反常积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$D$上一致收玫$\iff$函数项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$在$D$上一致收玫

其中$u_k(x)=\int_{A_k}^{A_{k+1}} f(x,y)dy$, 而$\{A_k\}$是任一递增数列, $A_1=c$且$\lim\limits_{k\to\infty}A_k=+\infty$.

Proof 必要性$\Rightarrow$.由$Cauchy$准则, $\forall\varepsilon>0,\exists G>c,\forall A',A''>G,\forall x\in D,\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dy\right|<\varepsilon.$

而 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = +\infty$, 所以对上述$G$, 存在$N > 0$, 当$m > n \geq N$时, $A_m \geq A_n > G$.故$\forall x \in D$, $|u_{n+1}(x) + \cdots + u_m(x)| = \left|\int_{A_{n+1}}^{A_{m+1}} f(x,y)dy\right| < \varepsilon$.

充分性 $\Leftarrow$.反证法.假设存在$\varepsilon_0 > 0, \forall G > c, \exists A'' > A' > G, \exists x \in D, \left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dy\right| \geq \varepsilon_0$.

特别地, 对$G_n = \max\{n, A_{2n-1}\}\,(A_1 = c)\,, \exists A_{2n+1} > A_{2n} > G_n, \exists x_{2n} \in D$, 有 $|u_{2n}(x_{2n})| = \left|\int_{A_{2n}}^{A_{2n+1}} f(x_{2n}, y)\,dy\right| \geq \varepsilon_0$

故$u_k(x)$不一致收玫于0.因此, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$在$D$上不一致收玫.

暗示了函数项级数一致收玫性的判别方法可平行推广于含参变量反常积分的一致收玫性.

Theorem 6.2.5 (Weiestrass 含参反常积分判别法)

设含参变量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$的收敛域为$D$

1.若存在函数$g(y)$, 使得$|f(x,y)| \leq g(y)$; 当y充分大时成立即可

2.反常积分 $\int_c^{+\infty} g(y)dy$收玫

则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$在$D$上一致收敛.

Proof 因为 $\int_c^{+\infty} g(y)dy$收玫, 故由$Cauchy$准则, $\forall \varepsilon > 0, \exists G > c$, 当$A', A'' > G$时, $\left|\int_{A'}^{A''} g(y)dy\right| < \varepsilon$.

于是, $\forall x \in D$, $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dy\right| \leq \int_{A'}^{A''} |f(x,y)|dy \leq \int_{A'}^{A''} g(y)dy < \varepsilon$.

Theorem 6.2.6 (Dirichlet 与 Abel 含参反常积分判别法)

若含参变量反常积分 $\int_c^{\infty} f(x,y)\,g(x,y)dy(x \in D)$满足如下两条件中一个, 则其在$D$上一致收敛.

(i)*Dirichlet*判别法:

(1)当$A \to +\infty$时, 含参变量正常积分 $\int_c^A f(x,y)dy$对x一致有界;

(2)当$y \to +\infty$时, $g(x,y)$在关于x一致收敛于0

(3) 对于每个固定的x, $g(x,y)$ 是y的单调函数

(ii)*Abel*判别法:

(1) $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$关于$x$一致收敛

(2)当$y \to +\infty$时, $g(x,y)$关于x一致有界

(3) 对于每个固定的x, $g(x,y)$ 是y的单调函数

Proof (i)设$\left|\int_c^A f(x,y)dy\right| \leq M(\forall A > c, \forall x \in D)$.由$g(x,y) \rightrightarrows 0(y \to +\infty)$, 故$\forall \varepsilon > 0, \exists G > c$, 当$y > G$时, $\forall x \in D$, $|g(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

于是, $\forall A_1, A_2 > G, \forall x \in D$, 由第二积分中值定理, 存在$\xi$介于$A_1$与$A_2$之间, 使得

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)dy\right| = \left|g(x,A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)dy + g(x,A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)dy\right| < \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M = \varepsilon.$$

Proof 由题知:

$\forall \varepsilon > 0$,

$\exists G > 0$, 当$A_1, A_2 > G$时$\forall x$有$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon$成立

$\exists M > 0$, 当$y > G$时, $\forall x$有 $|g(x,y)| < M$成立

此时

那么当$A_1, A_2 > G$时都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dy\right| = \left|g(x,A_1)\int_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,dy + g(x,A_2)\int_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,dy\right| < 2M\varepsilon\ (\forall x\text{成立})$$

故由柯西收敛准则知道$Abel$判别法成立

Proposition 6.1

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy$在$x\in[\delta,+\infty)$上一致收敛$(\delta>0)$但是在$(0,+\infty)$上不一致收敛

Proof 先来证明：在$x\in[\delta,+\infty)$上一致收敛$(\delta>0)$

法一：$\forall A>0$; 有$\left|\int_0^A \sin xy dy\right| = \left|\frac{1}{x}(1-\cos xA)\right| \leqslant \frac{2}{\delta}$关于$x$是一致有界的

且考察$\frac{1}{y}$函数, 其固定一个x, 关于y是单调的, 且当$y\to+\infty$时关于x是一致趋于0的

故由狄利克雷判别法知道其是一致收敛的

法二：

我们想利用定义来判断其一致收敛性即：

$\forall\varepsilon>0,\exists G>0$, 当$A>G$时对所有的$x\in[\delta,+\infty)$有$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy\right|<\varepsilon$

考察$\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy = \int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$

因为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$该反常积分收敛则：

$\exists M>0$, 当$A_1>M$时有$\left|\int_{A_1}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du\right|<\varepsilon$

所以只要当$Ax>A\delta>A_1$即可故我们取题干中的$G=\frac{A_1}{\delta}$即可

另一方面我们来证：在$(0,+\infty)$上不一致收敛

想法是利用柯西收敛准则：

$\forall G>0$, 总有$A_1,A_2>G$, 取$x=\frac{\pi}{3A_1}$, $A_2=A_1$使得：

$$\int_{A_1}^{A_2}\frac{\sin xy}{y}dy = \int_{A_1x}^{A_2x}\frac{\sin t}{t}dt \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2$$

故不一致收敛

我们也可以利用含参变量积分的一致收敛的余项思想来证明

首先, $\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy = \int_{xA}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.而$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$收玫

故$\forall\varepsilon>0,\exists G>0$, 当$A_1>G$时, $\left|\int_{A_1}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\varepsilon$.从而, 当$A>\frac{G}{\delta}$时, $\forall x\ge\delta>0$, 有$xA>G$, 故$\left|\int_{xA}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right|<\varepsilon$.

可见, $\lim\limits_{A\to+\infty}\sup\limits_{x\ge\delta}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy\right|=0$, 即$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{y}dy$在$x\ge\delta>0$时一致收玫.

而$\sup\limits_{x>0}\left|\int_{xA}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right| \ge \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\right| = \frac{\pi}{2} \nrightarrow 0$, 故在$(0,+\infty)$上不一致收玫.

Proposition 6.2

证明积分：$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\mathrm{dx}$在关于$u\in[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$上一致收敛, 在关于$u\in(0,\delta)$上不一致收敛

(这里的a是一个已知的参数)

Proof 首先来证：关于$u\in[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$上一致收敛

利用狄利克雷判别法即可

我们主要来证：关于$u\in(0,\delta)$上不一致收敛

想法仍然是利用柯西收敛准则即：$\exists\varepsilon_0, \forall G, \exists A_1, A_2 > G, \exists u^*$使得$\left|\int_{A_1}^{A_2} \frac{x\cos u^* x}{x^2+a^2}\mathrm{dx}\right| \geqslant \varepsilon_0$

$\forall G > 0$, 取$A_2 = 3A_1$, $(A_1$足够大使得$A_1 > G)$，$u^* = \dfrac{\pi}{3A_2}$

此时就有$u^* A_2 = \dfrac{\pi}{3}$

$$\int_{A_1}^{A_2} \frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\mathrm{dx} \geqslant \frac{1}{2}\int_{A_1}^{A_2} \frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{4}\ln\frac{A_2^2+a^2}{A_1^2+a^2} > \frac{1}{4}$$

$\left(\text{上述我们取}A_2\text{与}A_1\text{的关系就是为了使得}\ln\dfrac{A_2^2+a^2}{A_1^2+a^2} > 1\text{而这是总可以通过足够大的}A_1, A_2\text{取法做到的}\right)$

Proposition 6.3

证明积分：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{dx}$在关于$u \in [\delta, +\infty)$ $(\delta > 0)$ 上一致收敛, 在关于$u \in (0, \delta)$ 上不一致收敛

(这里的a是一个已知的参数)

Proof 首先来证：关于$u \in [\delta, +\infty)$ $(\delta > 0)$ 上一致收敛

利用狄利克雷判别法即可

我们来证：

一种方法同理上一个练习即可

另一种方法：

注意到$\dfrac{\sin ux}{x} = \dfrac{x\sin ux}{x^2+a^2}\cdot\dfrac{x^2+a^2}{x^2}$

反证法：若$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\mathrm{dx}$在关于$u \in (0, \delta)$ 上一致收敛

此时考察函数$\dfrac{x^2+a^2}{x^2} = 1 + \dfrac{a^2}{x^2}$固定$u$时关于$x$单调, 且当$x \to +\infty$时关于$u$是一致有界的$\left|1 + \dfrac{a^2}{x^2}\right| \leqslant 2$

那么由$Abel$判别法知道$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x}\mathrm{dx}$也就一致收敛但是这与我们前文的结论矛盾

6.3 含参反常积分分析性质

Theorem 6.3.1 (含参反常积分 Moore-Osgood 定理)

设函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,+\infty)$ 上收玫于 g, 满足：
(a) 对任意的 $A > a$, $\{f_n\}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛;
(b) 积分 $\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ 对 n 一致收敛.
$\Longrightarrow$ 积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收玫, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

更一般的我们有如下定理
设 $E\subset\mathbb{R}$, $f(x,u)$ 定义在 $[a,+\infty)\times E$ 上, 又设 u_0(可以是 $+\infty$) 是 E 的一个极限点, 满足：
(a) 对任何 $A > a$, 等式 $\lim\limits_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} f(x,u) = g(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致地成立;
(b) $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $u\in E$ 一致收玫.
$\Longrightarrow$ 那么积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收玫, 且 $\lim\limits_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$.

Proof 在第二部分定理中取 $E = \mathbb{N}^*$, $u_0 = +\infty$, 就得到定理第一部分. 下面给出定理第二部分的证明：
由条件 (b) 知, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $A_0 > a$, 当 $A', A'' > A_0$ 时, $\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$ 对 $\forall u\in E$ 成立.$(*)$
再由条件 (a), 知 $\lim\limits_{\substack{u\to u_0\\ u\in E}} f(x,u) = g(x)$ 在 $[A',A'']$ 上一致地成立.
在不等式 $(*)$ 中令 $u\to u_0$, 即得 $\left|\int_{A'}^{A^*} g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$. 这就证明了 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收玫.
于是存在 $A_1 > a$, 使得 $\left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ 对 $u\in E$ 成立.
由条件 (a) 知, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |u-u_0| < \delta$ 时 (若 $u_0 = +\infty$, 则存在 U, 使得当 $u > U$ 时)
$|f(x,u) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3(A_1 - a)}$ 对 $[a,A_1]$ 中所有的 x 成立.
因而当 $0 < |u-u_0| < \delta$ (或 $u > U$) 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^{A_1} |f(x,u) - g(x)|\mathrm{d}x + \left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Theorem 6.3.2 (含参反常积分连续性定理 (无穷积分号与极限号换序定理))

设含参变量反常积分$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$对$u\in[\alpha,\beta]$逐点收敛

1.如果函数$f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续

2.积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上关于$u$一致收玫

那么所确定的函数$\varphi(u)$在$[\alpha,\beta]$上连续.

我们有$\lim\limits_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0)$即$\lim\limits_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)dx=\int_a^{+\infty} f(x,u_0)dx=\int_a^{+\infty}\lim\limits_{u\to u_0} f(x,u)dx$

Proof 对任意的$A>a$, $f(x,u)$在$[a,A]\times[\alpha,\beta]$上一致连续,因而对任意的$u_0\in[\alpha,\beta]$, $\lim\limits_{u\to u_0} f(x,u)=f(x,u_0)$对$x\in[a,A]$一致地成立.

又因为$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收玫,所以在上个含参反常积分$Moore-Osgood$定理中取$E=[\alpha,\beta]$

即得$\lim\limits_{u\to u_0}\varphi(u)=\lim\limits_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim\limits_{u\to u_0} f(x,u_0)\,\mathrm{d}x=\varphi(u_0)$.这就证明了$\varphi$在$[\alpha,\beta]$上连续.

Proof 法一:

我们利用函数项级数与含参变量积分的转换来看

令$u_n(x)=\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy$,其中$\{A_n\}$严格递增,且$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=+\infty$

则$u_n(x)$在I上连续,且由条件$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$,故$\varphi(x)$也在$I$上连续.

法二:

由题$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$含参变量的反常积分一致收敛意味着:

$F(A,u)=\int_a^{A} f(x,u)\,\mathrm{d}x$当$A\to+\infty$时,关于$u\in[\alpha,\beta]$是一致收敛的

那我们就可以利用前一节讲过的函数极限的一致收敛的定理(11.2.2)

即可知道φ也连续

Theorem 6.3.3 (含参反常积分 Dini 定理)

设$f(x,u)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续、非负.如果由$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$定义的$\varphi$在$[\alpha,\beta]$上连续

$\Longrightarrow$ 积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

Proof 把φ写成下面级数的和:$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(u)$

其中$a_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$.

根据f连续、非负的假定,知$a_n(u)$在$[\alpha,\beta]$上也是连续、非负的

因而由函数列级数$Dini$定理,知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(u)$在$[\alpha,\beta]$上一致收玫.

从而对任意的$\varepsilon>0$,存在N,使得不等式$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n(u)<\varepsilon$对$[\alpha,\beta]$中的所有$u$成立.

现取$A_0=a+N$.由于f非负,故当$A>A_0$时,对任意的$u\in[\alpha,\beta]$,有

$$\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\leqslant\int_{A_0}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x=\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(u)<\varepsilon.$$

这就证明了$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$在$[\alpha,\beta]$上一致收玫.

与级数的情形一样,这里的$[\alpha,\beta]$必须是有界的闭区间,否则定理将不成立.这样的例子见反例

Theorem 6.3.4 (含参反常积分可积性定理 (反常积分号与积分号换序定理))

对于$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$

1.$f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续

2. $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$在 $[\alpha,\beta]$ 上关于u一致收敛

$\Longrightarrow$ 那么在连续性定理保证下,φ在 $[\alpha,\beta]$上连续因而可积, 我们进一步有且 $\int_a^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$.

也就是说,x与u的积分次序可以交换 : $\int_a^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$.

Proof 法一 :

令$u_n(x)=\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dy$, 其中 $\{A_n\}$ 严格递增, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=+\infty$

则由条件, $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$.

于是, $\varphi(x)\in R[a,b]$, 且

$$\int_a^b dx\int_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^\infty u_n(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b u_n(x)dx$$
$$=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)dydx=\sum_{n=1}^\infty\int_{A_n}^{A_{n+1}}\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_c^{+\infty}dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

法二 :

φ在 $[\alpha,\beta]$上连续, 当然在 $[\alpha,\beta]$上可积.因为对任何$A>a$, $f(x,u)$在 $[a,A]\times[\alpha,\beta]$上连续, 故由含参常义积分有

$$\int_a^\beta\left(\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^A\left(\int_a^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

记$F(A,u)=\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x$, 那么当$A\to+\infty$时, $F(A,u)$在 $[\alpha,\beta]$上一致收玫于$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$

因而由定理11.2.2知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^\beta F(A,u)\mathrm{d}u=\int_a^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u$.

于是可得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\left(\int_a^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^\beta\left(\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.$$

Theorem 6.3.5 (双无穷区间积分号换序定理)

在很多情况下, 往往需要知道两个无穷区间的积分是否可以交换.对此, 我们有 :

设f满足下列条件 :

$(a)f$在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$上连续;

(b)积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$分别关于$u$在任何区间 $[\alpha,\beta]$上和关于x在任何区间 $[a,b]$上一致收敛;

(c)积分 $\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$, $\int_\alpha^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$中至少有一个存在.

$\Longrightarrow$ 积分 $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$, $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$都存在.且相等

即 $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u$.

Proof 为确定起见, 不妨假定 $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$存在.进而式 (5)的左边存在

要证明的便是 $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$.

由于 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$关于$u$在 $[\alpha,\beta]$上一致收敛, 故由可积性定理, 知
$\int_a^{\beta}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$
于是只需证明 $\lim\limits_{\beta\to\infty}\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$
这就需要证LHS中极限号和积分号能否换序故我们考察 $\int_a^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u$所定义的函数
记$F(\beta,x)=\int_a^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u$
由条件 (b), 知 $\lim\limits_{\beta\to\infty}F(\beta,x)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$关于$x$在任何区间 $[a,b](b>a)$上一致收敛.
因为对任意的$\beta\in[a,+\infty)$, 有$|F(\beta,x)|\leqslant\int_a^{\beta}|f(x,u)|\mathrm{d}u\leqslant\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u$
故由 $\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$存在和$Weierstrass$判别法知积分 $\int_a^{+\infty}F(\beta,x)\mathrm{d}x$关于$\beta$在 $[\alpha,+\infty)$上一致收玫.
于是由极限号与积分号换序$Moore-Osgood$定理得
$\int_a^{+\infty}F(\beta,x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x<+\infty$, 且 $\lim\limits_{\beta\to\infty}\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{\beta} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$

Corollary 6.1

在$f\geqslant 0$的情况下, 利用关于反常积分的$Dini$定理, 从上个定理可得：
设f满足下列条件：
$(a)f$在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$上连续、非负；
(b)函数$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x,\quad \psi(x)=\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}u$分别在 $[\alpha,+\infty)$和 $[a,+\infty)$上连续;
(c)积分 $\int_\alpha^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u\qquad\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$中至少有一个收玫.
$\Longrightarrow(c)$中另一个积分也收玫, 而且两者相等即 $\int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}xdu=\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}udx$

Theorem 6.3.6 (含参反常积分可微性定理 (无穷积分号与求导号换序定理))

1.如果函数 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续

2.积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收玫

3. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 有一个收敛点

那么 $\varphi(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 且 $\varphi'(u)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$.

Proof 仿照前文函数项级数的方法即可

Proposition 6.4

$$sgn(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}dt,\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(b-a),\quad (b>a>0).$$

6.4 Euler 积分

Definition 6.3 (Beta 函数)

令$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$为含参变量$p,q$的积分
称为第一类$Euler$积分，看作p和q的函数，也称之为$Beta$函数.

Proposition 6.5

$(i)B(p,q)$定义域为$p>0,q>0$并且在其上内闭一致收敛;
(ii)连续性：$B(p,q)$在其定义域上连续;
(iii)对称性：$B(p,q)=B(q,p)$;
(iv)递推公式：$B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),p>0,q>1$;
(v) $\mathrm{B}(p+1,q+1)=\dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)(p>0,q>0)$.

Proof 首先，$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^{1/2}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\xrightarrow{\text{记为}}B_1+B_2$.
可见，对积分B_1，$x=0$是瑕点，且当$x\to 0$时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}$，故只当$1-p<1$，即$p>0$时，$B_1$收敛.
对积分B_2，$x=1$是瑕点，且当$x\to 1$时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}$，故只当$1-q<1$，即$q>0$时，$B_2$收敛.
从而可知，只当$p>0$且$q>0$时，$Euler$积分$B(p,q)$收敛.因此，$Beta$函数$B(p,q)$的定义域为$p>0,q>0$.

(i)设(p_0,q_0)是定义域$(0,+\infty)^2$中任一点，则当$p\geq p_0,q\geq q_0$时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leq x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}$.
而$B(p_0,q_0)$收敛，故由$Weierstrass$判别法，$B(p,q)$在$[p_0,+\infty)\times[q_0,+\infty)$上一致收敛.

(ii)由(i)与连续性定理，$B(p,q)$在其定义域上连续.

$(iii)B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\xrightarrow{t=1-x}\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}d(1-t)=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=B(q,p)$.

(iv)由分部积分，

$$\begin{aligned}B(p,q)&=\frac{1}{p}\int_0^1(1-x)^{q-1}dx^p=-\frac{1}{p}\int_0^1 x^p d(1-x)^{q-1}=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx\\&=\frac{q-1}{p}\int_0^1\left[x^{p-1}(x-1+1)\right](1-x)^{q-2}dx\\&=\frac{q-1}{p}\left[\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx-\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\right]\\&=\frac{q-1}{p}[B(p,q-1)-B(p,q)].\end{aligned}$$

从而，$B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$.

$$(v)B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx=\arcsin\frac{x-1/2}{1/2}\Big|_0^1=\pi.$$

□

Definition 6.4 (Gamma 函数)

令$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$为含参变量$s$的积分,称为第二类$Euler$积分,看作$s$的函数,也称为$\Gamma$函数.

Proposition 6.6

(i) 定义域$s>0$

(ii)可导性:$\Gamma(s)$在其定义域上任意阶可导,且$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$;

(iii)递推公式:$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),s>0$;特别地,$\Gamma(n+1)=n!$;

$(iv)\Gamma(s)$为$(0,+\infty)$上的严格凸函数,且存在唯一的极小值点$s_0\in(1,2)$.

(v) $\Gamma(s)=+\infty$, $\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty$.

(vi) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Proof (i) 首先,$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx\xrightarrow{def}\Gamma_1+\Gamma_2$.
可见,对积分Γ_1,$x=0$是瑕点,且当$x\to 0$时,$x^{s-1}e^{-x}\sim x^{s-1}$,故只当$1-s<1$,即$s>0$时,$\Gamma_1$收敛.对积分$\Gamma_2$,当$s\in\mathbb{R}$时,$\Gamma_2$都收敛.
因此,只当$s>0$时,此$Euler$积分收敛,即$\Gamma(s)$的定义域为$s>0$.

(ii)记$f(x,s)=x^{s-1}e^{-x}$.用数学归纳法.

首先,$n=1$时,对任意的$[a,b]\subset(0,+\infty)$,当$s\in[a,b]$时,$|f_s(x,s)|=x^{s-1}e^{-x}\cdot|\ln x|\le\begin{cases}x^{a-1}e^{-x}\cdot|\ln x|, & x\in(0,1]\\ x^{b-1}e^{-x}\ln x, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$ 记为$F_1(x)$.

而取$r:1-a<r<1$,有$\dfrac{\frac{1}{x^{1-a}}e^{-x}\cdot|\ln x|}{1/x^r}\to 0\,(x\to 0^+)$,且$\dfrac{\frac{1}{x^{1-b}}e^{-x}\cdot\ln x}{1/x^2}\to 0(x\to+\infty)$

故$\int_0^{+\infty}F_1(x)dx=\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\cdot|\ln x|dx+\int_1^{+\infty}x^{b-1}e^{-x}\ln x dx$ 收敛.

从而,由 M 判别法,$\int_0^{+\infty}f_s(x,s)dx$在$[a,b]$上一致收敛.因此,$\Gamma(s)$在$s>0$上可导,且$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$.

其次,假设$\Gamma(s)$在其定义域上n阶可导,且$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$

则对任意的$[a,b]\subset(0,+\infty)$,当$s\in[a,b]$时,$\left|f_s^{(n+1)}(x,s)\right|=x^{s-1}e^{-x}\cdot|\ln x|^{n+1}\le\begin{cases}x^{a-1}e^{-x}\cdot|\ln x|^{n+1}, & x\in(0,1]\\ x^{b-1}e^{-x}(\ln x)^{n+1}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$ 记为$F(x)$.

而$\int_0^{+\infty}F(x)dx=\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\cdot|\ln x|^{n+1}dx+\int_1^{+\infty}x^{b-1}e^{-x}(\ln x)^{n+1}dx$收敛,故由M判别法,$\int_0^{+\infty}f_s^{(n+1)}(x,s)dx$在$[a,b]$上一致收敛.

从而,$\Gamma^{(n)}(s)$在其定义域上可导,即$\Gamma(s)$在其定义域上$n+1$阶可导,且$\Gamma^{(n+1)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^{n+1}dx$.

由归纳假设,$\Gamma(s)$在其定义域上任意阶可导,且$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$.

(ii)由分部积分,$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^s de^{-x}=s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx=s\Gamma(s)$.

(iii)显然,$\Gamma(s)>0$且$\Gamma''(s)>0$,所以$\Gamma(s)$为$(0,+\infty)$上正的严格凸函数.而$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$,所以存在唯一的极小值点$s_0\in(1,2)$.

(iv)易见,$\lim\limits_{s\to 0^+}\Gamma(s+1)=\Gamma(1)=1$.从而,$\lim\limits_{s\to 0^+}\Gamma(s)=\lim\limits_{s\to 0^+}\Gamma(s+1)\cdot\frac{1}{s}=+\infty$.

再由(iii),$\Gamma(s)$在$(s_0,+\infty)$上严格递增,故$\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=\lim\limits_{n\to+\infty}\Gamma(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}n!=+\infty$.

$\Gamma(s)$的定义域为$s>0$,但由递推公式,$\Gamma(s)=\dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$,等式右端在$s\in(-1,0)$上是有意义的,故可以此来定义$\Gamma(s)$在$(-1,0)$上的值.
进而,又可定义$\Gamma(s)$在$(-2,-1)$上的值.如此下去,可将$\Gamma(s)$的定义域延拓为$\mathbb{R}\backslash-\mathbb{N}$,其中$-\mathbb{N}=\{0,-1,-2,\cdots\}$. □

Corollary 6.2 (Beta 函数的拓展形式)

$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

$1.B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi;$

$2.B(p,q)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta.\left(令x=\sin^2\theta\right)$

$3.\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\mathrm{d}x\quad(p>0,q>0).\left(令x'=\frac{1}{1+x}\right)$

$4.B(s,s)=\frac{1}{2^{2s-1}}\cdot B\left(\frac{1}{2},s\right).$

Proof $B(s,s)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}dx=\frac{2}{4^{s-1}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[1-(1-2x)^2\right]^{s-1}dx=\frac{2}{4^{s-1}}\int_0^1(1-t)^{s-1}\cdot\frac{1}{4\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2^{2s-1}}\cdot B\left(\frac{1}{2},s\right).$

Corollary 6.3 (Gamma 函数拓展形式)

在应用上,Γ函数也有一些常见的变化形式.比如,

$1.令x=t^2,则\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}t^{2s-1}e^{-t^2}dt,$

$2.故\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

$3.令x=at(a>0),则\Gamma(s)=a^s\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-at}dt.$

$4.\mathit{\Gamma}\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$

$5..\mathit{\Gamma}\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{(-1)^n\,2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$

Theorem 6.4.1 (Euler 积分的联系)

$Beta$函数与Γ函数有如下关系:$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},p>0,q>0.$

Proof 因为$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}t^{2s-1}e^{-t^2}dt$,故$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}t^{2p-1}e^{-t^2}dt\cdot\int_0^{+\infty}x^{2q-1}e^{-x^2}dx.$
令$D=[0,+\infty)^2$,则

$$
\begin{aligned}
\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)&=4\iint_D\left(t^{2p-1}e^{-t^2}\right)\left(x^{2q-1}e^{-x^2}\right)dt\,dx\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}(r\cos\theta)^{2p-1}e^{-(r\cos\theta)^2}(r\sin\theta)^{2q-1}e^{-(r\sin\theta)^2}dr\,d\theta\\
&=\left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}d\theta\right]\cdot\left[2\int_0^{+\infty}r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\right]\\
&=B(p,q)\cdot\Gamma(p+q).
\end{aligned}
$$

□

Proposition 6.7

计算积分 $\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\mathrm{d}x(\alpha>-1,\beta>-1)$.

Proof 令$t=\sin^2 x$, 则有

$$\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{(\beta-1)/2}(1-t)^{(\alpha-1)/2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}.$$

故 $\int_0^{\pi/2}\cos^\alpha x\sin^\beta x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}$.

如果在上式中取$\alpha=\beta=0$, 则可得到$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Theorem 6.4.2 (余元定理)

对任意的$p\in(0,1)$, 有$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Proof 由$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=B(1-p,p)=\int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1}dt$

再令$t=\frac{1}{1+x}\Longrightarrow\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}$ (具体可见含参积分计算)

Corollary 6.4

积分 $\int_0^{\pi/2}(\tan x)^\alpha\mathrm{d}x\quad(|\alpha|<1)$.

$$\int_0^{\pi/2}(\tan x)^\alpha\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\cos^{-\alpha}x\sin^\alpha x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

利用余元公式, 得 $\int_0^{\pi/2}(\tan x)^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$

Theorem 6.4.3 (*Legendre*公式 :)

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s),s>0.$$

Proof $B(s,s)=\frac{B\left(\frac{1}{2},s\right)}{2^{2s-1}}\Longrightarrow\frac{\Gamma(s)\cdot\Gamma(s)}{\Gamma(2s)}=\frac{1}{2^{2s-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)}$.

从而, $\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)=\frac{1}{2^{2s-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s)$. □

6.5 含参积分计算

✍ **练习 6.4** 计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx (a>0)$.

Proof 把b看做参数, 记上面的积分为$I(b)$.
先证明$I'(b)=-\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx dx$对任意的$b\in(-\infty,+\infty)$成立.(*)
事实上, 由于$\left|xe^{-ax^2}\sin bx\right|\leqslant xe^{-ax^2}$, 而$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}dx$收敛, 故由Weierstrass判别法, 知积分对$b\in(-\infty,+\infty)$一致收敛.
因而式(*)成立.用分部积分法, 容易算出$I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)$.由此得$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+c$, 或者$I(b)=c'e^{-b^2/(4a)}$.
已知$I(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$, 所以$I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/(4a)}$. □

✍ **练习 6.5** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$

Proof 令$x^4=t$那么有$LHS=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-3/4}}{1+t}dt=\frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\xlongequal{\text{余元公式}}\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

✍ **练习 6.6** $\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx$

Proof 设$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx$
(1) 当$|a|<1$时, $1-2a\cos x+a^2\geq 1-2|a|+a^2>0\Longrightarrow\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)$连续且有连续导数

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}dx\xlongequal{t=\tan x/2}4\int_0^{+\infty}\frac{(1+a)t^2+a-1}{\left[(1-a)^2+(1+a)t^2\right]\left(1+t^2\right)}dt$$
$$=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)^2+(1+a)t^2}\right]dt$$
$$=\frac{2}{a}\left[\arctan t-\arctan\frac{1+a}{1-a}t\right]_0^{+\infty}=\frac{2}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]=0$$

$\therefore$ 当$|a|<1$时, $I(a)=C$, $\because I(0)=0$, $\therefore I(a)=0$

(2) 当$|a|>1$时, 令$b=\frac{1}{a}$, 则$|b|<1$, $\therefore I(b)=0$.

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)dx=I(b)-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|$$

(3) 当$a=1$时, $I(1)=\int_0^{\pi}\ln2(1-\cos x)dx=\int_0^{\pi}\left(\ln4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)dx=2\pi\ln2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=2\pi\ln2-4\left(\frac{\pi}{2}\ln2\right)=0$

(4) 当$a=-1$时, $I(-1)=\int_0^{\pi}\ln2(1+\cos x)dx=\int_0^{\pi}\left(\ln4+2\ln\cos\frac{x}{2}\right)dx=0$

$$\therefore\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx=\begin{cases}0, & |a|\leq1\\ 2\pi\ln|a|, & |a|>1\end{cases}\quad\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx$$

Theorem 6.5.1 (狄利克雷积分)

计算下列积分：

(1)$J=\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx(p>0,b>a)$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$;

Proof (1)首先，$\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b \cos xydy$.再由 $|e^{-px}\cdot\cos xy|\le e^{-px}$

且 $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx$收玫可知 $\int_0^{+\infty} e^{-px}\cdot\cos xydx$关于$y$在 $[a,b]$上一致收玫.

于是

$$J=\int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_a^b \cos xydy\right)dx=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xydx\right)dy$$

$$=\int_a^b\left[e^{-px}\cdot\frac{y\sin xy-p\cos xy}{p^2+y^2}\right]\Bigg|_0^{+\infty}dy=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}dy=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

(2)在 (1)中令$a=0,b=1$,则当$p>0$时，$\int_0^{+\infty} e^{-px\frac{\sin x}{x}}dx=\arctan\frac{1}{p}$.

记$\varphi(p)=\int_0^{+\infty} e^{-px\frac{\sin x}{x}}dx(p\ge 0)$.由$\varphi(p)$在$p\ge 0$上连续.于是，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{p\to 0^+}\varphi(p)=\lim_{p\to 0^+}\arctan\frac{1}{p}=\frac{\pi}{2}$.

(2) 狄利克雷积分收敛性的说明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

考虑$f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\int_0^x \sin t\mathrm{d}t$.显然当$x\to+\infty$时$f$递减趋于零.由于$\left|\int_0^x \sin t\mathrm{d}t\right|\le\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=2$.

故g有界.由$Dirichlet$判别法可知原积分收敛.

注意到$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right)$.同理可证 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$收玫.而 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$发散.因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散.

由比较判别法可知 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$也发散.这就说明$Dirichlet$积分条件收玫.

Corollary 6.5

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}dt=\frac{\pi}{2}sgn(x)$$

Proof $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}dt \xlongequal{xt=sgn(x)\cdot u} sgn(x)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=sgn(x)$,

Proposition 6.8

计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x(0<p<1)$.

1. $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin p\pi}$
2. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x\,(\alpha>1)=\frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}$

Proof 因为$x=0$是瑕点，可把积分写成两部分：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=I_1+I_2.$$

对积分I_1,因为$0<x<1$,故有展开式$\frac{x^{p-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}$.

这个级数在 $(0,1)$中的任何闭区间上一致收玫.

我们现在$I_1=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}\right)\mathrm{d}x$我们希望积分号与无穷求和号能够换序

但很不幸,我们有的仅仅是$(0,1)$上的一致收敛性,下面我们将利用含参变量反常积分的$Moore-Osgood$定理给出换序

我们记$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}$的部分和为$f_n$,那么$\{f_n\}=$在$(0,1)$中的任何闭区间上一致收敛到$\frac{x^{p-1}}{1+x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}.\right)$

由于$0\leqslant f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{k+p-1}=\frac{x^{p-1}\left(1-(-1)^n x^n\right)}{1+x}\leqslant 2\frac{x^{p-1}}{1+x}\leqslant 2x^{p-1}$

而$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x$收敛,故$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$关于$n$一致收敛.

于是由定理含参变量反常积分的$Moore-Osgood$定理知$I_1=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+p-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}.$

$\left(\text{事实上我们由勒贝格控制收敛定理知道}: f_n\to\frac{x^{p-1}}{1+x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1}\right)\text{此时我们给出了控制函数} f_n(x)\leqslant 2x^{p-1}\right)$

对积分I_2,作变换$x=1/t$,即得

$$I_2=\int_0^1\frac{t^{-p}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{(1-p)-1}}{1+t}\mathrm{d}t\xlongequal{(\text{再次利用}I_1\text{的形式})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}$$

Note 1.把$f(x)=\cos ax(a\notin Z)$在$[-\pi,\pi]$上展开为$Fourier$级数.

2.$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\quad(a\notin \mathrm{Z}).$

Proof 把f延拓为整个数轴上的以2π为周期的函数.记延拓后的函数为$\tilde{f}$,那么$\tilde{f}$是$(-\infty,+\infty)$上的周期为2π的连续偶函数.因此

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x+\cos(a+n)x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}+\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right)\\&=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2}\quad(n=0,1,2,\cdots),\end{aligned}$$

$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots).$

由$Dini$判别法,即得$\tilde{f}$的$Fourier$展开式为$\tilde{f}(x)=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right).$

限制在$[-\pi,\pi]$上,就得

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right).\quad x\in[-\pi,\pi]$$

如果在上式中取$x=0$,可得$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\quad(a\notin\mathrm{Z}).$

第 7 章 多重积分学

7.1 重积分

Theorem 7.1.1 (二重积分计算方法)

设函数$f(x,y)$在X型区域$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$上可积,其中$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$都在$[a,b]$上连续.

若对每个$x\in[a,b]$,积分值$A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$都存在

则$A(x)$在$[a,b]$上可积,且$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$

同理有如下

设函数$f(x,y)$在Y型区域$D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),c\le y\le d\}$上可积,其中$\psi_1(x)$和$\psi_2(x)$都在$[a,b]$上连续.

若对每个$y\in[c,d]$,积分值$B(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$都存在

则$B(y)$在$[c,d]$上可积,且$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d B(y)dy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$

其中等式右端的积分称为先对x再对y的累次(或二次)积分,通常也记为$\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

Proof (1)先证$D=[a,b]\times[c,d]$的情形,即$A(x)=\int_c^d f(x,y)dy$在$[a,b]$上可积,且$\int_a^b A(x)dx=\iint_D f(x,y)d\sigma$.

对$[a,b]$作任意的分割$:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,并对$[c,d]$作任意的分割$:c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$.

记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\Delta y_j=y_j-y_{j-1}(1\le i\le n,1\le j\le m)$.令$D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$

则$D_{ij}(1\le i\le n,1\le j\le m)$构成了$D$的一个分割,记为$T$.令$m_{ij}=\inf\limits_{(x,y)\in D_{ij}}\{f(x,y)\},M_{ij}=\sup\limits_{(x,y)\in D_{ij}}\{f(x,y)\}$.

任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,则$\sum\limits_{i=1}^n A(\xi_i)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^n\left(\int_c^d f(\xi_i,y)\,dy\right)\Delta x_i=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^m\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy\right)\Delta x_i$

于是,$s(T)=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^n A(\xi_i)\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j\Delta x_i=S(T)$.

记$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\},\mu=\max_{1\le j\le m}\{\Delta y_j\}$.易见,$\|T\|\to0\iff\lambda\to0$且$\mu\to0$.

现令$\|T\|\to0$,则由f在D上可积以及可积的充要条件,$\lim\limits_{\|T\|\to0}S(T)=\lim\limits_{\|T\|\to0}s(T)=\iint_D f(x,y)d\sigma$.

从而,由迫敛性可知$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^n A(\xi_i)\Delta x_i=\iint_D f(x,y)d\sigma$,即$A(x)$在$[a,b]$上可积,且$\int_a^b A(x)dx=\iint_D f(x,y)d\sigma$.

(2)再证$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$的一般情形.

因为$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$在$[a,b]$上连续,故可设$c=\min_{x\in[a,b]}\varphi_1(x),d=\max_{x\in[a,b]}\varphi_2(x)$.

再令$D_1=[a,b]\times[c,d]$以及$F(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in D_1\backslash D,\end{cases}$

因f在D上可积,故F在D_1上也可积,且$x\in[a,b]$,积分$A_1(x)=\int_c^d F(x,y)dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F(x,y)dy=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy=A(x)$都存在.

从而,根据(1)的情形,$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1}F(x,y)d\sigma=\int_a^b A_1(x)dx=\int_a^b A(x)dx$.

Theorem 7.1.2 (二重积分换元定理)

设Δ和D分别是uOv平面和xOy平面上由分段光滑曲线所围成的有界闭区域, $f(x,y)$在D上可积.
设变换T是由$T:\Delta\to D\quad T(u,v)=(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ 式给出的双射, 满足φ和ψ在Δ上具有一阶连续偏导
且$Jacobi$行列式$J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$
则成立二重积分的换元公式 $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv$
特别地, 区域D的面积$S(D)=\iint_D dxdy=\iint_\Delta |J(u,v)|dudv$.

练习 7.1 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中D是由圆周$x^2+y^2=a^2$所围成的区域.

Proof 令$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$, 则对应于区域$D$, $\Delta=\{(\rho,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le a\}$.
这样, $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint_\Delta e^{-\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)d\theta=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$.

Proposition 7.1

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Proof 事实上, 设
$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le R, 0\le y\le R\}$,
$D_1=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$,
$D_2=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2R^2, x\ge 0, y\ge 0\right\}$,
则$D_1\subset D\subset D_2$, 从而$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)=\iint_{D_1}e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy\le\iint_{D_2}e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$.
而$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^R e^{-x^2}dx\cdot\int_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$. 因此, $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)\le\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2\le\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$.
令$R\to+\infty$, 即得 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Theorem 7.1.3

三重积分换元法的基本想法与定积分、二重积分的换元法完全类似, 简述如下.
为求三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv$, 可令 $\begin{cases}x=\varphi(u,v,w)\\ y=\psi(u,v,w)\\ z=\phi(u,v,w)\end{cases}$. 当 (x,y,z)取遍区域Ω时, (u,v,w)相应地取遍区域Ω_1.
这里的换元同样可看作是从Ω_1到Ω的一个坐标变换 T, 即$T:\Omega_1\longrightarrow\Omega,\quad T(u,v,w)=(x,y,z)=(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\phi(u,v,w))$
其中要求变换T是一一映射, 且$\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)$和$\phi(u,v,w)$在$\Omega_1$上都具有连续的偏导数.
这样, 在积分换元时, 只要将x,y和z分别换成$\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)$和$\phi(u,v,w)$, 积分区域$\Omega$对应地换成$\Omega_1$
但同样要注意的是, 这时, 体积元素$dxdydz$或dv要换成$|J(u,v,w)|dudvdw$, 其中$J(u,v,w)=\dfrac{\partial(\varphi,\psi,\phi)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$是变换$T$的$Jacobi$行列式.
这样, $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Omega_1}f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\phi(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw$.

Proposition 7.2

(1)柱面坐标.设$M=(x,y,z)$为空间任一点, 点M在xOy平面上的投影P的极坐标记为 (ρ,θ)
这样三元有序数组 (ρ,θ,z)也可确定点M, 称之为点M的柱面坐标, 简称柱坐标, 其中$\rho>0, 0\le\theta\le 2\pi, z\in\mathbb{R}$.

易见,点M的直角坐标(x,y,z)与其柱坐标(ρ,θ,z)之间的相互变换为$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=z. \end{cases}$

$Jacobi$行列式为$J(\rho,\theta,z)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho$

(2) 球面坐标.设$M=(x,y,z)$为空间任一点,点M到原点O的距离为r,点M在xOy平面上的投影为P,设向量$\overrightarrow{OM}$与z轴正向的夹角为φ
x轴逆时针转到向量$\overrightarrow{OP}$的夹角为θ.这样三元有序数组(r,φ,θ)也可确定点M,称为点M的球面坐标,简称球坐标

其中$r\ge 0, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi$.易见,点$M$的直角坐标$(x,y,z)$与其球坐标$(r,\varphi,\theta)$之间的相互变换为$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi. \end{cases}$

容易计算球坐标变换的$Jacobi$行列式为$J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\varphi$

Theorem 7.1.4

二重积分:

1.极坐标坐标换元$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}\Longrightarrow |J|=r$

2.广义极坐标换元$\begin{cases} x=ar(\theta)\cos\theta \\ y=br(\theta)\sin\theta \end{cases}\Longrightarrow |J|=abr$

三重积分:

1.柱面坐标换元$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \\ z=z \end{cases}\Longrightarrow |J|=r$

2.广义柱面坐标换元$\begin{cases} x=ar(\theta)\cos\theta \\ y=br(\theta)\sin\theta \\ z=z \end{cases}\Longrightarrow |J|=abr$

3.球面坐标换元$\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\varphi \end{cases}\Longrightarrow |J|=r^2\sin\varphi$

4.广义球面坐标换元$\begin{cases} x=ar\cos\theta\sin\varphi \\ y=br\sin\theta\sin\varphi \\ z=cr\cos\varphi \end{cases}\Longrightarrow |J|=abcr^2\sin\varphi$

7.2 曲线曲面积分

Theorem 7.2.1 (第一类曲线积分)

设L是由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 给出的平面光滑曲线且$\varphi(t)$与$\psi(t)\in C^1_{[\alpha,\beta]}$, 且$\varphi'(t)$与$\psi'(t)$不同时为0

若$f(x,y)$在L上连续, 则$f(x,y)$在曲线L上可积, 且$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$

若平面曲线L是由函数$y=g(x)(a\le x\le b)$给出, 则即为$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}dx.$

若平面曲线L是由函数$r=r(\theta)$给出, 则$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r'^2+r^2}d\theta$

下面讨论曲面积分

在定积分的应用中, 我们利用微元法可将平面曲线的弧长转化为定积分.现在, 同样利用微元法可将空间曲面的面积转化为二重积分.

设曲面Σ是由如下参数方程给出, $\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in D, \\ z=z(u,v), \end{cases}$ 即$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$,

其中D是uOv坐标平面上的有界闭区域.这可以看作是一个映射$T:D\longrightarrow\Sigma\subset\mathbb{R}^3,\quad T(u,v)=(x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

若T是双射, 则称曲面Σ是一张简单曲面.

如果x,y,z对u,v具有连续的各个偏导数, 向量$\overrightarrow{r_u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$与$\overrightarrow{r_v}=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$线性无关, 即$\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_u}\neq 0$, 则称曲面$\Sigma$是光滑的.

光滑简单曲面的面积一定是可求的.下面, 我们只考虑光滑简单曲面的面积.

首先, 我们解释一下向量$\overrightarrow{r_u}$和$\overrightarrow{r_v}$的几何意义.设$P=(u_0,v_0)\in D$为D中任一点, 在映射T下对应于曲面Σ上的点$Q=(x_0,y_0,z_0)$

即$x_0=x(u_0,v_0), y_0=y(u_0,v_0), z_0=z(u_0,v_0)$.在$D$中过点$P$且平行于$u$轴和$v$轴的直线段可以分别简记为$(u,v_0)$和$(u_0,v)$

这两条直线段在映射T下对应到曲面Σ上, 是两条曲线, 分别称之为过点Q的$u-$曲线和$v-$曲线, 即

u − 曲线 : $\vec{r}(u,v_0)=(x(u,v_0),y(u,v_0),z(u,v_0))$;

v − 曲线 : $\vec{r}(u_0,v)=(x(u_0,v),y(u_0,v),z(u_0,v))$.

因此, $\vec{r}_u(u_0,v_0)$和$\overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)$分别表示$u-$曲线和$v-$曲线在点$Q$的切向量.

而它们的外积$\overrightarrow{r_u}(u_0,v_0)\times\overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)$恰好表示曲面$\Sigma$在点$Q$的法向量

其模长$\left|\vec{r}_u(u_0,v_0)\times\overrightarrow{r_v}(u_0,v_0)\right|$就是曲面$\Sigma$在点$Q$的切平面上以$\vec{r}_u(u_0,v_0)$和$\vec{r}_v(u_0,v_0)$为边的平行四边形的面积.

可见, 曲面Σ在点Q的单位法向量$\vec{n}$为$\vec{n}=\pm\frac{\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}}{\left|\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}\right|}$

现在利用微元法来计算曲面Σ的面积S.设Σ是由参数方程给出的简单光滑曲面.设Σ在xOy平面上的投影为D_{xy}, 并不妨设投影为双射.

将Σ作任意分割T, 分成n块$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$, 等价地, 对D_{xy}作任意分割T_1, 对应地分成n块$D_1,\cdots,D_n$,

记Σ_i和D_i的面积分别为ΔS_i和$\Delta\sigma_i$.任取$P_i\in\Sigma_i$, 对应地, 即取$Q_i\in D_{xy}$

记$\vec{N}_i=\vec{r}_u\times\vec{r}_v|_{P_i}=\left.\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|_{Q_i}$ 为P_i处的法向量, $\vec{N}_i$与z轴正向夹角γ_i

$$\gamma_i=\frac{\vec{N}_i\cdot\vec{j}}{\left|\vec{N}_i\right|}|_{P_i}=\frac{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$$

在P_i处, 取切平面片π_i, 使得π_i在xoy平面上的投影也为D_i.

记π_i的面积为ΔA_i, 则$\Delta S_i\approx\Delta A_i=\frac{\Delta\sigma_i}{|\cos\gamma_i|}=\left.\frac{\left|\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}\right|}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}\right|_{Q_i}\cdot\Delta\sigma_i.$

记分割T_1的模为$\|T_1\|$,则$S=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\lim_{\|T_1\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\left|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right|}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}\right|_{Q_i}\cdot\Delta\sigma_i=\iint_{D_{xy}}\frac{\left|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right|}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}dxdy=\iint_D\left|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right|dudv$

记$dS=\left|\vec{r_u}(u,v)\times\vec{r_v}(u,v)\right|dudv$,称之为曲面的面积微元.这样$S=\iint_D dS$.

又由$Lagrange$恒等式$\left|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right|^2=\left(\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right)\cdot\left(\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right)=\begin{vmatrix}\vec{r_u}\cdot\vec{r_u} & \vec{r_u}\cdot\vec{r_v}\\ \vec{r_v}\cdot\vec{r_u} & \vec{r_v}\cdot\vec{r_v}\end{vmatrix}$.

记

Theorem 7.2.2 (曲面微元与曲面面积)

1.记$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}$

$E=\vec{r_u}\cdot\vec{r_u}=x_u^2+y_u^2+z_u^2$

$F=\vec{r_u}\cdot\vec{r_v}=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$

$G=\vec{r_v}\cdot\vec{r_v}=x_v^2+y_v^2+z_v^2$

则$\left|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right|=\sqrt{EG-F^2}$.通常称$E,F$和$G$为曲面$\Sigma$的$Gauss$系数,从而曲面$\Sigma$的面积微元和面积为

$dS=\sqrt{EG-F^2}dudv \qquad dS=\left|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right|dudv$

$S=\iint_D dS=\iint_D\sqrt{EG-F^2}dudv=\iint_D|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv$

2.设光滑简单曲面Σ由二元函数$z=f(x,y),(x,y)\in D$给出,则Σ的面积公式为

$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy=\iint_D\frac{1}{|\cos\gamma|}dxdy$其中$\gamma$是曲面上任一点处单位法向量与$z$轴的夹角.

3.设光滑简单曲面Σ由方程$H(x,y,z)=0$给出,函数$H(x,y,z)$具有连续的各个偏导数,且$H_z\neq 0$

曲面Σ在xOy坐标平面上的投影记为D,如果该投影将曲面Σ上的点对应于D中的点

则Σ的面积为$S=\iint_D\frac{|\nabla H|}{|H_z|}dxdy$

Proof 这时,曲面Σ为$\vec{r}=(x,y,f(x,y))$.于是$\vec{r}_x=(1,0,f_x(x,y)),\vec{r}_y=(0,1,f_y(x,y))$,故

$E=\vec{r}_x\cdot\vec{r}_x=1+f_x^2(x,y),\quad F=\vec{r}_x\cdot\vec{r}_y=f_x(x,y)f_y(x,y),\quad G=\vec{r}_y\cdot\vec{r}_y=1+f_y^2(x,y),$

$\vec{N}=\vec{r}_x\times\vec{r}_y=\left(f_x,f_y,-1\right),\quad |\cos\gamma|=\left|\frac{\vec{N}\bullet\vec{j}}{|\vec{N}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$

因此,即得曲面Σ的面积为$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}dxdy=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy=\iint_D\frac{1}{|\cos\gamma|}dxdy$

Proof 这时,设方程$H(x,y,z)=0$确定的函数为$z=f(x,y)$,则$f_x=-\frac{H_x}{H_z},\quad f_y=-\frac{H_y}{H_z}$.

因此,由即得曲面Σ的面积为$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}dxdy=\iint_D\frac{\sqrt{H_x^2+H_y^2+H_z^2}}{|H_z|}dxdy=\iint_D\frac{|\mathrm{grad}H|}{|H_z|}dxdy.$

Theorem 7.2.3 (第一类曲面积分)

1.设简单光滑曲面Σ由参数方程$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), (u,v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$ 即$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, 给出

若$f(x,y,z)$在Σ上连续, 则$f(x,y,z)$在曲面Σ上可积, 且$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$.

2.若曲面Σ是由函数$z = z(x,y), (x,y) \in D$给出, 则公式即为$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$.
类似地, 若曲面Σ是由函数$x = x(y,z)$或$y = y(z,x)$给出, 也有类似的公式.

Definition 7.1 (第二类曲线积分)

设$L:\vec{r}=\vec{r}(t)$是xOy平面上一条从A到B的具有长度的有向曲线, $\vec{f}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$是$L$上的向量值函数.
对曲线L沿其方向作任意分割T, 分成n个具有长度的小弧段$L_i=\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(1\le i\le n)$, 其中$M_0=A, M_n=B$.
设$M_i=(x_i,y_i)$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$. L_i的长度记为Δs_i, 且令$\|T\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$.
在每小弧段L_i上任取一点$A_i=(\xi_i,\eta_i)$, 并作和式$S_T(A_i)=\sum_{i=1}^{n}\vec{f}(\xi_i,\eta_i)\bullet\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$.
若当$\|T\|\to 0$时, 此和式极限存在, 且与对L沿其方向的分割T及点$A_i=(\xi_i,\eta_i)$的取法都无关
则称向量值函数$\vec{f}(x,y)$在有向曲线L上可积, 并称此极限为函数$\vec{f}(x,y)$在L上的第二类曲线积分或对坐标的曲线积分
记为$\int_L \vec{f}\bullet d\vec{r}$, 或$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, 或$\int_L Pdx+Qdy$,
即$\int_L \vec{f}\bullet d\vec{r}=\int_L Pdx+Qdy=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{f}(\xi_i,\eta_i)\bullet\vec{M}_{i-1}M_i=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$
其中$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$称为有向曲线微元, 而$\vec{f}$或$P,Q$称为被积函数, L称为积分路径

设平面有向光滑曲线L是由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t:a\to b$ 给出
其中$t:a\to b$表示参数t从a变到b, 这就确定了曲线L的方向, 这里a未必小于b.
这时, $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}=\varphi'(t)dt\vec{i}+\psi'(t)d\vec{j}$.

Theorem 7.2.4 (第二类曲线积分)

1.设平面有向光滑曲线L是由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t:a\to b$ 给出设有向光滑曲线
若向量值函数$\vec{f}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$在$L$上连续, 则$\vec{f}(x,y)$在曲线$L$上第二类可积
且$\int_L \vec{f}\bullet d\vec{r}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt$

2.若平面曲线L是由函数$y=g(x)$给出, 则公式即为
$$\int_L \vec{f}\bullet d\vec{r}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b[P(x,g(x))+Q(x,g(x))g'(x)]dx$$
其中下限a对应于曲线L的起点, 上限b对应于曲线L的终点.
特别地, 若$y=y_0$, 则$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b P(x,y_0)\,dx$,
类似地, 若平面曲线L是由函数$x=h(y)$给出, 则公式即为
$$\int_L \vec{f}\bullet d\vec{r}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d[P(h(y),y)h'(y)+Q(h(y),y)]dy$$
其中下限c对应于曲线L的起点, 上限d对应于曲线L的终点.
特别地, 若$x=x_0$, 则$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d Q(x_0,y)\,dy$

Note 设平面有向光滑曲线L由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}(t:a\to b)$, 即$\vec{r}(t)=(\varphi(t),\psi(t))$给出
其起点A和终点B分别对应参数$t=a$和$t=b$.不妨设$a<b$, 若向量值函数$\vec{f}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$在$L$上连续
则由中第二类曲线积分的计算公式
$$\int_L \vec{f}\bullet d\vec{r}=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt.$$
而L上点$M=(\varphi(t),\psi(t))$处的一个单位切向量为$\vec{\tau}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=\left(\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta)$

其方向是参数t增长曲线上点的运动方向 (注意这里$a < b$, 故与L的方向一致.若$a > b$, 则与L方向相反).

从而
$$\int_L \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \cos\alpha + Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \cos\beta]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$
于是由定理中第一类曲线积分的计算公式可得两类曲线积分的关系：
$$\int_L \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy = \int_L [P(x, y) \cdot \cos\alpha + Q(x, y) \cdot \cos\beta]ds = \int_L \vec{f} \bullet \vec{\tau}ds = \int_L Prj_{\vec{\tau}}\vec{f}ds$$
其中α和β是L上点$M = (x, y)$处的单位切向量$\vec{\tau}$的方向角.

进一步, 可以看出有向曲线微元$d\vec{r}$的意义, 即

$d\vec{r} = \vec{\tau}ds = \vec{\tau}\,|\vec{r}'(t)|\,dt = \vec{r}'(t)dt$

即是曲线L作为向量值函数$\vec{r}(t)$的微分.同理, 空间有向曲线L上两类曲线积分也有类似的关系
$$\int_L \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L [P(x, y, z) \cdot \cos\alpha + Q(x, y, z) \cdot \cos\beta + R(x, y, z) \cdot \cos\gamma]ds = \int_L \vec{f} \bullet \vec{\tau}ds = \int_L \mathrm{P}_{\vec{\tau}}\vec{f}ds,$$
其中α, β, γ是有向曲线L上点$M = (x, y, z)$处的单位切向量$\vec{\tau}$的方向角.

Corollary 7.1 (第一类与第二类曲线积分联系)

$$\int_L \vec{f} \bullet d\vec{r} = \int_L Pdx + Qdy = \int_L [P(x, y) \cdot \cos\alpha + Q(x, y) \cdot \cos\beta]ds = \int_L \vec{f} \bullet \vec{\tau}ds = \int_L Prj_{\vec{\tau}}\vec{f}ds$$
其中α和β是L上点$M = (x, y)$处的单位切向量$\vec{\tau}$的方向角.

进一步, 可以看出有向曲线微元$d\vec{r}$的意义, 即

$d\vec{r} = \vec{\tau}ds = \vec{\tau}\,|\vec{r}'(t)|\,dt = \vec{r}'(t)dt$

Definition 7.2 (单双侧曲面)

设Σ是一张光滑曲面, P为Σ上任一点, Γ是经过点P且不越过曲面边界的任一条封闭曲线.
取定曲面Σ上点P处的一个单位法向量$\vec{n}$, 让$\vec{n}$沿着封闭曲线Γ连续移动, 且与Γ上所过之点处的单位法向量相合,
那么当$\vec{n}$回到点P时, 如果它的指向仍与原来的方向相同, 则称Σ是一张双侧曲面, 否则, 称为单侧曲面.

Note 设双侧曲面Σ由如下参数方程给出, $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D_{uv}, \\ z = z(u,v), \end{cases}$ 即$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
其中D_{uv}是uOv坐标平面上具有分段光滑边界的区域, 那么曲面的单位法向量$\vec{n}$可表示为
$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \pm\frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right),$$

Note 两类曲面积分的关系设Σ是一定向曲面, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为$\Sigma$上任一点$(x,y,z)$处指定的单位法向量.
设向量值函数$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$在定向曲面$\Sigma$上可积.
对Σ作任意分割T, 分成n块小曲面$\Sigma_i (1 \le i \le n)$, 记Σ_i的面积为ΔS_i.Σ_i在xy平面上的投影记为$(\Sigma_i)_{xy}$, 其有向投影面积记为$(\Delta S_i)_{xy}$.
由曲面的面积公式(32), $\Delta S_i = \iint_{(\Sigma_i)_{xy}} \frac{1}{|\cos\gamma|} dxdy$.
由二重积分的中值定理, 存在点$(\xi_i^*, \eta_i^*) \in (\Sigma_i)_{xy}$, 即存在点$(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*) \in \Sigma_i$, 使得$\Delta S_i = \frac{1}{\cos\gamma_i^*}(\Delta S_i)_{xy}$
其中γ_i^*是该点的单位法向量$\vec{n}_i$与z轴正向的夹角.而$\vec{f}$在Σ上可积, 故由可证
$$\iint_\Sigma R dxdy = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^n \left[R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i^*\right]\Delta S_i = \iint_\Sigma R(x,y,z)\cos\gamma dS.$$
同理可证 $\iint_\Sigma P dxdy = \iint_\Sigma P(x,y,z)\cos\alpha dS$且 $\iint_\Sigma Q dxdy = \iint_\Sigma Q(x,y,z)\cos\beta dS$.
因此,
$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \vec{f} \bullet \vec{S} &= \iint_\Sigma P dydz + Q dzdx + R dxdy \\ &= \iint_\Sigma [P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta + R \cdot \cos\gamma] dS = \iint_\Sigma \vec{f} \bullet \vec{n} dS = \iint_\Sigma Prj_{\vec{n}} \vec{f} dS \end{aligned}$$
这就是两类曲面积分之间的关系.由此, 也可以看出有向曲面微元$\overrightarrow{dS} = (dydz, dzdx, dxdy)$的意义, 即$\overrightarrow{dS} = \vec{n} dS$

Theorem 7.2.5

定向简单光滑曲面Σ由参数方程$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$，$(u,v) \in D_{uv}$，即$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$给出
其中D_{uv}是uOv坐标平面上具有分段光滑边界的有界区域

记$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$
则曲面的单位法向量$\vec{n}$可表为$\vec{n} = \pm\dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \pm\dfrac{\vec{r_u}\times\vec{r_v}}{|\vec{r_u}\times\vec{r_v}|} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
其中α, β, γ为$\vec{n}$的方向角.

设函数$P(x,y,z), Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在Σ上连续.
于是, 由两类曲面积分的关系式以及定理中第一类曲面积分的计算公式即得
$$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_\Sigma \vec{f}\bullet\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{f}\bullet\vec{n}dS = \pm\iint_{D_{uv}} \vec{f}\bullet\vec{N}dudv$$
$$= \pm\iint_{D_{uv}} \left[P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(\cdots)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(\cdots)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]dudv,$$
其中符号$\pm$的选取由式中法向量的符号 (即曲面的定向) 来决定.
特别地, 若$P = Q = 0$, 则 $\displaystyle\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{uv}} R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$

定向简单光滑曲面Σ的方程为$z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$, 即$\vec{r} = (x, y, z(x,y))$, 其中$D_{xy}$是$\Sigma$在$xOy$平面上的投影
则有参数表达式$\vec{r} = \vec{r}(x,y) = (x, y, z(x,y))$ 其中参数 $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x,y) \end{cases}$

$\vec{N} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-z_x, -z_y, 1)$
$\vec{n} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)$.
于是, $\displaystyle\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint_{D_{xy}} [-z_xP(x,y,z(x,y)) - z_yQ(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))]dxdy,$

若曲面方程为$F(x,y,z) = 0 \Longrightarrow \nabla F = (F_x, F_y, F_z)$
此时$z_x = -\dfrac{F_x}{F_z} \quad z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$
$\Longrightarrow \vec{N} = (-z_x, -z_y, 1) = \left(-\dfrac{F_x}{F_z}, \ -\dfrac{F_y}{F_z}, \ 1\right)$
于是, $\displaystyle\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint_{D_{xy}} \left[-\frac{F_x}{F_z}\cdot P(x,y,z(x,y)) - \frac{F_y}{F_z}\cdot Q(x,y,z(x,y)) + 1\cdot R(x,y,z(x,y))\right]dxdy$

7.3 Green、Gauss、Stokes 公式

Theorem 7.3.1 (Green 公式)

设D为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的单连通闭区域(或者为有限个洞的复连通区域)

如果函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有连续偏导数,那么

$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\partial D$取正向,即诱导定向.

注 设$f(x)$在 $[a,b]$上具有连续导数,令$D=[a,b]\times[0,1]$.在$Green$公式中取$P=0,Q=f(x)$,就得

$\iint_D f'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\partial D} f(x)\mathrm{d}y$

利用化累次积分的方法就知道,等式左边就是 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x.$

而等式右边等于 $\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} f(x)\mathrm{d}y = \int_{BC} + \iint_{DA} f(x)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(b)\mathrm{d}y + \int_1^0 f(a)\mathrm{d}y = f(b) - f(a)$

这就得到$Newton-Leibniz$公式 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$

Proposition 7.3

记取诱导定向的∂D上的单位切向量为$\boldsymbol{\tau}$,单位外法向量为$\boldsymbol{n}$

那么显然 $\cos(\boldsymbol{n},y) = -\cos(\boldsymbol{\tau},x), \quad \cos(\boldsymbol{n},x) = \sin(\boldsymbol{\tau},x).$

因此得到$Green$公式的另一种常用表示形式

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\partial D} F\mathrm{d}y - G\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial D} [F\sin(\boldsymbol{\tau},x) - G\cos(\boldsymbol{\tau},x)]\mathrm{d}s \\ &= \int_{\partial D} [F\cos(\boldsymbol{n},x) + G\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} [F\cos(\boldsymbol{n},x) + G\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s.$$

这个形式便于记忆和推广.

Proposition 7.4

事实上,在$Green$公式中分别取 $(1)P=0,Q=x;(2)P=-y,Q=0;(3)P=-y,Q=x$

可得区域D的面积为$S = \iint_D dxdy = \oint_{\partial D} xdy = -\oint_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} xdy - ydx.$

Definition 7.3

设D为平面区域, $P(x,y),Q(x,y)$为D上的连续函数.

如果对于D内任意两点A,B,积分值$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$只与$A,B$两点有关,而与从$A$到$B$的路径$L$(这里只考虑光滑或分段光滑曲线)无关

称曲线积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$与路径无关.否则称为与路径有关.

Theorem 7.3.2 (Green 定理)

设D为平面上的单连通区域, $P(x,y),Q(x,y)$在D上具有连续偏导数.则下面的四个命题等价:

(1)对于D内的任意一条光滑(或分段光滑)闭曲线L, $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$

(2)曲线积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$与路径无关

(4) 存在D上的可微函数$U(x,y)$,使得 $\mathrm{d}U = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$即$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$为$U(x,y)$的全微分,这时称$U(x,y)$为$1-$形式$P\,\mathrm{d}x +$

$Q\,\mathrm{d}y$的原函数

(4)在D内成立等式$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Proof (1) $\Rightarrow$ (2) :

设A,B为D内任意两点,L_1和L_2是D中从A到B的任意两条路径,则$C=L_1+(-L_2)$就是D中的一条闭曲线.

因此$0=\displaystyle\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left(\int_{L_1}+\int_{-L_2}\right)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

于是$\displaystyle\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,

(2) $\Rightarrow$ (3) :

取一定点$(x_0,y_0)\in D$,作函数$U(x,y)=\displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,这里积分沿从$(x_0,y_0)$到$(x,y)$的任意路径.由于曲线积分与路径无关因此$U(x,y)$是有确定意义的.成立.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta U}{\Delta x}&=\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}\\&=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}P(t,y)\mathrm{d}t=P(\xi,y),\end{aligned}$$

其中ξ在x与$x+\Delta x$之间,这是利用了积分中值定理.因此$\dfrac{\partial U}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta U}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}P(\xi,y)=P(x,y)$.

同理可证$\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$.所以在$D$内成立$\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

(3) $\Rightarrow$ (4) :

由于存在D上的可微函数U,使得$\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,那么$\dfrac{\partial U}{\partial x}=P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$.

又由于函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在D内具有连续偏导数,于是$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2U}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(4) $\Rightarrow$ (1) :对于包含在D内的光滑(或分段光滑)闭曲线L,设它包围的图形是$\widetilde{D}$,那么由$Green$公式就得$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right.$
0.证毕

Corollary 7.2

设D为平面单连通区域,$P(x,y)$和$Q(x,y)$为D上的连续函数.

那么曲线积分$\displaystyle\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路径无关的充分必要条件是在$D$上存在$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$的一个原函数$U(x,y)$.

这时,对于D内任意两点$A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,计算公式$\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=U(x_B,y_B)-U(x_A,y_A)$成立

其中$\overset{\frown}{AB}$为任意从A到B的路径.

Proposition 7.5

设Ω是R^3上由光滑 (或分片光滑) 的封闭曲面所围成的二维单连通闭区域

函数$P(x,y,z),Q(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在Ω上具有连续偏导数, 则成立

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Corollary 7.3

记 $\mathrm{div}\vec{f}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\bullet\vec{f}$, 称为函数$\vec{f}=(P,Q,R)$的散度

曲面积分$\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$则称为$\vec{f}$穿过曲面Σ的通量.

这样, $Gauss$公式也可表示为 $\iiint_\Omega div\vec{f}dv=\iiint_\Omega\nabla\bullet\vec{f}dv=\oiint_{\partial\Omega}\vec{f}\bullet\vec{dS}=\oiint_{\partial\Omega}\vec{f}\bullet\vec{n}dS$

Corollary 7.4

与$Green$公式一样, $Gauss$公式的一个直接应用就是可用沿区域Ω的边界的曲面积分来计算Ω的体积, 具体地说就是

$V=\iiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\partial\Omega}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\partial\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$\partial\Omega$的定向为外侧.

Theorem 7.3.3

设函数$f(x,y,z)$和$g(x,y,z)$在闭区域Ω上具有连续二阶偏导数, 则

$(i)Green$第一公式 (三重积分的分部积分) :

$$\iiint_\Omega f\cdot\Delta g dxdydz=\oiint_{\partial\Omega}f\cdot\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}dS-\iiint_\Omega\nabla f\bullet\nabla g dxdydz$$

$(ii)Green$第二公式 :

$$\iiint_\Omega(f\cdot\Delta g-g\cdot\Delta f)dxdydz=\oiint_{\partial\Omega}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}-g\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\right)dS$$

其中$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\nabla\bullet\nabla\xlongequal{\text{记作}}\nabla^2$, 称为$Laplace$算子, $\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}$和$\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}$分别是$f$和$g$沿边界$\partial\Omega$外法线方向的方向导数.

Proof 首先, $\nabla\bullet(f\cdot\nabla g)=\nabla f\bullet\nabla g+f\cdot\Delta g$, 两边作三重积分得

$$\iiint_\Omega f\cdot\Delta g dv=\iiint_\Omega\nabla\bullet(f\cdot\nabla g)dv-\iiint_\Omega\nabla f\bullet\nabla g dv$$

而利用$Gauss$公式和方向导数$\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}=\nabla g\bullet\vec{n}$, 可得

$$\iiint_\Omega\nabla\bullet(f\cdot\nabla g)dv=\oiint_{\partial\Omega}f\cdot\nabla g\bullet\vec{S}=\oiint_{\partial\Omega}f\cdot\nabla g\bullet\vec{n}dS=\oiint_{\partial\Omega}f\cdot\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}dS.$$

因此, $\iiint_\Omega f\cdot\Delta g dv=\oiint_{\partial\Omega}f\cdot\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}dS-\iiint_\Omega\nabla f\bullet\nabla g dv$, 即$Green$第一公式成立.

Theorem 7.3.4

设Σ是分片光滑定向曲面,其边界$\partial\Sigma$是分段光滑的有向闭曲线,$\partial\Sigma$的正向与Σ的正向符合右手规则.
函数$\vec{f}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$在$\Sigma$及其边界$\partial\Sigma$上具有连续偏导,则
$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz.$$
利用三阶行列式以及两类曲面积分的关系,$Stokes$公式可表为如下便于记忆的形式:
$$\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$
其中$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是曲面$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的单位法向量.

Corollary 7.5

曲线积分$\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz\xrightarrow{\text{记}}\oint_{\partial\Sigma}\vec{f}\bullet d\vec{r}$称为函数$\vec{f}$沿曲线$\partial\Sigma$的环流量
记$\boldsymbol{rot}\vec{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\nabla\times\vec{f}$,称为函数$\vec{f}$的旋度.
这样$Stokes$公式也可表示为$\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\vec{f}\bullet d\vec{S}=\oint_{\partial\Sigma}\vec{f}\bullet d\vec{r}$

Corollary 7.6

设Ω是空间一维单连通区域,函数$\vec{f}(x,y,z)$在Ω内具有连续偏导,记$\vec{f}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,则下列命题等价:

(i)空间曲线积分$\int_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$在Ω内与积分路径Γ无关,而只取决于Γ的起始点;
$(ii)Pdx+Qdy+Rdz$在Ω内存在原函数$u(x,y,z)$,即$\vec{f}=\nabla u$.
(iii)在Ω内恒成立$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z},\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$;
(iv)对于Ω内任一封闭曲线C,有$\oint_{C}Pdx+Qdy+Rdz=0$;