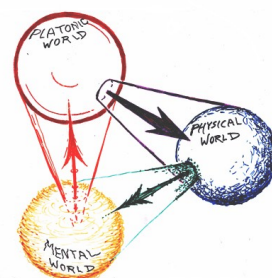


# 高等代数习题讲义

作者: Hongxin Yang 南风

时间: August 17, 2024



# 目录


第 1 章 相关定理环境等的标识	1
第 2 章 矩阵基础习题	2
第 3 章 线性空间习题	18
第 4 章 线性映射习题	41
第 5 章 二次型	48
5.1 相关的判定准则 . . . . .	48
5.2 定理 5.1 中的证明 . . . . .	49
5.3 书课后题 . . . . .	50
5.4 对称矩阵与矩阵合同 . . . . .	55

# 第 1 章 相关定理环境等的标识

**Proof** 使用方法:begin+ proof+ end

**注** 使用方法:begin+ remark+ end


**例题 1.1** 使用方法; begin+ example + end

 **Exercise 1.1** 使用方法:begin+ exercise +end

**性质** 使用方法:begin+ property + end

**问题 1.1** 使用方法:begin + problem +end

**结论** 使用方法:begin+ conclusion +end

 **笔记** 使用方法; begin + note + end

## 定义 1.1

使用方法:begin+ definition+ end

## 命题 1.1

使用方法:begin+ proposition+ end

## 引理 1.1

使用方法:begin+ lemma+ end

## 推论 1.1

使用方法:begin + corollary + end

## 公理 1.1

使用方法:begin+ axiom + end

## 公设 1.1

使用方法:begin + postulate + end

同一个问题和 proof 之间相隔-25pt

上一个 proof 与下一个问题相隔-5pt

## 第2章 矩阵基础习题

### Exercise 2.1

证明：斜对称矩阵的秩是偶数

**Proof** 设 $n$ 级斜对称矩阵 $A$ 的行向量组为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , 则 $A'$ 的列向量组为 $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n$

由于 $A' = -A$ , 因此 $A$ 的列向量组为 $-\gamma'_1, -\gamma'_2, \dots, -\gamma'_n$

设 $\text{rank}(A) = r$ .

取 $A$ 的行向量组的一个极大线性无关组 $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_r}$ , 则 $-\gamma'_{i_1}, -\gamma'_{i_2}, \dots, -\gamma'_{i_r}$ 是 $A$ 的列向量组的一个极大线性无关组

那么此时, 得 $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \neq 0$ .

由于 $A(i_u; i_v) = -A(i_v; i_u), v, u \in \{1, 2, \dots, r\}$ , 因此上述 $r$ 阶子式是一个 $r$ 级斜对称矩阵的行列式

由于奇数级斜对称矩阵的行列式等于0, 因此 $r$ 必为偶数

### Exercise 2.2

$n$ 阶方阵 $A$ 是反对称矩阵的  $\Leftrightarrow$  对任意的 $n$ 维列向量 $\alpha$ , 有 $\alpha' A \alpha = 0$

$A$ 为 $n$ 阶对称阵, 那么 $A = O \Leftrightarrow$  对 $\forall n$ 维列向量 $\alpha$ 有 $\alpha' A \alpha = 0$

**Proof** 若 $A$ 是反对称矩阵, 则对任意的 $n$ 维列向量 $\alpha$ , 有 $(\alpha' A \alpha)' = -\alpha' A \alpha$ . 而 $\alpha' A \alpha$ 是数, 因此 $(\alpha' A \alpha)' = \alpha' A \alpha$ .

比较上面两个式子便有 $\alpha' A \alpha = 0$ .

反之, 若上式对任意的 $n$ 维列向量 $\alpha$ 成立, 则 $\alpha' A \alpha = 0$

令 $\alpha$ 为 $e_i \Rightarrow a_{ii} = 0$  令 $\alpha = e_i + e_j \Rightarrow a_{ij} + a_{ji} = 0 \Rightarrow$  反对称

### Exercise 2.3

设 $A$ 是实数域上的 $n$ 级上三角矩阵, 证明: 如果 $A$ 与 $A'$ 可交换, 那么 $A$ 是对角矩阵

**Proof**

设 $A = (a_{ij})$ . 由于 $AA' = A'A$ , 因此两边同时取 $(i, j)$ 元

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$$

由于 $A$ 是上三角矩阵, 所以当 $i > j$ 时 $a_{ij} = 0$

因此当 $i = 1, j = 1$ 时, 有 $a_{11}^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 \Rightarrow a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$

当 $i = 2, j = 2$ 时, 有 $a_{22}^2 + a_{23}^2 + \cdots + a_{2n}^2 = a_{22}^2$ , 从而 $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$

依次考虑得,  $a_{ij} = 0$ , 当 $i \neq j$ . 因此 $A$ 是对角矩阵。

**Exercise 2.4**

上(下)三角阵的加减,数乘,乘积(幂),多项式,伴随,求逆都仍然为上(下)三角阵,且对应主对角元的元素为原上(下)三角阵对应操作

**Proof**

设  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  都是  $n$  级上三角矩阵, 则

$$\begin{aligned} AB &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} E_{ij} \right) \left( \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n b_{kl} E_{kl} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=k}^n a_{ij} b_{kl} E_{ij} E_{kl} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \sum_{l=j}^n a_{ij} b_{jl} E_{il} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=i}^n \sum_{j=i}^l a_{ij} b_{jl} E_{il} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{l=i}^n \left( \sum_{j=i}^l a_{ij} b_{jl} \right) E_{il} \end{aligned}$$

因此  $AB$  是上三角矩阵。

特别地我们可以知道  $AB$  乘积的第  $(i, l)$  元是多少  $= \sum_{j=i}^l a_{ij} b_{jl}$

加减,数乘,乘积由前文很容易知道,幂次即为乘积的复合也如此,多项式即为前面的复合也容易下面来考虑伴随。

设  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶上三角阵, 满足  $a_{ij} = 0 (\forall i > j)$ . 设  $a_{ij}$  元素的余子式  $M_{ij} = |b_{kl}|$ . 代数余子式  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  那么要证明伴随矩阵也为上三角阵即证明  $A_{ij}$  代数余子式为  $0 (i < j)$ . 且主对角元素满足对应关系

$$\text{取定 } i \leq j, \text{ 有 } \begin{cases} a_{kl} & k \leq i-1 \text{ 且 } l \leq j-1 & (1) \\ a_{k,l+1} & k \leq i-1 \text{ 且 } l \geq j & (2) \\ a_{k+1,l} & k \geq i \text{ 且 } l \leq j-1 & (3) \\ a_{k+1,l+1} & k \geq i \text{ 且 } l \geq j & (4) \end{cases}$$

下面先说明  $a_{ij}$  元素的余子式  $A_{ij}$  也为一个上三角行列式

若  $k > l$  则有 (1, 3, 4) 全部为 0, 而 (2) 情况不满足取定的序关系  $i \leq j$

因此  $A_{ij}$  是一个上三角行列式。

再者, 若  $i < j$ . 那么在 (3) 中在  $[i, j-1]$  里一定可以取到  $k=l$ , 此时  $b_{kk} = a_{k+1,k} = 0$  则  $A_{ij}$  的主对角元一定有一个为 0 那么  $A_{ij} = 0 (i < j)$

进一步若  $i = j$  则  $b_{kk} (1 \leq k \leq n-1)$  可以取到  $a_{11}, \dots, a_{i-1,i-1}; a_{i+1,i+1} \dots a_{nn}$

因此  $A_{ii} = a_{11} \cdots \widehat{a_{ii}} \cdots a_{nn}$  即  $a_{ii}$  元素的伴随。

证毕

又  $AA^* = |A| I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$  故  $A^{-1}$  也为上三角阵, 主对角元为  $\frac{1}{|A|} A_{ii} = a_{ii}^{-1}$

证毕

**Proof** 设  $A = (a_{ij})$  是数域  $K$  上的  $n$  级可逆上三角矩阵, 则  $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$

于是通过第  $i$  行乘以  $a_{ii}^{-1} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 以及第  $i$  行的适当倍数分别加到第  $i-1, i-2, \dots, 1$  行上 ( $i = n, n-1, \dots, 2$ )

可以把  $A$  化成简化行阶梯形矩阵  $I$ , 因此存在相应的初等矩阵  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , 使得  $P_m \cdots P_2 P_1 A = I$

$$\Rightarrow A^{-1} = P_m \cdots P_2 P_1$$

由于  $P_j$  形如  $P(i(a_{ii}^{-1})), P(l, i(k)), l < i$ , 因此  $P_1, P_2, \dots, P_m$  都是上三角矩阵, 从而它们乘积也还是上三角矩阵

证毕

Exercise 2.5 (1) 实矩阵  $A$  适合条件  $AA' = O$  的充要条件是  $A = O$ ;

(2) 复矩阵  $A$  适合条件  $A\overline{A}' = O$  的充要条件是  $A = O$ .

Proof 略

Exercise 2.6 设  $A$  是二阶矩阵, 若有  $n > 2$ , 使  $A^n = O$ , 求证:  $A^2 = O$ .

Proof 不妨假设  $A \neq O$  否则很显然, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ . 由  $A^n = O$  可得  $0 = |A^n| = |A|^n$ , 从而  $|A| = 0$ . 因为  $A$  是二阶矩阵由  $|A| = 0$  容易验证  $A$  的两个列向量成比例, 于是存在二维行向量  $\alpha, \beta$ , 使得  $A = \alpha'\beta$ .

注意到  $\beta\alpha'$  是一个数, 由矩阵乘法的结合律可得

$$\begin{aligned} O = A^n &= (\alpha'\beta)(\alpha'\beta)\cdots(\alpha'\beta) = \alpha'(\beta\alpha')\cdots(\beta\alpha')\beta \\ &= (\beta\alpha')^{n-1}\alpha'\beta = (\beta\alpha')^{n-1}A. \end{aligned}$$

因此或者  $\beta\alpha' = 0$ , 或者  $A = O$ , 但无论哪种情况, 我们最后都有

$$A^2 = (\alpha'\beta)(\alpha'\beta) = \alpha'(\beta\alpha')\beta = (\beta\alpha')A = O$$

笔记 这也告诉我们如果一个二阶矩阵为非逆阵则两列成比例

Exercise 2.7 求下列矩阵的逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Proof 法一: 设  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ ; 则  $A = -I_n + \alpha\alpha'$  设  $B = cI_n + d\alpha\alpha'$

$$\text{则 } AB = -cI_n + [c + (n-1)d]\alpha\alpha' \quad \text{令 } c = -1; c + (n-1)d = 0 \Rightarrow d = \frac{1}{n-1}$$

$$\text{于是 } AB = I_n \text{ 则 } A^{-1} = B = -I_n + \frac{1}{n-1}\alpha\alpha'$$

法二: 设  $J$  为基础循环矩阵那么  $A = J + J^2 + \cdots + J^{n-1}$

设  $B = cI_n + J + \cdots + J^{n-1}$  其中  $c$  为待定系数那么

$$AB = (n-1)I_n + (c+n-2)(J + J^2 + \cdots + J^{n-1})$$

$$\text{只要令 } c = 2 - n; \text{ 那么 } AB = (n-1)I_n, \text{ 那么 } A^{-1} = \frac{1}{n-1}B$$

法三: 设  $\alpha = (1, 1, \cdots, 1)'$ ; 则  $A = -I_n + \alpha\alpha'$

由 Sherman - Morrison 公式可得

$$A^{-1} = (-I_n + \alpha\alpha')^{-1} = (-I_n)^{-1} - \frac{1}{1 + \alpha'(-I_n)^{-1}\alpha} (-I_n)^{-1}\alpha\alpha'(-I_n)^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -I_n + \frac{1}{n-1}\alpha\alpha'$$

Exercise 2.8  $n$  阶方阵  $A$  是奇异矩阵的充要条件是存在不为零的同阶方阵  $B$ , 使  $AB = O$ .

**Proof** 显然若  $A$  可逆, 从  $AB = O$  可得到  $B = O$ , 因此充分性成立.

反之, 若  $A$  是奇异矩阵, 则存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 其中  $r < n$ . 令  $C = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$ , 则  $PAQC = O$ .

又因为  $P$  可逆, 故  $AQC = O$ . 只要令  $B = QC$  就得到了结论.

**Exercise 2.9**  $n$  阶方阵  $A$  是奇异矩阵的充要条件是存在  $n$  维非零列向量  $x$ , 使  $Ax = 0$ .

**Proof** 利用线性方程组知识显然理解

显然若  $A$  可逆, 从  $Ax = 0$  可得到  $x = 0$ , 因此充分性成立.

反之, 若  $A$  是奇异矩阵, 则存在可逆矩阵  $P, Q$ , 使  $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 其中  $r < n$ . 令  $y = (0, \dots, 0, 1)'$  为  $n$  维列向量, 则  $PAQy = 0$ .

又因为  $P$  可逆, 故  $AQy = 0$ . 只要令  $x = Qy$  就得到了结论.

**Exercise 2.10** 设  $A$  为  $n$  阶实反对称矩阵, 证明:  $I_n - A$  是非异阵.

**Proof** 用反证法证明. 设  $I_n - A$  是奇异矩阵, 则由上个问题可知存在  $n$  维非零列向量  $x$ , 使  $(I_n - A)x = 0$ , 即  $Ax = x$ .

$x$  可取为非零实列向量. 设  $x = (a_1, a_2, \dots, a_n)'$ , 其中  $a_i$  都是实数

事实上, 通过问题 2.1 可得  $0 = x'Ax = x'x = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ,

从而  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , 即  $x = 0$ , 这与已知矛盾.

**Exercise 2.11** 设矩阵  $A$  是  $n$  阶可逆矩阵, 求证: 只用第三类初等变换就可以将  $A$  化为如下形状:  $\text{diag}\{1, 1, \dots, |A|\}$

**Proof** 假定  $A$  的第  $(1, 1)$  元素等于零, 因为  $A$  可逆, 第一行必有元素不为零. 用第三类初等变换将非零元素所在的列加到第一列

则得到的矩阵中第  $(1, 1)$  元素不为零. 因此不妨设  $A$  的第  $(1, 1)$  元素非零

于是可用第三类初等变换将  $A$  的第一行及第一列其余元素都消为零. 这就是说

$A$  经过第三类初等变换可化为如下形状:  $\begin{pmatrix} a & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}$ . 再对  $A_1$  同样处理, 不断做下去, 可将  $A$  化为对角矩阵.

因此我们只要对对角矩阵证明结论即可. 为简化讨论, 我们先考虑二阶矩阵:  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

将其第一行乘以  $(1-a)a^{-1}$  加到第二行上, 再将第二行加到第一行上得到:  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix}$ .

将其第一列乘以  $-b$  加到第二列上, 再将第一行乘以  $a-1$  加到第二行上得到:  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1-a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & ab \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$ .

显然上述方法不断递推对  $n$  阶对角矩阵也适用, 而我们所用的初等变换始终是第三类初等变换. 这就得到了结论.

**Exercise 2.12** 任一  $n$  阶矩阵均可表示为形如  $I_n + a_{ij}E_{ij}$  这样的矩阵之积, 其中  $E_{ij}$  是  $n$  阶基础矩阵.

**Proof** 任意一个  $n$  阶矩阵都可表示为有限个初等矩阵和具有下列形状的对角矩阵  $D$  之积:  $D = \text{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$  (相抵标准型)

故只要对初等矩阵和对角阵  $D$  证明结论即可. 对  $D$ , 假定  $D$  有  $r$  个 1, 则  $D = (I_n - E_{r+1, r+1}) \cdots (I_n - E_{nn})$ .

第三类初等矩阵已经是这种形状了. 对第二类初等矩阵  $P_i(c)$ , 显然我们有  $P_i(c) = I_n + (c-1)E_{ii}$ .

对第一类初等矩阵  $P_{ij}$ , 由上个问题可知, 只用第三类初等变换就可以将  $P_{ij}$  化为  $P_n(-1) = \text{diag}\{1, \dots, 1, -1\}$ , 因此对第一类初等矩阵结论也成立.

具体地就变成了如何用第三类变换与第二类做到第一类从而逐步写出通式

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i = r_i + r_j} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_j = (-1) \cdot r_j} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_j = r_j + r_i} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_i = r_i - r_j} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

以上都是行变换对应的写出:  $P_{ij} = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - 2E_{jj})(I_n + E_{ij})I_n$

$$\Rightarrow P_{ij} = (I_n - E_{ij})(I_n + E_{ji})(I_n - 2E_{jj})(I_n + E_{ij})$$

### Exercise 2.13

证明: 任何方阵都可以表示成一些下三角矩阵与上三角矩阵的乘积

**Proof** 任一  $n$  级矩阵  $A$  都可以经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵  $G$ . 据阶梯形矩阵的定义知道,  $G$  是上三角矩阵. 对换初等行变换可以通过 1° 型与 3° 型初等行变换实现, 因此  $A = P_l \cdots P_2 P_1 G$

其中  $P_1, P_2, \dots, P_l$  是 1° 型或 3° 型的初等矩阵, 它们都是上三角矩阵或下三角矩阵.

### Exercise 2.14

求下列  $n$  阶矩阵的逆矩阵 ( $a_i \neq 0$ ):  $A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$

### Proof

解对  $(A; I_n)$  用初等变换法, 将第  $i$  行乘以  $a_i^{-1} (i = 1, 2, \dots, n)$ , 有

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 + \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & \cdots & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{array} \right) \rightarrow$$

将下面的行都加到第一行上,并令  $s = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ , 则上面的矩阵变为

$$\left( \begin{array}{ccccc|ccccc} s & s & s & \cdots & s & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ \frac{1}{a_2} & 1 + \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_2} & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_3} & 1 + \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_3} & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_n} & \cdots & 1 + \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{sa_1} & \frac{1}{sa_2} & \frac{1}{sa_3} & \cdots & \frac{1}{sa_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_2a_1} & \frac{sa_2 - 1}{sa_2^2} & -\frac{1}{sa_2a_3} & \cdots & -\frac{1}{sa_2a_n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{sa_3a_1} & -\frac{1}{sa_3a_2} & \frac{sa_3 - 1}{sa_3^2} & \cdots & -\frac{1}{sa_3a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{sa_na_1} & -\frac{1}{sa_na_2} & -\frac{1}{sa_na_3} & \cdots & \frac{sa_n - 1}{sa_n^2} \end{array} \right) \rightarrow$$

再消去第一行的1就得到

$$A^{-1} = -\frac{1}{s} \begin{pmatrix} \frac{1-sa_1}{a_1^2} & \frac{1}{a_1a_2} & \frac{1}{a_1a_3} & \cdots & \frac{1}{a_1a_n} \\ \frac{1}{a_2a_1} & \frac{1-sa_2}{a_2^2} & \frac{1}{a_2a_3} & \cdots & \frac{1}{a_2a_n} \\ \frac{1}{a_3a_1} & \frac{1}{a_3a_2} & \frac{1-sa_3}{a_3^2} & \cdots & \frac{1}{a_3a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_na_1} & \frac{1}{a_na_2} & \frac{1}{a_na_3} & \cdots & \frac{1-sa_n}{a_n^2} \end{pmatrix}.$$

🔥 **Exercise 2.15** 求矩阵  $A$  的逆矩阵:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$

**Proof** 解对  $(A; I_n)$  用初等变换法, 将所有行加到第一行上, 第一行乘以  $s^{-1}$ , 其中  $s = \frac{1}{2}n(n+1)$ .

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

第二行起依次减去下一行, 得到

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right).$$

消去第一列除第一行外的所有元素后,得

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & -\frac{s+1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & \frac{s-1}{s} & \cdots & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array} \right).$$

从第二行到第 $n-1$ 行乘以 $-\frac{1}{n}$ 得到

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array} \right).$$

第一行依次减去第二行,第三行, $\cdots$ ,第 $n-1$ 行,得到

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & -\frac{2}{s} & \cdots & -\frac{2}{s} & -\frac{s-2}{s} \end{array} \right).$$

第二行乘 $-1$ 加到最后一行,第三行乘以 $-2$ 加到最后一行, $\cdots$ ,第 $n-1$ 行乘以 $n-2$ 加到最后一行,得到

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -\frac{s+1}{ns} & -\frac{1}{ns} & -\frac{1}{ns} & \cdots & -\frac{1}{ns} & \frac{s-1}{ns} \end{array} \right)$$

最后一行加到第一行,再将 $-1$ 乘以最后一行,得到

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{2}{ns} & \frac{s+2}{ns} & \frac{2}{ns} & \cdots & \frac{2}{ns} & \frac{2-s}{ns} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \frac{s+1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{s+1}{ns} & \frac{1}{ns} & \frac{1}{ns} & \cdots & \frac{1}{ns} & \frac{1-s}{ns} \end{array} \right)$$

$$\text{因此 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ns} \begin{pmatrix} 1-s & 1+s & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1+s & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-s & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1+s & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-s \end{pmatrix}$$

🔴 **Exercise 2.16** 设 $\mathbf{A}$ 是 $n$ 阶矩阵, $\mathbf{P}$ 是同阶可逆矩阵,求证: $\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \text{tr}\mathbf{A}$ ,

**Proof** 即相似矩阵具有相同的迹.证明因为 $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$ ,故 $\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}) = \text{tr}\mathbf{A}$ .

🔴 **Exercise 2.17** (1)若 $\mathbf{A}$ 是 $n$ 阶实矩阵,则 $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}') \geq 0$ ,等号成立的充要条件是 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ;

(2)若 $\mathbf{A}$ 是 $n$ 阶复矩阵,则 $\text{tr}(\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}'}) \geq 0$ ,等号成立的充要条件是 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ .

**Proof** (1)设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 $n$ 阶实矩阵,则通过计算可得 $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}') = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0$ ,等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$ ,即 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ .

(2)设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 $n$ 阶复矩阵,则通过计算可得 $\text{tr}(\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}'}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0$ ,等号成立当且仅当 $a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$ ,即 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ .

🔴 **Exercise 2.18** (1)设 $n$ 阶实矩阵 $\mathbf{A}$ 适合 $\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$ ,如果存在同阶实矩阵 $\mathbf{B}$ ,使 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}$ ,则 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$

(2) 设  $n$  阶复矩阵  $A$  适合  $\overline{A'} = -A$ , 如果存在同阶矩阵  $B$ , 使  $AB = B$ , 则  $B = O$ .

**Proof** (1) 在等式  $AB = B$  两边同时左乘  $B'$  可得  $B'AB = BB'$ . 上式两边同时转置并注意到  $A' = -A$ , 可得  $BB' = (BB')' = (B'AB)' = B'A'B = -B'AB = -BB'$ , 从而有  $BB' = O$ .

两边同时取迹, 由可得  $B = O$ .

(2) 的证明与 (1) 类似.

此外由问题 2.9 也可得

🔥 **Exercise 2.19** 设  $A$  为  $n$  阶实矩阵, 求证:  $\text{tr}(A^2) \leq \text{tr}(AA')$  等号成立当且仅当  $A$  为实对称阵

**Proof** 法一: 利用定义直接写出然后配对利用基本不等式

法二:  $\text{tr}[(A - A')(A - A)'] = \text{tr}[(A - A')(A' - A)] = \text{tr}(AA' - A^2 - (A')^2 + A'A) \geq 0$

那么根据线性, 交换性, 对称性我们就有  $\text{tr}(A^2) \leq \text{tr}(AA')$

等号成立当且仅当  $A - A' = O \Leftrightarrow A$  为实对称阵

🔥 **Exercise 2.20** 设  $f$  是数域  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵集到  $\mathbb{F}$  的一个映射, 它满足下列条件:

(1) 对任意的  $n$  阶矩阵  $A, B$ ,  $f(A + B) = f(A) + f(B)$ ;

(2) 对任意的  $n$  阶矩阵  $A$  和  $\mathbb{F}$  中数  $k$ ,  $f(kA) = kf(A)$ ;

(3) 对任意的  $n$  阶矩阵  $A, B$ ,  $f(AB) = f(BA)$ ;

(4)  $f(I_n) = n$ .

求证:  $f$  就是迹, 即  $f(A) = \text{tr}A$  对一切  $\mathbb{F}$  上  $n$  阶矩阵  $A$  成立.

**Proof** 设  $E_{ij}$  是  $n$  阶基础矩阵. 因为  $f(I_n) = n$ , 所以由 (1), 有  $f(I_n) = f(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{nn}) = f(E_{11}) + f(E_{22}) + \cdots + f(E_{nn})$ .

又由 (3), 有  $f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj})$ , 所以  $f(E_{ii}) = 1$ .

另一方面, 若  $i \neq j$ ,  $E_{ij} = E_{i1}E_{1j}$ , 则  $f(E_{ij}) = f(E_{i1}E_{1j}) = f(E_{1j}E_{i1}) = f(O) = 0 \cdot f(I_n) = 0$ .

若  $A = (a_{ij})$ , 则  $f(A) = f\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}A$ .

🔥 **Exercise 2.21** 设  $A, B$  是两个  $n$  阶矩阵, 若  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CBA)$  对任意  $n$  阶矩阵  $C$  成立

**Proof**  $AB = BA$ . 证明设  $AB = (d_{ij})$ ,  $BA = (e_{ij})$ , 令  $C = E_{kl} (k, l = 1, 2, \dots, n)$ , 则  $\text{tr}(ABC) = d_{lk}$ ,  $\text{tr}(CBA) = e_{lk}$

因此  $d_{lk} = e_{lk} (k, l = 1, 2, \dots, n)$ , 即有  $AB = BA$ .

若  $A, B$  是实 (复) 矩阵, 我们还可以通过迹的正定性来证明结论. 事实上, 由迹的交换性和线性可得  $\text{tr}((AB - BA)C) = 0$

令  $C$  为  $AB - BA$  的转置 (共轭转置), 由问题 2.15 知道即可得到结论.

🔥 **Exercise 2.22** 计算下列矩阵  $A$  的行列式的值:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cdots & \cos n\theta \\ \cos n\theta & \cos \theta & \cos 2\theta & \cdots & \cos (n-1)\theta \\ \cos (n-1)\theta & \cos n\theta & \cos \theta & \cdots & \cos (n-2)\theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cdots & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**Proof** 由上面的结论可知  $|A| = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \cdots f(\varepsilon_n)$ , 其中  $f(x) = \cos \theta + x \cos 2\theta + \cdots + x^{n-1} \cos n\theta$ .

令  $g(x) = \sin \theta + x \sin 2\theta + \cdots + x^{n-1} \sin n\theta$ , 则

$$f(x) + ig(x) = (\cos \theta + i \sin \theta) + x(\cos \theta + i \sin \theta)^2 + \cdots + x^{n-1}(\cos \theta + i \sin \theta)^n.$$

用等比级数求和再比较实部, 得

$$f(x) = \frac{\cos n\theta \cdot x^{n+1} - \cos(n+1)\theta \cdot x^n - x + \cos \theta}{x^2 + 1 - 2x \cos \theta}.$$

设  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$  是 1 的所有  $n$  次方根, 对任意的  $\varepsilon_i$ , 经计算并化简, 得

$$f(\varepsilon_i) = \frac{[\cos \theta - \cos(n+1)\theta] - \varepsilon_i(1 - \cos n\theta)}{[(\cos \theta + i \sin \theta) - \varepsilon_i][(\cos \theta - i \sin \theta) - \varepsilon_i]}.$$

注意到对任意的  $a, b$ , 有  $a^n - b^n = (a - \varepsilon_1 b)(a - \varepsilon_2 b) \cdots (a - \varepsilon_n b)$

因此

$$\begin{aligned} |A| &= \prod_{i=1}^n f(\varepsilon_i) = \frac{[\cos \theta - \cos(n+1)\theta]^n - (1 - \cos n\theta)^n}{[(\cos n\theta + i \sin n\theta) - 1][(\cos n\theta - i \sin n\theta) - 1]} \\ &= \frac{[\cos \theta - \cos(n+1)\theta]^n - (1 - \cos n\theta)^n}{2(1 - \cos n\theta)} \\ &= 2^{n-2} \sin^{n-2} \frac{n\theta}{2} \left( \sin^n \frac{(n+2)\theta}{2} - \sin^n \frac{n\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

**Exercise 2.23** 设  $A$  是  $n$  阶实方阵且  $AA' = I_n$ . 求证: 若  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ , 则  $\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}^2 = 1$

**Proof** 类似上个问题, 对等式  $AA' = I_n$  两边同时求  $r$  阶主子式即得结论.

**Exercise 2.24** 设  $A, B$  都是  $n$  阶矩阵, 求证:  $AB$  和  $BA$  的  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) 阶主子式之和相等.

**Proof** 由 Cauchy - Binet 公式可得

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} AB \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n} BA \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注当  $r = 1$  时, 本命题就是  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Exercise 2.25** 设  $A, B$  都是  $m \times n$  实矩阵, 求证:  $|AA'| |BB'| \geq |AB'|^2$

**Proof** 若  $m > n$ , 则  $|AA'| = |BB'| = |AB'| = 0$ , 结论显然成立.

若  $m \leq n$ , 则由 *Cauchy - Binet* 公式可得

$$|AA'| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}^2;$$

$$|BB'| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}^2;$$

$$|AB'| = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix},$$

再由 *Cauchy - Schwarz* 不等式即得结论.

**Exercise 2.26**

设  $A$  是一个  $n \times m$  矩阵,  $m \geq n - 1$ , 并且  $A$  的每一列元素的和都为 0

证明:  $AA'$  的所有元素的代数余子式都相等

**Proof**  $AA'$  的  $(i, j)$  元的代数余子式为

$$(-1)^{i+j} AA' \begin{pmatrix} 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_{n-1} \leq m} A \begin{pmatrix} 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \\ 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_{n-1} \leq m} A \begin{pmatrix} 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{计算 } A \begin{pmatrix} 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1v_1} & a_{1v_2} & \dots & a_{1v_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,v_1} & a_{i-1,v_2} & \dots & a_{i-1,v_{n-1}} \\ a_{i+1,v_1} & a_{i+1,v_2} & \dots & a_{i+1,v_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nv_1} & a_{nv_2} & \dots & a_{nv_{n-1}} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1=r_2+r_3+\dots+r_n} \begin{vmatrix} -a_{iv_1} & -a_{iv_2} & \dots & -a_{iv_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,v_1} & a_{i-1,v_2} & \dots & a_{i-1,v_{n-1}} \\ a_{i+1,v_1} & a_{i+1,v_2} & \dots & a_{i+1,v_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nv_1} & a_{nv_2} & \dots & a_{nv_{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{i-2} \begin{vmatrix} a_{2v_1} & a_{2v_2} & \dots & a_{2v_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,v_1} & a_{i-1,v_2} & \dots & a_{i-1,v_{n-1}} \\ a_{iv_1} & a_{iv_2} & \dots & a_{iv_{n-1}} \\ a_{i+1,v_1} & a_{i+1,v_2} & \dots & a_{i+1,v_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nv_1} & a_{nv_2} & \dots & a_{nv_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} A \begin{pmatrix} 2, 3, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix}$$

因此  $AA'$  的  $(i, j)$  元的代数余子式为

$$(-1)^{i+j} \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_{n-1} \leq m} (-1)^{i+1} A \begin{pmatrix} 2, 3, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix} (-1)^{j+1} A \begin{pmatrix} 2, 3, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq v_1 < \dots < v_{n-1} \leq m} \left[ A \begin{pmatrix} 2, 3, \dots, n \\ v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \end{pmatrix} \right]^2$$

**Exercise 2.27**

设实数域上的 $n$ 级矩阵 $A = (B, C)$ , 其中 $B$ 是 $n \times m$ 矩阵, 证明:  $|A|^2 \leq |B'B| |C'C|$

**Proof** 此时我们有

$$|A| = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \widehat{A} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \widehat{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_m + \frac{m(m+1)}{2}} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} i_{m+1} & i_{m+2} & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } |A|^2 = \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_m + \frac{m(m+1)}{2}} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} i_{m+1} & i_{m+2} & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \right)^2$$

$$\text{由柯西不等式知道 } |A|^2 \leq \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \left[ B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \right]^2 \right) \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \left[ C \begin{pmatrix} i_{m+1} & i_{m+2} & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \right]^2 \right)$$

$$\Rightarrow \text{而 } \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \left[ B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \right]^2 = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} B^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} = |B^T B|$$

$$\text{同理 } \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \left[ C \begin{pmatrix} i_{m+1} & i_{m+2} & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix} \right]^2 \right) = |C^T C|$$

$$\Rightarrow |A|^2 \leq |B'B| |C'C|$$

**Exercise 2.28**

设 $A, B$ 是 $n$ 阶复矩阵, 求证:  $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| |A - iB|$

**Proof** 将分块矩阵的第二行乘以 $i$ 加到第一行上, 再将第一列乘以 $-i$ 加到第二列上, 可得

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + iB & iA - B \\ B & A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A + iB & O \\ B & A - iB \end{pmatrix}$$

$$\text{第三类分块初等变换不改变行列式的值, 因此可得 } \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + iB & O \\ B & A - iB \end{vmatrix} = |A + iB| |A - iB|$$

**Exercise 2.29** 设 $A, B$ 都是实矩阵, 那么  $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geq 0$

**Proof** 因为都是实矩阵那么  $\overline{|A + iB|} = |\overline{A + iB}| = |A - iB|$

$$\text{所以 } \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + iB| |A - iB| = |A + iB| \overline{|A + iB|} \geq 0$$

**Exercise 2.30** 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵, 若 $A^n = O \Rightarrow I_n - A$ 可逆

**Proof** 此时 $A^n - I_n = -I_n$ 利用公式拆开即可

Exercise 2.31 若 $n$ 阶实方阵 $A$ 满足 $AA' = I_n$ , 则称为正交矩阵.

证明: 不存在 $n$ 阶正交矩阵 $A, B$ 满足 $A^2 = cAB + B^2$ , 其中 $c$ 是非零常数.

Proof 用反证法, 设存在 $n$ 阶正交阵 $A, B$ , 使得 $A^2 = cAB + B^2$  ( $c \neq 0$ ). 在等式两边同时左乘 $A'$ , 右乘 $B'$ , 可得 $AB' = cI_n + A'B$

从而 $cI_n = A'B - AB'$ . 两边同时取迹, 可得

$$nc = \text{tr}(cI_n) = \text{tr}(A'B) - \text{tr}(AB') = \text{tr}((A'B)') - \text{tr}(AB') = \text{tr}(B'A) - \text{tr}(AB') = 0, \text{ 矛盾.}$$

Exercise 2.32 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的每一行、每一列的元素之和都为零, 证明:  $A$ 的每个元素的代数余子式都相等.

Proof 构造 $B = \begin{pmatrix} A & x \\ y' & 0 \end{pmatrix}$

一方面由行列式知识(直接展开或摄动法)可得 $|B| = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}x_i y_j$ .

另一方面, 先把行列式 $|B|$ 的第二行,  $\dots$ , 第 $n$ 行全部加到第一行上; 再将第二列,  $\dots$ , 第 $n$ 列全部加到第一列上, 可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^n x_i \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \sum_{i=1}^n x_i \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ \sum_{j=1}^n y_j & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}.$$

依次按照第一行和第一列进行展开, 可得 $|B| = -A_{11} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j$ .

比较上述两个结果, 可得 $A$ 的所有代数余子式都相等.

Exercise 2.33

设 $A, B$ 分别是数域 $K$ 上的 $s \times n, n \times m$ 矩阵

证明: 如果 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$ , 那么, 对于数域 $K$ 上任意 $m \times r$ 矩阵 $C$ , 都有 $\text{rank}(ABC) = \text{rank}(BC)$

Proof  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) \implies ABx = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解,

我们来证 $ABCx = 0$ 与 $BCx = 0$ 同解

一方面显然

另一方面:  $ABCx = 0$ 可以看作 $Cx$ 是 $ABx = 0$ 的解, 故 $BCx = 0$

Exercise 2.34

设 $A$ 是 $n$ 级矩阵, 行标和列标都为 $1, 2, \dots, k$ 的子式称为 $A$ 的 $k$ 阶顺序主子式,  $k = 1, 2, \dots, n$

证明: 如果 $A$ 的所有顺序主子式都不等于0, 那么存在 $n$ 级下三角矩阵 $B$ , 使得 $BA$ 为上三角矩阵

Proof  $n = 1$ 时, 命题显然为真

假设对于 $n - 1$ 级矩阵, 命题为真

下面看 $n$ 级矩阵 $A = (a_{ij})$ 的情形. 设 $A$ 的所有顺序主子式都不等于0.

把 $A$ 写成分块矩阵的形式:  $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix}$ , 其中 $A_1$ 是 $n-1$ 级矩阵.

由于 $A_1$ 的所有顺序主子式是 $A$ 的 $1, 2, \dots, n-1$ 阶顺序主子式, 因此对 $A_1$ 可以用归纳假设

有 $n-1$ 级下三角矩阵 $B_1$ , 使得 $B_1 A_1$ 为上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)+(-\beta A_1^{-1}) \cdot (1)} \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta A_1^{-1} \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{于是} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\beta_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \beta & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta_1^{-1} \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{令} B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\beta A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ -\beta A_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \text{则} B \text{为下三角矩阵, 且} BA = \begin{pmatrix} B_1 A_1 & B_1 \alpha \\ 0 & a_{nn} - \beta A_1^{-1} \alpha \end{pmatrix}, \text{于是} BA \text{为上三角矩阵}$$

由数学归纳法原理, 对一切正整数 $n$ , 命题为真

### Exercise 2.35

$$\text{求下述} n \text{级范德蒙矩阵} A \text{的逆矩阵} (n \geq 2): A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \cdots & \xi^{n-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \cdots & \xi^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi^{n-1} & \xi^{2(n-1)} & \cdots & \xi^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \text{其中} \xi = e^{2\pi i/n}$$

**Proof** 用凑矩阵的方法, 找 $B$ 并使 $AB = I$

依次确定 $B$ 的第 $1, 2, \dots, n$ 列, 使得 $AB$ 的主对角元都为 $n$

$$\text{令} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \xi^{n-1} & \xi^{2(n-1)} & \cdots & \xi^{(n-1)(n-1)} \\ 1 & \xi^{n-2} & \xi^{2(n-2)} & \cdots & \xi^{(n-2)(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi & \xi^2 & \cdots & \xi^{n-1} \end{pmatrix}$$

去计算 $AB(i; j)$ , 从而可求出 $A^{-1} = \frac{1}{n} B$ .

### Exercise 2.36

设 $A = \text{diag} \{a_1 I_{n_1}, a_2 I_{n_2}, \dots, a_s I_{n_s}\}$ , 其中 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 是两两不等的数

证明: 与 $A$ 可交换的矩阵一定是分块对角矩阵 $\text{diag} \{B_1, B_2, \dots, B_s\}$ , 其中 $B_i$ 是 $n_i$ 级方阵,  $i = 1, 2, \dots, s$

$$\text{Proof 设} B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{ss} \end{pmatrix} \text{与} A = \text{diag} \{a_1 I_{n_1}, a_2 I_{n_2}, \dots, a_s I_{n_s}\} \text{可交换}$$

$$AB(i, j) = BA(i, j) \implies a_i I_{n_i} B_{ij} = B_{ij} a_j I_{n_j} \implies (a_i - a_j) B_{ij} = O \implies B_{ij} = O (i \neq j)$$

### Exercise 2.37

设  $f(x), g(x)$  为多项式,  $A$  为  $n$  阶方阵. 证明:  $\begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix}$  的秩相等.

**Proof**

设  $(f(x), g(x)) = d(x)$ , 那么存在多项式  $u(x), v(x)$ , 使得  $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$

进而

$$\begin{pmatrix} u(A) & v(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u(A) \\ v(A) \end{pmatrix} = u(A)f(A) + v(A)g(A) = d(A)$$

$$\text{由此可知 } r \begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix} \geq r(d(A))$$

另外, 还存在多项式  $f_1(x), g_1(x)$ , 使得  $f(x) = d(x)f_1(x), g(x) = d(x)g_1(x)$ , 那么

$$\begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(A) \\ g_1(A) \end{pmatrix} d(A)$$

$$\begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix} = d(A) \begin{pmatrix} f_1(A) & g_1(A) \end{pmatrix}$$

$$\text{由此可知 } r \begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix}, r \begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix} \leq r(d(A)) \text{ 于是 } r \begin{pmatrix} f(A) \\ g(A) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} f(A) & g(A) \end{pmatrix} = r(d(A))$$

 **Exercise 2.38**

**Proof**

 **Exercise 2.39**

**Proof**

 **Exercise 2.40**

**Proof**

### 第3章 线性空间习题

#### Exercise 3.1

证明: 由非零向量组成的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关  $\iff$  每一个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 都不能用它前面的向量线性表出

#### Proof

必要性:

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

反证法假如有某个 $\alpha_i$ 可以用它前面的向量线性表出, 那么易见 $\alpha_i$ 可以由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的其余向量线性表出这与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关矛盾因此每个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 都不能用它前面的向量线性表出

充分性:

设每个 $\alpha_i (1 < i \leq s)$ 都不能用它前面的向量线性表出

假如 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关故存在一组不全为零的 $k_1 \sim k_s$  st.  $k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + k_s \vec{\alpha}_s = \vec{0}$

若 $k_s \neq 0$ 那么移项做除法那么得到 $\alpha_s$ 就由前面的表出矛盾!

若 $k_s = 0$ 那么我们就同理论 $k_{s-1}$ 即可.

因为是不全为0所以上述讨论必定经过有限次后停止. 证毕

#### Exercise 3.2

设 $s \leq n, a \neq 0$ 且当 $0 < r < n$ 时,  $a^r \neq 1$ . 令

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1, a, a^2, \dots, a^{n-1}) \\ \alpha_2 = (1, a^2, a^4, \dots, a^{2(n-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_s = (1, a^s, a^{2s}, \dots, a^{s(n-1)}) \end{cases}$$

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关

**Proof** 由于 $a \neq 0$ 且当 $0 < r < n$ 时,  $a^r \neq 1$ , 因此 $a, a^2, \dots, a^s$ 是两两不等的非零数

实际上我们来思考若 $x_1 \alpha_1 + \dots + x_s \alpha_s = \vec{0}$ , 此时就会得到一个方程组, 要证线性无关即证齐次方程组只有零解

将方程组的系数矩阵拿出为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a^2 & \dots & a^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & \dots & a^{s(n-1)} \end{pmatrix}_{n \times s}$$

当 $s = n$ 时利用范德蒙德行列式知道这个行列式的值不为0, 因此秩为 $n = s$ , 那么只有零解,

当 $s < n$ 时, 此时我们可以抠出一个 $s \times s$ 的范德蒙德行列式不为0; 因而秩 $\geq s$ ; 且由形状知秩 $\leq s$ ; 故秩 $= s$ ; 故只有零解

#### Exercise 3.3

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & \dots & a^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a^s & a^{2s} & \dots & a^{s(n-1)} \end{pmatrix}$ , 其中 $s \leq n, a \neq 0$ 且当 $0 < r < n$ 时,  $a^r \neq 1$

证明： $\mathbf{A}$ 的任意 $s$ 个列向量都线性无关。

**Proof** 任取 $\mathbf{A}$ 的第 $j_1, j_2, \dots, j_s$ 列

$$\begin{vmatrix} a^{j_1-1} & a^{j_2-1} & \dots & a^{j_s-1} \\ a^{2(j_1-1)} & a^{2(j_2-1)} & \dots & a^{2(j_s-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a^{s(j_1-1)} & a^{s(j_2-1)} & \dots & a^{s(j_s-1)} \end{vmatrix} = a^{j_1-1} a^{j_2-1} \dots a^{j_s-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a^{j_1-1} & a^{j_2-1} & \dots & a^{j_s-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a^{(s-1)(j_1-1)} & a^{(s-1)(j_2-1)} & \dots & a^{(s-1)(j_s-1)} \end{vmatrix}$$

由于 $a \neq 0$ 且当 $0 < r < n$ 时, $a^r \neq 1$ ,因此 $a^{j_1-1}, a^{j_2-1}, \dots, a^{j_s-1}$ 是两两不等的非零数,从而上述行列式的值不为0  
因此 $\mathbf{A}$ 的第 $j_1, j_2, \dots, j_s$ 个列向量线性无关。

### Exercise 3.4

设数域 $\mathbb{R}$ 上 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{H}$ 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

证明： $\mathbf{H}$ 的任意 $s$ 列 ( $s \leq \min\{m, n\}$ )都线性无关

$\iff$  齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 的任一非零解的非零分量的数目大于 $s$

**Proof** 充分性：反证法,若 $\mathbf{H}$ 中存在那么一组 $s$ 个的列是线性相关的,不妨设为第 $j_1 \dots j_s$ 列。

那么存在一组不全为0的数 $k_1 \sim k_m$  st.  $k_1\alpha_{j_1} + k_2\alpha_{j_2} + \dots + k_s\alpha_{j_s} = \vec{0}$

那么此时 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 方程组就有对应的一个非零解： $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ j_s \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  此时非零的分量的个数  $\leq s$ , 矛盾!

必要性：反证法：若 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ 方程组存在某一非零解其非零分量数目小于 $s$

在 $n$ 个分量中不妨设非零的就为最前面第 $1 \sim t$ 行,数值大小为 $l_1 \sim l_t$

此时我们断言存在 $s$ 个列线性相关

我们取 $\alpha_1 \sim \alpha_t$ ,再从剩余的 $n-t$ 个 $\alpha_i$ 中随便选取 $s-t$ 个即可记为 $\alpha_{j_{t+1}} \dots \alpha_{j_s}$ ,这样我们就有

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_t\alpha_t + 0 \cdot \alpha_{j_{t+1}} + \dots + 0 \cdot \alpha_{j_s} = 0$$

得到线性相关,矛盾

### Exercise 3.5 线性空间基的判别法的向量组形式

设向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的秩为 $r$ ,

1.证明： $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的任意 $r$ 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组

2.证明：如果 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 可以由其中的 $r$ 个向量 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性表出,那么 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组

**Proof** 我们可以利用生成空间的手法结合线性空间的基判别法很容易做出向量组的形式,另一种方法如下

1.设 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组

在 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 中任取 $r$ 个线性无关的向量 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ ,在其余向量中任取 $\alpha_l$

由于 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}, \alpha_l$ 可以由 $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出.据引理得, $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}, \alpha_l$ 线性相关

又 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性无关所以 $\alpha_l$ 可以由 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性表示由 $\alpha_l$ 的任意性

因此 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组

2. 设  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组

由已知条件得,  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  可以由  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$  线性表出

$\implies r = \text{rank} \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\} \leq \text{rank} \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}\}$ , 从而  $\text{rank} \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}\} = r$ , 因此  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$  线性无关

据定义得,  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$  是  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组

### Exercise 3.6

证明: 在  $n$  维向量空间  $K^n$  中,  $n$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\iff K^n$  中任一向量都可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出

**Proof** 实际上我们从线性空间基的判别法很容易知道.

$n$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\iff \alpha_1 \sim \alpha_n$  为  $K^n$  一组基  $\iff K^n$  中任一向量都可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出

### Exercise 3.7

证明: 如果向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  与向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta$  有相等的秩, 那么  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出

**Proof** 设  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  是向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组. 由已知条件得  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta$  的秩为  $r$

因此根据线性空间基的判别法向量组的形式得,  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  是向量组  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta$  的一个极大线性无关组

于是  $\beta$  可以由  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}$  线性表出, 从而  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  线性表出。

### Exercise 3.8

设向量  $\beta$  可以由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 但是  $\beta$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  线性表出

证明:  $\text{rank} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = \text{rank} \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta\}$

**Proof** 不妨设  $\beta = \alpha_s + k_{s-1}\alpha_{s-1} + \dots + k_1\alpha_1 \implies \alpha_s = \beta - k_{s-1}\alpha_{s-1} - \dots - k_1\alpha_1$  (\*)

取  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \beta\}$  的一组极大无关组记为  $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}, \beta$ .  $\implies \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}\}$  能被  $\{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}, \beta\}$  表示

上述操作是一定会包含  $\beta$  的, 不然  $\beta$  就可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$  表示与题干矛盾

此时我们只需证  $\alpha_s$  能够被  $\{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}, \beta\}$  表示即可. 这是因为由 (\*) 式子知  $\alpha_s$  能够被  $\{\beta, \alpha_{s-1} \dots \alpha_1\}$  表示

而又  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}\}$  能被  $\{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r}, \beta\}$  表示. 故证毕

### Exercise 3.9

证明: 如果  $m \times n$  矩阵  $A$  的秩为  $r$ , 那么它的任何  $s$  行组成的子矩阵  $A_1$  的秩大于或等于  $r + s - m$

**Proof** 设矩阵  $A$  的行向量组为  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  任取  $A$  的  $s$  行组成子矩阵  $A_1$ . 设  $A_1$  的秩为  $l$ .

取  $A_1$  的行向量组的一个极大线性无关组  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_l}$ . 把它扩充成  $A$  的行向量组的极大线性无关组  $\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_l}, \gamma_{i_{l+1}}, \dots, \gamma_{i_r}$ .

显然  $\gamma_{i_{l+1}}, \dots, \gamma_{i_r}$  不是  $A_1$  的行向量, 因此  $r - l \leq m - s$ . 由此得出  $l \geq r + s - m$ .

**Exercise 3.10**

$$\text{证明: 线性方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (*) \text{ 有解的充分必要条件}$$

$$\text{是下述线性方程组} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{s1}x_s = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{s2}x_s = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{sn}x_s = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_sx_s = 1 \end{cases} \quad (**) \text{ 无解}$$

**Proof** 法一:

用  $\mathbf{A}$  和  $\tilde{\mathbf{A}}$  分别表示线性方程组 (\*) 的系数矩阵和增广矩阵. 用  $\mathbf{B}$  和  $\tilde{\mathbf{B}}$  分别表示方程组 (\*\*) 的系数矩阵和增广矩阵

令  $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_s)'$ , 则  $\mathbf{B} = (\tilde{\mathbf{A}})'$   $\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}' & 1 \end{pmatrix}$ . 设  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_r}$  是  $\tilde{\mathbf{B}}$  的前  $n$  行的一个极大线性无关组.

$\tilde{\mathbf{B}}$  的最后一行  $\gamma_{n+1} = (\boldsymbol{\beta}', 1)$  不可能由  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_r}$  线性表出 (因为零相加不可能得到 1)

因此  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_r}, \gamma_{n+1}$  线性无关, 从而它是  $\tilde{\mathbf{B}}$  的行向量组的一个极大线性无关组

于是  $\text{rank}(\tilde{\mathbf{B}}) = r + 1 = \text{rank}(\mathbf{A}') + 1 = \text{rank}(\mathbf{A}) + 1$

从而线性方程组 (\*) 有解

$$\begin{aligned} &\iff \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) \\ &\iff \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{A}}') = \text{rank}(\mathbf{B}), \text{ 且 } \text{rank}(\tilde{\mathbf{B}}) = \text{rank}(\mathbf{A}) + 1 \\ &\iff \text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{B}), \text{ 且 } \text{rank}(\tilde{\mathbf{B}}) = \text{rank}(\mathbf{B}) + 1 > \text{rank}(\mathbf{B}) \\ &\iff \text{线性方程组(**) 无解} \end{aligned}$$

法二:

用  $\mathbf{A}$  和  $\tilde{\mathbf{A}}$  分别表示线性方程组 (\*) 的系数矩阵和增广矩阵. 用  $\mathbf{B}$  和  $\tilde{\mathbf{B}}$  分别表示方程组 (\*\*) 的系数矩阵和增广矩阵

令  $\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_s)'$ , 则  $\mathbf{B} = (\tilde{\mathbf{A}})'$   $\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}' & 1 \end{pmatrix}$ .

一方面: 若 (\*) 方程组有解  $\iff r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta})$

$$\text{问是否我们有 } r(\mathbf{B}) < r(\tilde{\mathbf{B}}) \iff r((\tilde{\mathbf{A}})') < r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}' & 1 \end{pmatrix}\right) \iff r(\tilde{\mathbf{A}}) < r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{s \times n} & \boldsymbol{\beta}_{s \times 1} \\ \vec{0}_{1 \times n} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix}\right) \iff r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) < r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{s \times n} & \boldsymbol{\beta}_{s \times 1} \\ \vec{0}_{1 \times n} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix}\right)$$

$$\iff r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) < r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{s \times n} & \vec{0}_{s \times 1} \\ \vec{0}_{1 \times n} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix}\right) \text{ (利用分块初等变换)} \iff r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}) + 1$$

上式显然成立故证毕

$$\text{另一方面: 若 (**) 无解} \iff r(\mathbf{B}) < r(\tilde{\mathbf{B}}) \iff r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) < r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{s \times n} & \boldsymbol{\beta}_{s \times 1} \\ \vec{0}_{1 \times n} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix}\right) \iff r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) = r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{s \times n} & \boldsymbol{\beta}_{s \times 1} \\ \vec{0}_{1 \times n} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix}\right) - 1$$

$$\iff r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) = r\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{s \times n} & \vec{0}_{s \times 1} \\ \vec{0}_{1 \times n} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix}\right) - 1 \iff r(\mathbf{A})$$

上式证毕

**Exercise 3.11**

已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数矩阵  $\mathbf{A}$  的秩等于下述矩阵  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$  的秩

证明此线性方程组有解

**Proof** 法一：

反证法：若方程组无解，那么就有  $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) \implies r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) - 1$

易知  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\beta}^T & 0 \end{pmatrix}$  而我们将  $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta})$  看成整体显然  $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta})$  或者  $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) + 1$

带入  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \boldsymbol{\beta}) - 1$  得到  $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) + 1$  或者  $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) + 2$  这与题干的  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$  矛盾

法二：

易知  $\mathbf{B}$  矩阵包含子矩阵  $\mathbf{A}$  那么得到  $r(\mathbf{B}) \geq r(\tilde{\mathbf{A}}) \implies r(\mathbf{A}) \geq r(\tilde{\mathbf{A}})$  又  $r(\mathbf{A}) \leq r(\tilde{\mathbf{A}}) \implies r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}})$  故有解

**Exercise 3.12**

1. 设  $n$  个方程的  $n$  元齐次线性方程组的系数矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式等于 0, 并且  $\mathbf{A}$  的  $(k, l)$  元的代数余子式  $\mathbf{A}_{kl} \neq 0$

证明： $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{k1} \\ \mathbf{A}_{k2} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{kn} \end{pmatrix}$  是这个齐次线性方程组的一个基础解系

2. 证明：如果  $n(n > 1)$  级矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式等于 0, 那么  $\mathbf{A}$  的任何两行 (或两列) 对应元素的代数余子式成比例

**Proof**

1. 由于  $\mathbf{A}_{kl} \neq 0$ , 因此  $\mathbf{A}$  有一个  $n-1$  阶子式不为 0, 又由于  $|\mathbf{A}| = 0$ , 因此  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n-1$

从而这个齐次线性方程组的解空间  $W$  的维数为  $n - (n-1) = 1$

考虑这个齐次线性方程组的第  $i$  个方程： $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$

当  $i \neq k$  时, 有  $a_{i1}\mathbf{A}_{k1} + a_{i2}\mathbf{A}_{k2} + \cdots + a_{in}\mathbf{A}_{kn} = 0$ ;

当  $i = k$  时, 有  $a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + a_{k2}\mathbf{A}_{k2} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn} = |\mathbf{A}| = 0$ ;

因此  $\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}_{k1}, \mathbf{A}_{k2}, \dots, \mathbf{A}_{kn})'$  是这个齐次线性方程组的一个解由于  $\mathbf{A}_{kl} \neq 0$ , 因此  $\boldsymbol{\eta}$  是非零解, 从而  $\boldsymbol{\eta}$  线性无关.

由于  $\dim W = 1$ , 因此  $\boldsymbol{\eta}$  是  $W$  的一个基, 即  $\boldsymbol{\eta}$  是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

2. 容易知道, 若所有代数余子式都为零显然成比例

若有一代数余子式不为零  $\implies$  有一  $n-1$  阶子式不为 0  $\implies r(\mathbf{A}) = n-1 \implies$  解空间维数 = 1

故由之前的习题知道  $\eta = \begin{pmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{pmatrix}$  为基础解系, 故成比例

### Exercise 3.13

Q1. 设  $n-1$  个方程的  $n$  元齐次线性方程组的系数矩阵为  $B$ , 把  $B$  划去第  $j$  列得到的  $n-1$  阶子式记作  $D_j$

$$\text{令 } \eta = \begin{pmatrix} D_1 \\ -D_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} D_n \end{pmatrix}$$

证明:

- (1)  $\eta$  是这个齐次线性方程组的一个解
- (2) 如果  $\eta \neq 0$ , 那么  $\eta$  是这个齐次线性方程组的一个基础解系

Q2. 设  $A$  是由  $1, 2, \dots, n$  形成的  $n$  级范德蒙矩阵.  $A$  的前  $n-1$  行组成的子矩阵记作  $B$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-2} & \cdots & n^{n-2} \end{pmatrix}_{n-1 \times n}$$

证明:  $\eta = (C_{n-1}^0, -C_{n-1}^1, \dots, (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1})'$  是以  $B$  为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系

### Proof

Q1.

(1) 在所给的齐次线性方程组的下面添上一个方程:  $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ , 得到  $n$  个方程的  $n$  元齐次线性方程组

其系数矩阵  $A = \begin{pmatrix} B \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ . 而  $A$  的  $(n, j)$  元的代数余子式  $A_{nj}$  为  $A_{nj} = (-1)^{n+j} D_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$

原齐次线性方程组的第  $i$  个方程 ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 为  $b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n = 0$

对  $|A|$  用行列式按一行展开定理, 得  $b_{i1}A_{n1} + b_{i2}A_{n2} + \cdots + b_{in}A_{nn} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$

由此得出,  $(D_1, -D_2, \dots, (-1)^{n-1} D_n)'$  是原齐次线性方程组的一个解

(2) 若  $\eta \neq 0 \implies$  某个  $n-1$  阶子式  $\neq 0 \implies r(A) \geq n-1$  由  $r(A) \leq \min\{n-1, n\} \implies r(A) = n-1$

故解空间  $W$  的维数为  $n - (n-1) = 1$  故基础解系只含有一个向量

Q2.

Lemma1 我们将  $B$  划去第  $j$  列的矩阵记为  $B_j$ . 先来计算  $|B_j| = C_{n-1}^{j-1} \prod_{k=1}^{n-2} k!$

$$|B_j| = B \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j-1 & j & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & \cdots & (j-1)^2 & (j+1)^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-2} & 2^{n-2} & \cdots & (j-1)^{n-2} & (j+1)^{n-2} & \cdots & n^{j-2} \end{vmatrix}_{n-1 \times n-1}$$

$$= \frac{(n-1)! \times (n-2)! \times \cdots \times (n-(j-1))! \times (n-(j+1))! \times \cdots \times 1}{(j-1)!(j-2)\cdots(1)} = \frac{1}{(j-1)!(n-j)!} \prod_{k=1}^{n-1} k!$$

$$= \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} \prod_{k=1}^{n-2} k!$$

$$= C_{n-1}^{j-1} \prod_{k=1}^{n-2} k!$$

而  $\mathbf{B}$  的前面  $n-1$  列又构成了一个范德蒙行列式故  $\mathbf{B}_n \neq 0$ , 此时我们根据  $Q1$  的结论知道, 就是得到了  $\boldsymbol{\eta} \neq 0$

那么  $\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} B_1 \\ -B_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} B_n \end{pmatrix}$  就为一个基础解系; 再将  $|\mathbf{B}_j| = C_{n-1}^{j-1} \prod_{k=1}^{n-2} k!$  带入再将  $\prod_{k=1}^{n-2} k!$  常数项除掉即可得到答案

### Exercise 3.14

证明: 当  $i = 0, 1, \dots, n-2$  时有 1.  $\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C_{n-1}^m (m+1)^i = 0$  2.  $\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C_{n-1}^m (n-m)^i = 0$

**Proof** 由上个 Exercise 知道本题的 1. 即为  $Q2$  的结论.

再在 2. 中将 1. 中的  $m$  替换为  $n-1-m'$  即可.  $m = n-1-m'$

此时断言  $\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C_{n-1}^m (m+1)^i = 0 = \sum_{m'=0}^{n-1} (-1)^{m'} C_{n-1}^{m'} (n-m')^i$

此时  $n-m' = m+1$  且由二项式公式的结论知道  $C_{n-1}^{m'} = C_{n-1}^{n-1-m} = C_{n-1}^m$

而  $(-1)^{m'} = (-1)^{n-1-m}$  该与  $(-1)^m$  相差一个  $(-1)^{n-1}$  实际上就是一个符号而对于题干中证明  $= 0$ , 是不打紧的

### Exercise 3.15

设  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  是  $s \times n$  矩阵,  $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$

以  $\mathbf{A}$  为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系为  $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{pmatrix} b_{n-r,1} \\ b_{n-r,2} \\ \vdots \\ b_{n-r,n} \end{pmatrix}$

设  $\mathbf{B}$  是以  $\boldsymbol{\eta}'_1, \boldsymbol{\eta}'_2, \dots, \boldsymbol{\eta}'_{n-r}$  为行向量组的  $(n-r) \times n$  矩阵. 试求以  $\mathbf{B}$  为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系

**Proof** 由于  $\mathbf{B}$  的行向量组  $\boldsymbol{\eta}'_1, \boldsymbol{\eta}'_2, \dots, \boldsymbol{\eta}'_{n-r}$  线性无关, 因此  $\text{rank}(\mathbf{B}) = n-r$

从而以  $\mathbf{B}$  为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间  $W$  的维数为  $\dim W = n - (n-r) = r$

由于  $\boldsymbol{\eta}_j$  是以  $\mathbf{A}$  为系数矩阵的齐次线性方程组的一个解

因此对于  $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ , 有  $a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \dots + a_{in}b_{jn} = 0$ , 其中  $j = 1, 2, \dots, n-r$

由此看出  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})'$  是以  $\mathbf{B}$  为系数矩阵的齐次线性方程组的一个解

取  $\mathbf{A}$  的行向量组的一个极大线性无关组  $\boldsymbol{\gamma}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\gamma}_{i_r}$ , 则由上述结论得,  $\boldsymbol{\gamma}'_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\gamma}'_{i_r}$  都是以  $\mathbf{B}$  为系数矩阵的齐次线性方程组的解

由于  $\dim W = r$ , 因此  $\boldsymbol{\gamma}'_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\gamma}'_{i_r}$  是  $W$  的一个基

即  $\mathbf{A}$  的行向量组的一个极大线性无关组取转置后, 是以  $\mathbf{B}$  为系数矩阵的齐次线性方程组的一个基础解系。

**Exercise 3.16**

已知 $A$ 是 $n$ 阶对称矩阵, $\beta$ 为 $n$ 维非零列向量, $B = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$

证明

(1)若 $r(A) = r$ ,则 $r(B) = r$ 的充要条件为方程组  $\begin{cases} AX = \beta; \\ \beta'X = 0. \end{cases}$  有解

(2)若 $r(A) = n - 1$ ,则 $B$ 可逆的充要条件为 $AX = \beta$ 无解.

**Proof** (1) :

充分性: 若方程组  $\begin{cases} AX = \beta; \\ \beta'X = 0. \end{cases}$  有解  $\iff \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$  有解

同时也意味着 $AX = \beta$ 单独来看也是有解的  $\implies r \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = r(A)$

$$\implies r \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A' & \beta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = r(A)$$

$$\implies r(B) = r(A) = r$$

必要性:

法一: 若方程组  $\begin{cases} AX = \beta; \\ \beta'X = 0. \end{cases}$  有解  $\iff r \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix}$  于是我们下面就来证明  $r \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix}$

$$\implies r = r(A) \leq r \begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix} \leq r \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} = r$$

$$\implies r \begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix}$$

法二:  $r(A) = r$ , 设 $A$ 中列向量组 $A = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ 中 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关

那么此时对应 $B$ 中的 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 也是线性无关的 ( $\beta_i$ 是 $\alpha_i$ 的伸长组)

又 $r(B) = r$ 故  $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$  可以由 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 表示那么亦可由 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 表示即:  $\begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$  有解

(2)

必要性:

因为 $B$ 可逆  $\implies r(B) = n + 1$  故 $B$ 的 $n + 1$ 个行向量组线性无关则  $r \begin{pmatrix} A & \beta \end{pmatrix} = n$

故  $n - 1 = r(A) \neq r(A, \beta) = n$  故方程组  $AX = \beta$  无解

充分性:

若 $AX = \beta$ 无解  $\implies r(A, \beta) = r(A) + 1 = n$  进一步:  $n + 1 \geq r(B) = r \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} \geq r(A, \beta) = n$

断言 $r(B) = n + 1$ 若 $r(B) = n$ 则:

$r \begin{pmatrix} A & \beta \\ \beta' & 0 \end{pmatrix} = n = r(A, \beta) = r \begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} A \\ \beta' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$  有解  $\implies AX = \beta$  有解, 与充分性条件矛盾

**Exercise 3.17**

设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d > 0$ . 证明: 一定存在 $A$ 的特征向量  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , 满足 $x, y > 0$ .

**Proof** 首先注意到  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$ .

由于  $a, b, c, d > 0$ , 所以上述特征多项式的判别式  $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc \geq 4bc > 0$ .

即  $A$  存在两个互异的实特征值, 取特征值  $\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2} > \frac{a+d+|a-d|}{2} = \max\{a, d\}$ .

由于  $|\lambda_1 E - A| = 0$ , 即  $\lambda_1 E - A$  两个行向量线性相关, 且其第一个行向量  $(\lambda_1 - a, -b)$  非零

所以  $(\lambda_1 - a, -b)$  是  $\lambda_1 E - A$  行向量的极大线性无关组, 于是方程组  $(\lambda_1 E - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  与  $(\lambda_1 - a)x - by = 0$  同解

而明显  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix}$  是  $(\lambda_1 - a)x - by = 0$  的特解, 进而其是  $A$  的属于特征值  $\lambda_1$  的特性向量, 并且  $x = b > 0, y = \lambda_1 - a > 0$ .

### Exercise 3.18

已知  $A, B$  分别是  $s \times n$  与  $r \times n$  的矩阵,  $a, b$  分别是  $s$  维与  $r$  维列向量. 则

(1) 线性方程组  $AX = a$  的解都是  $BX = b$  的解的充要条件是  $(B, b)$  的每一个行向量都可以由  $(A, a)$  的行向量线性表出.

其中  $(A, a), (B, b)$  分别是方程组  $AX = a$  与  $BX = b$  的增广矩阵;

(2) 线性方程组  $AX = a$  与  $BX = b$  同解充要条件是  $(A, a)$  的行向量与  $(B, b)$  的行向量等价.

其中  $(A, a), (B, b)$  分别是方程组  $AX = a$  与  $BX = b$  的增广矩阵.

(这里默认是都是有解的情况下讨论)

**Proof** (1): 已知线性方程组  $AX = a$  的解都是  $BX = b$  的解  $\implies \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  与  $AX = a$  同解

此时断言  $AX = 0$  与  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$  同解  $\implies r(A) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

这是先不妨设  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  与  $Ax_0 = a$ , 再若有  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x_1 = 0$  则  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} (x_0 + x_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$\implies A(x_0 + x_1) = a \implies Ax_1 = 0$

那么此时  $r(A, a) = r(A) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix}$

$\implies (B, b)$  的每一个行向量都可以由  $(A, a)$  的行向量线性表出.

已知:  $(B, b)$  的每一个行向量都可以由  $(A, a)$  的行向量线性表出. 亦有  $B$  的行向量可以由  $A$  的行向量表出

$\implies r(A, a) = r \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix}$  亦有  $r(A) = r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$\implies Ax = 0$  与  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0$  同解  $\implies$  若  $Ax_1 = 0$  那么也会有  $Bx_1 = 0$

此时  $r \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = r(A) = r(A, a) = r \begin{pmatrix} A & a \\ B & b \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  有解

设有  $Ax_0 = a, Bx_0 = b$  且若有  $Ax_1 = a$  但是  $Bx_1 \neq b$

此时  $x_1 - x_0$  是  $Ax = 0$  解  $\implies x_1 - x_0$  也是  $Bx = 0$  的解  $\implies Bx_1 = b$  矛盾

$\implies$  若有  $Ax_1 = a$  则一定  $Bx_1 = b$

(2) 利用1两次即可

### Exercise 3.19

已知 $A$ 是一个 $s \times n$ 的矩阵, 证明: 对于任意的列向量 $b_{s \times 1}$ ,  $AX = b$ 都有解的充要条件是 $r(A) = s$  (即 $A$ 行满秩).

**Proof**  $\Leftarrow$  显然

$\Rightarrow$ :

法一: 由充分性条件得到 $\forall b$ 都有 $r(A) = r(A, b)$

若 $A$ 不是行满秩则不妨可以设 $A$ 的最后一行可以由前面行表出

那么不妨设 $\alpha_s = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1}$

那么做行变换把 $A$ 的最后一行消去, 得到 $\begin{pmatrix} A_1 & \beta_1 \\ 0 & \beta^* \end{pmatrix}$ 对任意的 $\beta_1$ 与 $\beta^*$ 都成立

此时我们应该要有 $r(A_1) = \begin{pmatrix} A_1 & \beta_1 \\ 0 & \beta^* \end{pmatrix}$ 我们只要适当选取 $\beta$ 即可得到矛盾

法二:

取 $b$ 依次为 $e_1 \cdots e_n$ 则 $AX = I_s$ 有解则 $s \geq r(A) = r(A, I_s) \geq s \Rightarrow r(A) = s$

### Exercise 3.20

设 $A$ 是一个 $m \times n$ 的实矩阵,  $b$ 为任一 $m$ 维实列向量, 则方程组 $A'AX = A'b$ 一定有解.

**Proof** 因为 $r(A'A) = r(A)$ , 所以 $r(A'A, A'b) = r(A'(A, b)) \leq r(A') = r(A) = r(A'A)$ .

而显然 $r(A'A) \leq r(A'A, A'b)$ , 所以 $r(A'A, A'b) = r(A'A)$ , 这就说明方程组 $A'AX = A'b$ 一定有解.

### Exercise 3.21

$A$ 是 $n$ 级反称矩阵,  $b$ 为 $n$ 维列向量, 则 $AX = b$ 有解的  $\iff r(A) = r\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$

**Proof**  $\implies$  设有 $Ax_0 = b$ 则 $b' = x_0'A'$ 则 $b'x_0 = x_0'A'x_0 = -x_0'Ax_0 = 0$

(因为 $A$ 是 $n$ 级反称矩阵  $\implies x'Ax = (x'Ax)' = x'A'x = -x'Ax \implies x'Ax = 0$ )

此时:  $(b', 0)$  可由  $(A, b)$  表示故 $r(A, b) = r\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ : 一方面:  $r\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix} = r(A) \leq r(A, b)$

另一方面 $r(A) = r\begin{pmatrix} A & b \\ b' & 0 \end{pmatrix} \geq r(A, b)$

$\implies r(A) = r(A, b) \implies AX = b$ 有解

### Exercise 3.22

证明线性方程组 $AX = b$ 无解的充要条件是: 存在行向量 $c$ 使得 $cA = 0$ 且 $cb = 1$ .

**Proof** 存在  $c$  使得  $cA = 0$  且  $cb = 1 \iff$  存在  $c$  使得  $A'c' = 0$  且  $b'c' = 1 \iff \begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  有解  $X = c' \iff r \begin{pmatrix} A' \\ b' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix}$

$\iff r(A, b) = r \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff r(A, b) = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r(A) + 1. \iff$  线性方程组  $AX = b$  无解.

注. 倒数第二个等价关系是因为  $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  可以经过初等行变换化为  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 从而  $r \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r(A) + 1.$

### Exercise 3.23

已知  $m < n$ , 矩阵  $A_{m \times n}$  行满秩,  $B_{n \times (n-m)}$  列满秩, 且  $AB = O$ , 则对方程  $AX = 0$  的任意解  $X_0$ , 方程组  $BX = X_0$  有唯一解

**Proof** 首先, 由  $B$  列满秩可以得到  $BX = 0$  只有零解, 即方程组  $BX = X_0$  的导出组只有零解.

其次, 由  $A$  行满秩, 得  $AX = 0$  基础解系所含向量的个数为  $n - m$

而  $AB = O$  可得  $B$  的  $n - m$  个线性无关的列向量都是  $AX = 0$  的解, 所以  $B$  的列向量组成方程组  $AX = 0$  的一个基础解系

我们设为  $\beta_1, \dots, \beta_{n-m}$ , 于是可设  $X_0 = k_1\beta_1 + \dots + k_{n-m}\beta_{n-m}$ .

自然有  $r(B) = r(B, X_0)$ , 所以方程组  $BX = X_0$  有解, 而它的导出组只有零解, 所以  $BX = X_0$  有唯一解.

### Exercise 3.24

**Proof**

### Exercise 3.25

**Proof**

### Exercise 3.26

**Proof**

### Exercise 3.27

**Proof**

**Exercise 3.28** 设 $V$ 是实数域上连续函数全体构成的实线性空间, 求证下列函数线性无关:

- (1)  $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ ;
- (2)  $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ ;
- (3)  $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ .

**Proof** 证法1根据向量线性无关的基本性质, 我们只要证明(3)即可. 对 $n$ 进行归纳.

当 $n=0$ 时, 显然1作为一个函数线性无关. 假设命题对小于 $n$ 的自然数成立, 现证明等于 $n$ 的情形.

设 $a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \dots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0$ , 其中 $a, b_i, c_i$ 都是实数.

对上式两次求导, 可得 $-b_1 \sin x - c_1 \cos x - 4b_2 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x - \dots - n^2 b_n \sin nx - n^2 c_n \cos nx = 0$ ,

再将第一个式子乘以 $n^2$ 加到第二个式子上, 可得 $an^2 + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (n^2 - i^2) \sin ix + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (n^2 - i^2) \cos ix = 0$ ,

由归纳假设即得 $a = b_1 = c_1 = \dots = b_{n-1} = c_{n-1} = 0$ . 将此结论代入第一个式子可得 $b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0$ .

若 $b_n \neq 0$  ( $c_n \neq 0$ ), 则 $\tan nx = -c_n/b_n$  ( $\cot nx = -b_n/c_n$ ) 为常数, 矛盾. 因此 $b_n = c_n = 0$ .

证法2设 $f(x) = a + b_1 \sin x + c_1 \cos x + b_2 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \dots + b_n \sin nx + c_n \cos nx = 0$ , 其中 $a, b_i, c_i$ 都是实数.

依次设 $g(x) = 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ , 并分别计算定积分 $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ 可得 $a = b_1 = c_1 = \dots = b_n = c_n = 0$ .

□

**Exercise 3.29** 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 又

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1r}\alpha_r, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2r}\alpha_r, \\ \beta_r = a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r. \end{cases}$$

求证:  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关的充要条件是系数矩阵 $A = (a_{ij})_{r \times r}$ 的行列式为零.

**Proof** 记 $A$ 的行向量为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ . 若 $|A| = 0$ , 则 $A$ 的行向量线性相关, 即存在不全为零的 $r$ 个数 $c_1, c_2, \dots, c_r$

使 $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r = 0$ . 经简单计算可得 $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_r\beta_r = 0$ , 从而 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关.

反之, 若 $A$ 可逆, 如有 $k_1, k_2, \dots, k_r$ , 使 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_r\beta_r = 0$ , 将 $\beta_i$ 代入, 可得 $k_i$ 为未知数的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{r1}k_r = 0, \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{r2}k_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1r}k_1 + a_{2r}k_2 + \dots + a_{rr}k_r = 0. \end{cases}$$

因为 $A$ 可逆, 所以该方程组只有零解, 故 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关. □

**Exercise 3.30** 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是一组线性无关的向量, 若向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 可用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示如下:

$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m, \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_k = a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \dots + a_{km}\alpha_m. \end{cases} \quad \text{记表示矩阵 } A = (a_{ij})_{k \times m}.$$

求证: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ 的秩等于 $r(A)$ .

**Proof**

设 $r(A) = r$ . 记 $A$ 的 $k$ 个行向量为 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ . 不失一般, 可假定 $A$ 的前 $r$ 个行向量线性无关, 其余行向量均可用前 $r$ 个行向量线性表示.

若 $\gamma_i = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \dots + c_r\gamma_r$ , 则经过简单计算可得 $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_r\beta_r = \beta_i$ .

另一方面, 若 $c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_r\beta_r = 0$ , 则 $c_1(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1m}\alpha_m) + \dots + c_r(a_{r1}\alpha_1 + \dots + a_{rm}\alpha_m) = 0$ ,

即  $(c_1 a_{11} + \cdots + c_r a_{r1}) \alpha_1 + \cdots + (c_1 a_{1m} + \cdots + c_r a_{rm}) \alpha_m = 0$ .

$$\text{因为 } \alpha_1, \cdots, \alpha_m \text{ 线性无关, 得 } \begin{cases} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{r1}c_r = 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{r2}c_r = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1m}c_1 + a_{2m}c_2 + \cdots + a_{rm}c_r = 0. \end{cases}$$

将上述方程组看成是未知数  $c_i$  的齐次线性方程组, 其系数矩阵的秩为  $r$ , 未知数个数也是  $r$ , 因此只有唯一组解, 即零解.

这表明  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$  是向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的极大无关组, 因此向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的秩等于  $r$ .

证法2 令  $V$  是由  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  生成的向量空间. 因为  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$  线性无关, 故它们组成  $V$  的一组基,  $V$  的维数等于  $m$ .

注意到  $\beta_i$  在这组基下的坐标向量为  $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})'$ , 则列向量组成的矩阵就是  $A'$ , 则向量组  $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$  的秩等于  $r(A') = r(A)$ .

**Exercise 3.31 拉格朗日插值公式** 设  $V$  是由数域  $\mathbb{K}$  上次数小于  $n$  的多项式全体构成的线性空间,  $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$  是  $\mathbb{K}$  中互不相同的  $n$  个数  $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$ ,  $f_i(x) = f(x)/(x - a_i)$ , 求证:  $\{f_i(x) (i = 1, 2, \cdots, n)\}$  组成  $V$  的一组基.

**Proof** 因为  $V$  是  $n$  维线性空间, 故只需证明  $n$  个向量  $f_i(x) (i = 1, 2, \cdots, n)$  线性无关即可.

设  $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$ , 依次令  $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ , 即可求出  $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$ . □

**Exercise 3.32** 证明下列线性空间是实数域上的无限维线性空间:

- (1) 实数域  $\mathbb{R}$  上的连续函数全体构成的线性空间  $C(\mathbb{R})$ ;
- (2) 以 0 为极限的实数数列全体构成的线性空间  $V = \{ \{a_n\} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \}$

**Proof** 我们用反证法来证明.

(1) 若  $C(\mathbb{R})$  是有限维线性空间, 则可取到正整数  $k > \dim C(\mathbb{R})$ .

然而由例可知  $\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin kx$  是  $\mathbb{R}$ -线性无关的, 矛盾.

(2) 若  $V$  是有限维线性空间, 则可取到正整数  $k > \dim V$ . 构造  $V$  中  $k$  个数列:  $\left\{ a_n^{(1)} = \frac{1}{n} \right\}, \left\{ a_n^{(2)} = \frac{1}{n^2} \right\}, \cdots, \left\{ a_n^{(k)} = \frac{1}{n^k} \right\}$ .

设有实数  $c_1, c_2, \cdots, c_k$ , 使得  $c_1 \left\{ a_n^{(1)} \right\} + c_2 \left\{ a_n^{(2)} \right\} + \cdots + c_k \left\{ a_n^{(k)} \right\} = \{0\}$ , 则对于任意的正整数  $n$ , 成立  $\frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_k}{n^k} = 0$ . 任取  $k$  个不同的正整数代入上式, 并利用 Vander Monde 行列式即得  $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ , 从而上述  $k$  个数列线性无关, 矛盾. □

**Exercise 3.33** 构造下列线性空间之间的线性同构:

- (1)  $V$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶上三角矩阵构成的线性空间,  $U$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶对称矩阵构成的线性空间;
- (2)  $V$  是  $n$  阶 Hermite 矩阵构成的实线性空间,  $U$  是  $n$  阶斜 Hermite 矩阵构成的实线性空间.

**Proof** (1)  $\varphi: V \rightarrow U$  定义为: 对任意的  $A = (a_{ij}) \in V$ , 当  $i \leq j$  时, 矩阵  $\varphi(A)$  的第  $(i, j)$  元素为  $a_{ij}$ ; 当  $i > j$  时, 矩阵  $\varphi(A)$  的第  $(i, j)$  元素为  $a_{ji}$ . 容易验证  $\varphi: V \rightarrow U$  是定义好的映射, 并且是数域  $\mathbb{K}$  上的线性同构.

(2)  $\varphi: V \rightarrow U$  定义为: 对任意的  $A = (a_{ij}) \in V$ ,  $\varphi(A) = iA$ . 容易验证  $\varphi: V \rightarrow U$  是定义好的映射, 并且是实数域上的线性同构. 注意到  $\varphi$  的逆映射  $\psi: U \rightarrow V$  为:  $\psi(B) = -iB$ .

**Exercise 3.34** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  是向量空间  $V$  中的向量且

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1k}\alpha_k, \\ \beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{2k}\alpha_k, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_m = c_{m1}\alpha_1 + c_{m2}\alpha_2 + \dots + c_{mk}\alpha_k. \end{cases}$$

记上述表示式中的系数矩阵为  $C = (c_{ij})_{m \times k}$

- (1) 若  $r(C) = k$ , 则这两组向量等价.
- (2) 若  $r(C) = r$ , 则向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  的秩不超过  $r$ .

**Proof** (1) 在  $V$  中取定一组基  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 假定在这组基下  $\alpha_i$  的坐标向量是  $\tilde{\alpha}_i (i = 1, \dots, k)$ ,  $\beta_j$  的坐标向量是  $\tilde{\beta}_j (j = 1, \dots, m)$ , 则

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_1 = c_{11}\tilde{\alpha}_1 + c_{12}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{1k}\tilde{\alpha}_k, \\ \tilde{\beta}_2 = c_{21}\tilde{\alpha}_1 + c_{22}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{2k}\tilde{\alpha}_k, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{\beta}_m = c_{m1}\tilde{\alpha}_1 + c_{m2}\tilde{\alpha}_2 + \dots + c_{mk}\tilde{\alpha}_k, \end{cases}$$

写成矩阵形式为  $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m) = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k) C'$ .

因为  $C'$  是一个行满秩  $k \times m$  矩阵, 根据定理, 存在列满秩  $m \times k$  矩阵  $T$ , 使  $C'T = I_k$ , 于是  $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_m)T = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_k)$ .

这表明  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  可以用  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  来线性表示. 于是这两组向量等价.

(2) 类似于 (1) 的讨论, 可以用两个矩阵积的秩不超过每个矩阵的秩得到. □

**注** 这是对两个向量组表示的秩关系的最准确表示, 包含了以下两点

- (1)  $\{\alpha_1 \sim \alpha_n\}$  能够被  $\{\beta_1 \sim \beta_m\}$  表示则  $r(\alpha) \leq r(\beta)$
- (2) 问题 3.3

**Exercise 3.35** 设  $V = M_n(\mathbb{K})$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵全体组成的线性空间,  $A \in V$

- 求证: 与  $A$  乘法可交换的矩阵全体  $C(A)$  组成  $V$  的子空间. 又若  $T$  是  $V$  的非空子集
- 求证: 与  $T$  中任一矩阵乘法可交换的矩阵全体  $C(T)$  也构成  $V$  的子空间且其维数不为零.

**Proof** 任取  $B, C \in C(A), k \in \mathbb{K}$ , 容易验证  $B + C \in C(A), kB \in C(A)$ , 故  $C(A)$  是  $M_n(\mathbb{K})$  的子空间.

因为  $I_n \in C(A)$ , 所以  $C(A)$  的维数不为零.  $C(T)$  的结论同理可证. □

**Exercise 3.36** 若  $V = U \oplus W$  且  $U = U_1 \oplus U_2$ , 求证:  $V = U_1 \oplus U_2 \oplus W$ .

**Proof** 由  $U = U_1 \oplus U_2$  可得  $U_1 \cap U_2 = 0$ ; 由  $V = U \oplus W$  可得  $(U_1 + U_2) \cap W = U \cap W = 0$

因此可得  $U_1 + U_2 + W$  是直和, 从而  $V = U_1 + U_2 + W = U_1 \oplus U_2 \oplus W$ .

**Exercise 3.37** 求证: 每一个  $n$  维线性空间均可表示为  $n$  个一维子空间的直和.

**Proof** 设 $V$ 是 $n$ 维线性空间, 取其一组基为 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

设 $V_i = L(e_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 则 $V_i$ 是 $V$ 的一维子空间且 $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ .

1. 注意到  $\dim V = n = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ .

2. 注意到 $V_i$ 的基是 $\{e_i\}$ , 因此 $V_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )的基能拼成 $V$ 的基, 故也可得到结论.

3. 再注意到 $V$ 中任一向量写成基向量 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 的线性组合时, 其表示是唯一的.

这就是说,  $V$ 中任一向量写成 $V_i$ 中的向量之和时, 其表示是唯一的, 故由同样可得结论. □

**Exercise 3.38** 设 $V_1, V_2, \dots, V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 $V$ 的 $m$ 个真子空间, 证明: 在 $V$ 中必存在一个向量 $\alpha$ , 它不属于任何一个 $V_i$ .

**Proof** 对 $m$ 用归纳法. 当 $m = 1$ 时结论显然成立. 设 $m = k$ 时结论成立, 现要证明 $m = k + 1$ 时结论也成立.

由归纳假设, 存在向量 $\alpha$ , 它不属于任何一个 $V_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). 若 $\alpha$ 也不属于 $V_{k+1}$ , 则结论已成立

因此可设 $\alpha \in V_{k+1}$ . 在 $V_{k+1}$ 外选一个向量 $\beta$ . 作集合 $M = \{t\alpha + \beta \mid t \in \mathbb{F}\}$ .

事实上, 我们可将 $M$ 看成是通过 $\beta$ 的终点且平行于 $\alpha$ 的一根直线, 现要证明它和每个 $V_i$ 最多只有一个交点.

首先,  $M$ 和 $V_{k+1}$ 无交点, 因为若 $t\alpha + \beta \in V_{k+1}$ , 则从 $t\alpha \in V_{k+1}$ 可推出 $\beta \in V_{k+1}$ , 与假设矛盾.

又若 $t_1\alpha + \beta \in V_i, t_2\alpha + \beta \in V_i$  ( $i < k + 1$ ), 则 $(t_1 - t_2)\alpha \in V_i$ . 若 $t_1 \neq t_2$ , 将导致 $\alpha \in V_i$ , 与假设矛盾.

由此可以看到,  $M$ 中只有有限个向量属于 $V_i$ 的并集, 而 $t$ 有无穷多个选择, 由此即得结论. □

**注** 证明中用到任意一个数域都有无穷个元素这一事实, 因此, 对有限域 (以后可能会学到) 上的向量空间, 结论不一定成立.

**Exercise 3.39** 设 $V_1, V_2, \dots, V_m$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上向量空间 $V$ 的 $m$ 个真子空间, 证明:  $V$ 中必有一组基, 使得其中每个基向量都不在诸 $V_i$ 的并中.

**Proof** 由上个问题可知, 存在非零向量 $e_1 \in V$ , 使得 $e_1 \notin \bigcup_{i=1}^m V_i$ . 定义 $V_{m+1} = L(e_1)$

同理可知, 存在向量 $e_2 \in V$ , 使得 $e_2 \notin \bigcup_{i=1}^{m+1} V_i$ .

由向量组重要论断3可知,  $e_2 \notin L(e_1)$  意味着 $e_1, e_2$ 线性无关.

重新定义 $V_{m+1} = L(e_1, e_2)$ , 同理可知, 存在向量 $e_3 \in V$ , 使得 $e_3 \notin \bigcup_{i=1}^{m+1} V_i$ .

再由论断可知,  $e_3 \notin L(e_1, e_2)$  意味着 $e_1, e_2, e_3$ 线性无关.

不断重复上述讨论, 即添加线性无关的向量重新定义 $V_{m+1}$ , 并反复利用结论

最后可以得到 $n$ 个线性无关的向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ , 它们构成 $V$ 的一组基, 且满足 $e_j \notin \bigcup_{i=1}^m V_i, j = 1, 2, \dots, n$ . □

**注** 利用几何问题代数化这一技巧, 我们可以给出上述两道例题的一个统一解法.

任取 $V$ 的一组基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

对任意的正整数 $k$ , 构造 $V$ 中向量 $\alpha_k = e_1 + ke_2 + \dots + k^{n-1}e_n$  设向量族 $S = \{\alpha_k \mid k = 1, 2, \dots\}$ .

可知,  $S$ 中任意 $n$ 个不同的向量都构成 $V$ 的一组基. (利用坐标向量和范德蒙德行列式)

因为 $V_i$ 都是 $V$ 的真子空间, 所以每个 $V_i$ 至多包含 $S$ 中 $n - 1$ 个向量.

由于 $S$ 是无限集合, 故存在某个向量 $\alpha_k$ , 使得 $\alpha_k$ 不属于任何一个 $V_i$ , 这就证明了第一问

进一步, 在 $S$ 中还存在 $n$ 个不同的向量 $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}$ , 使得每个 $\alpha_{k_j}$ 都不属于任何一个 $V_i$ , 此时 $\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_n}\}$ 构成了 $V$ 的一组基证毕

**Exercise 3.40** 设  $A$  是  $m \times n$  实矩阵, 求证:  $r(A'A) = r(AA') = r(A)$ . 类似的可证明: 若  $A$  是  $m \times n$  复矩阵则  $r(\overline{A}'A) = r(A\overline{A}') = r(A)$

**Proof** 证明首先证明  $r(A'A) = r(A)$ , 为此我们将证明齐次线性方程组  $Ax = 0$  和  $A'Ax = 0$  同解.

显然  $Ax = 0$  的解都是  $A'Ax = 0$  的解. 反之, 若实向量  $\alpha$  是方程组  $A'A\alpha = 0$  的解, 则  $(A\alpha)'(A\alpha) = 0$ .

记  $A\alpha = (b_1, b_2, \dots, b_m)'$ , 则  $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_m^2 = 0$ . 因为  $b_i$  是实数, 故每个  $b_i = 0$ , 即  $A\alpha = 0$ , 也就是说,  $\alpha$  是  $Ax = 0$  的解.

这就证明了方程组  $Ax = 0$  和  $A'Ax = 0$  同解, 因此  $r(A'A) = r(A)$ .

在上述等式中用  $A'$  替代  $A$  可得  $r(AA') = r(A')$ , 又因为  $r(A) = r(A')$ , 故结论得证. □

**Exercise 3.41** 设  $A$  和  $B$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵, 若线性方程组  $Ax = 0$  和  $Bx = 0$  同解, 且每个方程组的基础解系含  $m$  个线性无关的向量  
求证:  $r(A - B) \leq n - m$ .

**Proof** 显然方程组  $Ax = 0$  的每个解都是方程组  $(A - B)x = 0$  的解, 因此解空间  $V_A \subseteq V_{A-B}$

$\Rightarrow n - r(A) \leq n - r(A - B) \Rightarrow r(A - B) \leq n - m$  □

**Exercise 3.42** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times k$  矩阵, 证明方程组  $ABx = 0$  和方程组  $Bx = 0$  同解的充要条件是  $r(AB) = r(B)$ .

**Proof** 注意到方程组  $Bx = 0$  的解都是方程组  $ABx = 0$  的解, 就是说  $Bx = 0$  的解空间  $V_B$  是  $ABx = 0$  的解空间  $V_{AB}$  的子空间.  $V_B \subseteq V_{AB}$   
两个线性方程组同解等价于它们的解空间重合, 即  $V_B = V_{AB}$ . 因为  $V_B \subseteq V_{AB}$ , 故  $V_B = V_{AB}$  的充要条件是  $\dim V_B = \dim V_{AB}$ .

这一点是非常必要的因为两个空间维数相等并不意味着空间相等

注意到  $\dim V_B = k - r(B)$ ,  $\dim V_{AB} = k - r(AB)$ , 因此上述两个方程组同解的充要条件是  $r(AB) = r(B)$ . □

**Exercise 3.43** 设  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $B$  是  $n \times k$  矩阵. 若  $AB$  和  $B$  有相同的秩, 求证: 对任意的  $k \times l$  矩阵  $C$ , 矩阵  $ABC$  和矩阵  $BC$  也有相同的秩.

**Proof** 证法1

可知, 方程组  $ABx = 0$  和方程组  $Bx = 0$  同解. 要证明  $r(ABC) = r(BC)$ , 我们只要证明方程组  $ABCx = 0$  和方程组  $BCx = 0$  同解即可.

显然方程组  $BCx = 0$  的解都是方程组  $ABCx = 0$  的解. 反之, 若列向量  $\alpha$  是方程组  $ABCx = 0$  的解, 则  $C\alpha$  是方程组  $ABx = 0$  的解  
因此  $C\alpha$  也是方程组  $Bx = 0$  的解, 即  $BC\alpha = 0$ , 于是  $\alpha$  是方程组  $BCx = 0$  的解. 就证明了方程  $ABCx = 0$  和方程  $BCx = 0$  同解, 从而得证.

证法2

由 Frobenius 不等式可得  $r(ABC) \geq r(AB) + r(BC) - r(B) = r(BC)$ , 又因为  $r(ABC) \leq r(BC)$ , 故结论得证. □

**Exercise 3.44** 设  $A, B$  是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  阶矩阵且  $AB = BA$  证明:  $r(A + B) \leq r(A) + r(B) - r(AB)$

**Proof**

证法一

考虑如下分块矩阵的乘法：
$$\begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -B \\ I & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & -AB+BA \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & AB \end{pmatrix}.$$

由可得  $r(A) + r(B) = r \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq r \begin{pmatrix} A+B & O \\ B & BA \end{pmatrix} \geq r(A+B) + r(AB)$ , 由此即得结论.  $\square$

证法2

设  $V_A$  是方程组  $Ax = 0$  的解空间,  $V_B, V_{AB}, V_{A+B}$  的意义同理.

若列向量  $\alpha \in V_A \cap V_B$ , 即  $\alpha$  满足  $A\alpha = 0$  且  $B\alpha = 0$ , 于是  $(A+B)\alpha = 0$ , 即  $\alpha \in V_{A+B}$ , 从而  $V_A \cap V_B \subseteq V_{A+B}$ . 同理可证  $V_A \subseteq V_{BA}, V_B \subseteq V_{AB}$ .

因为  $AB = BA$ , 所以  $V_{BA} = V_{AB}$ , 从而  $V_A + V_B \subseteq V_{AB}$ .

因此, 我们有  $\dim(V_A \cap V_B) \leq \dim V_{A+B} = n - r(A+B)$ ,  $\dim(V_A + V_B) \leq \dim V_{AB} = n - r(AB)$ .

上面两个式子作和再结合维数公式即可  $\square$

证法三

设  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  为  $A$  的列分块,  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  为  $B$  的列分块

记  $U_A = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  为  $A$  的列向量生成的  $\mathbb{K}^n$  的子空间,  $U_B, U_{AB}, U_{A+B}$  的意义同理.

因为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  的极大无关组就是  $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  的一组基, 故  $r(A) = \dim U_A$ , 关于  $B, AB, A+B$  的等式同理可得.

显然我们有  $U_{A+B} \subseteq U_A + U_B$ . 注意到  $AB = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n)$

若设  $\beta_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})'$ , 则  $AB$  的列向量  $A\beta_j = b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \dots + b_{nj}\alpha_n \in U_A$ , 从而  $U_{AB} \subseteq U_A$ .

又因为  $AB = BA$ , 故  $U_{AB} \subseteq U_A \cap U_B$ . 最后, 由上述包含关系以及子空间的维数公式可得

$$r(A+B) + r(AB) = \dim U_{A+B} + \dim U_{AB} \leq \dim(U_A + U_B) + \dim(U_A \cap U_B)$$

$$= \dim U_A + \dim U_B = r(A) + r(B).$$

$\square$

**Exercise 3.45** 设齐次线性方程组  $Ax = 0$  由  $n$  个未知数及  $n$  个方程式组成, 且  $|A| = 0$ . 行列式  $|A|$  中某个元素  $a_{ij}$  的代数余子式  $A_{ij} \neq 0$ .

求证: 该方程组的所有解都可写为下列形式:  $k \begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}.$

**Proof** 显然  $A$  的秩等于  $n-1$ . 因此线性方程组  $Ax = 0$  的基础解系只含一个向量. 注意到  $|A| = 0$ , 故  $AA^* = |A|I_n = O$ ,

这就是说  $A$  的伴随  $A^*$  的任一系列向量都是  $Ax = 0$  的解. 而已知  $A_{ij} \neq 0$ , 从而列向量  $\begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}$  是  $Ax = 0$  的基础解系.  $\square$

**Exercise 3.46** 设  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  的行列式等于零, 证明:  $A^*$  的秩不超过 1.

**Proof** 证明若  $A$  的秩小于  $n-1$ , 则  $A$  的任意一个  $n-1$  阶子式等于零, 故  $A^* = O$ ,  $A^*$  的秩为零.

若  $A$  的秩等于  $n-1$ , 则由上题可知  $A^*$  的  $n$  个列向量都成比例且至少有一列不为零, 故  $A^*$  的秩等于 1.

注当  $n > 2$  时, 若  $A$  不是可逆矩阵, 由上题知  $(A^*)^* = O$ , 这就给出了另外一个解法.  $\square$

**Exercise 3.47** 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 的每一行每一列的元素之和为0;证明: $A$ 的每个元素的代数余子式都相等

**Proof** 由假设可知 $A$ 是奇异矩阵.若 $A$ 的秩小于 $n-1$ ,则 $A$ 的任意一个代数余子式 $A_{ij}$ 都等于零,结论显然成立.

若 $A$ 的秩等于 $n-1$ ,则线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系只含一个向量.

又因为 $A$ 的每一行元素之和都等于零,我们可以选取 $\alpha=(1,1,\dots,1)'$ 作为 $Ax=0$ 的基础解系.

由前面例题的证明可知 $A^*$ 的每一列都与 $\alpha$ 成比例,特别地, $A^*$ 的每一行都相等.对 $A'$ 重复上面的讨论

注意到 $(A')^*=(A^*)'$ ,从而 $A^*$ 的每一列都相等,于是 $A$ 的所有代数余子式 $A_{ij}$ 都相等. □

**Exercise 3.48** 设 $A$ 是 $n$ 阶实反对称矩阵, $D=\text{diag}\{d_1,d_2,\dots,d_n\}$ 是同阶对角矩阵且主对角线上元素全大于零  
求证: $|A+D|>0$ .特别, $I_n+A$ 和 $I_n-A$ 都是非异阵.

**Proof** 先证明 $|A+D|\neq 0$ ,即证明 $(A+D)x=0$ 只有零解.

如果有非零解那么有 $x'(A+D)x=0$ ,转置得 $x'(-A+D)x=0$ ,上述两式相加即得 $x'Dx=0$ .

由于 $D$ 是对角矩阵且主对角线上元素全大于零,若设 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ ,则 $x'Dx=0$ 表示 $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\dots+d_nx_n^2=0$ .

考虑到 $x_i$ 都是实数,即有 $x=0$ .矛盾所以 $|A+D|\neq 0$

再证明本题的结论.设 $f(t)=|tA+D|$ ,则 $f(t)$ 是关于 $t$ 的多项式,从而是关于 $t$ 的连续函数.注意到对任意的实数 $t$ , $tA$ 仍是实反对称矩阵  
故由上面的讨论可得 $f(t)=|tA+D|\neq 0$ ,即 $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上处处不为零的连续函数.

又因为当 $t=0$ 时, $f(0)=|D|>0$ ,所以 $f(t)$ 只能是 $\mathbb{R}$ 上取值恒为正数的连续函数.特别, $f(1)=|A+D|>0$ . □

**Exercise 3.49**

如果 $n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 适合条件: $|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|, i=1,2,\dots,n$ ,则称 $A$ 是严格对角占优阵.

求证:

(1) 严格对角占优阵必是满秩阵.(该结论可以推广到一半矩阵 $A_{m\times n}$ ;同理可证明 $r(A)=n$ )

(2) 若上述条件改为 $a_{ii}>\sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|, i=1,2,\dots,n$ ,那么 $|A|>0$ .

**Proof** 对第一个结论,只需证明线性方程组 $Ax=0$ 只有零解.若有非零解,设为 $(c_1,c_2,\dots,c_n)^T$ ,假定 $c_k$ 是其中绝对值最大者.

将解代入该方程组的第 $k$ 个方程式,得 $a_{k1}c_1+\dots+a_{kk}c_k+\dots+a_{kn}c_n=0$

即有 $-a_{kk}c_k=a_{k1}c_1+\dots+a_{k,k-1}c_{k-1}+a_{k,k+1}c_{k+1}+\dots+a_{kn}c_n$

上式两边同取绝对值,由三角不等式以及 $c_k$ 是绝对值最大的假定可得

$$|a_{kk}||c_k|\leq |a_{k1}||c_1|+\dots+|a_{k,k-1}||c_{k-1}|+|a_{k,k+1}||c_{k+1}|+\dots+|a_{kn}||c_n|\leq\left(\sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|\right)|c_k|$$

从而有 $|a_{kk}|\leq\sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}|$ ,得到矛盾.因此方程组 $Ax=0$ 只有零解.

第二个结论的证明可借助连续函数性质.考虑矩阵 $tI_n+A$ ,当 $t\geq 0$ 时这是一个严格对角占优矩阵,因此其行列式不为零.

而 $f(t)=|tI_n+A|$ 是关于 $t$ 的多项式且首项系数为1,当 $t$ 充分大时, $f(t)>0$ .由于 $f(t)$ 连续,故当 $t=0$ 时, $f(0)=|A|>0$ . □

**Exercise 3.50** 求证:矩阵 $A$ 的秩等于 $r$ 的充要条件是 $A$ 存在一个 $r$ 阶子式 $|D|$ 不等于零,而 $|D|$ 的所有 $r+1$ 阶加边子式全等于零.

**Proof** 只需证明充分性.不失一般性,我们可设 $|D|$ 是由 $A$ 的前 $r$ 行和前 $r$ 列构成的 $r$ 阶子式.

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \text{ 为矩阵 } A \text{ 的行分块和列分块}$$

记 $\tau_{\leq r} \alpha_i$ 为行向量 $\alpha_i$ 关于前 $r$ 列的缩短向量, $\tau_{\leq r} \beta_j$ 为列向量 $\beta_j$ 关于前 $r$ 行的缩短向量.

由 $|D| \neq 0$ 可得 $\tau_{\leq r} \alpha_1, \dots, \tau_{\leq r} \alpha_r$ 线性无关,根据缩短向量组的知识可知 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

我们只要证明 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 是 $A$ 的行向量的极大无关组即可得到 $r(A) = r$ .

用反证法证明,若它们不是极大无关组,则可以添加一个行向量,不妨设为 $\alpha_{r+1}$ ,使得 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ 线性无关.

设 $A_1$ 是 $A$ 的前 $r+1$ 行构成的矩阵,则 $A_1 = (\tau_{\leq r+1} \beta_1, \tau_{\leq r+1} \beta_2, \dots, \tau_{\leq r+1} \beta_n)$ 且 $r(A_1) = r+1$ .

由 $|D| \neq 0$ 可得 $\tau_{\leq r} \beta_1, \dots, \tau_{\leq r} \beta_r$ 线性无关,根据缩短向量组的知识可知 $\tau_{\leq r+1} \beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1} \beta_r$ 线性无关.

因为 $r(A_1) = r+1$ ,故存在 $A_1$ 的一个列向量,不妨设为 $\tau_{\leq r+1} \beta_{r+1}$ ,使得 $\tau_{\leq r+1} \beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1} \beta_r, \tau_{\leq r+1} \beta_{r+1}$ 线性无关.(承接上行)

设 $A_2 = (\tau_{\leq r+1} \beta_1, \dots, \tau_{\leq r+1} \beta_r, \tau_{\leq r+1} \beta_{r+1})$ ,即 $A_2$ 是 $A$ 的前 $r+1$ 行和前 $r+1$ 列构成的方阵,则 $r(A_2) = r+1$ .

因此 $|A_2| \neq 0$ 是包含 $|D|$ 的加边子式,这与假设矛盾. □

**Exercise 3.51** 设 $m \times n$ 矩阵 $A$ 的 $m$ 个行向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ,其中 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是其极大无关组.

又设 $A$ 的 $n$ 个列向量为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ ,其中 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ 是其极大无关组

则 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 和 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ 交叉点上的元素组成的子矩阵 $D$ 的行列式 $|D| \neq 0$ .

**Proof** 因为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是极大无关组,故 $A$ 的任一行向量 $\alpha_s$ 均可表示为向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 的线性组合.

记 $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}, \tilde{\alpha}_s$ 分别是 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_s$ 处在 $j_1, j_2, \dots, j_r$ 列的缩短向量

则由缩短向量组知识, $\tilde{\alpha}_s$ 可以表示为 $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$ 的线性组合.

那么只要证 $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$ 线性无关即可

考虑由列向量 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r}$ 组成的矩阵 $B = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_r})$ ,这是个 $m \times r$ 矩阵且秩等于 $r$ .那么 $B$ 的行秩也为 $r$

由于矩阵 $B$ 的任一行向量都可用 $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$ 线性表示,并且 $B$ 的行秩等于 $r$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$ 是 $B$ 的行向量的极大无关组,从而它们线性无关.

注意到 $r$ 阶方阵 $D$ 的行向量恰好是 $\tilde{\alpha}_{i_1}, \tilde{\alpha}_{i_2}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}$ ,因此 $D$ 是满秩阵,从而 $|D| \neq 0$ . □

**Exercise 3.52** 设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵, $A$ 的第 $i_1, \dots, i_r$ 行和第 $i_1, \dots, i_r$ 列交点上的元素组成的子式称为 $A$ 的一个主子式.

若 $A$ 是对称矩阵或反对称矩阵且秩等于 $r$  求证: $A$ 必有一个 $r$ 阶主子式不等于零.

**Proof** 由对称性(或反对称性),若 $A$ 的第 $i_1, \dots, i_r$ 行是 $A$ 的行向量的极大无关组,则它的第 $i_1, \dots, i_r$ 列也是 $A$ 的列向量的极大无关组  
因此由上例可知,它们交点上的元素组成的 $r$ 阶主子式不等于零. □

**Exercise 3.53** 证明:反对称矩阵的秩必为偶数.

**Proof** 用反证法,设反对称矩阵 $A$ 的秩等于 $2r+1$ ,则由上题可知, $A$ 有一个 $2r+1$ 阶主子式 $|D|$ 不等于零.

注意到反对称矩阵的主子式是反对称行列式,而奇数阶反对称行列式的值等于零,从而 $|D| = 0$ ,矛盾. □

Exercise 3.54 求证：秩等于 $r$ 的矩阵可以表示为 $r$ 个秩等于1的矩阵之和,但不能表示为少于 $r$ 个秩为1的矩阵之和.

**Proof** 将 $A$ 化为相抵标准型,即存在非异矩阵 $P$ 及 $Q$ ,使 $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ .

矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 显然可以化为 $r$ 个秩等于1的矩阵之和,记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_r$ ,则

$A = PA_1Q + PA_2Q + \cdots + PA_rQ$ ,每个 $PA_iQ$ 秩仍等于1.若 $A = B_1 + B_2 + \cdots + B_k, k < r$ ,且每个 $B_i$ 的秩等于1则由秩的不等式 $r(B+C) \leq r(B) + r(C)$ 可知, $A$ 的秩将不超过 $k$ ,这和 $A$ 的秩等于 $r$ 矛盾,故不可能.  $\square$

Exercise 3.55 设 $A, B$ 分别是 $3 \times 2, 2 \times 3$ 矩阵且满足 $C = AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  试求 $BA$ .

**Proof** 我们容易知道 $r(AB) = 2$ ;根据秩不等式 $r(AB) \leq r(A)$ 那么有 $r(A) \geq 2$ 且 $r(B) \geq 2$ .  
且根据秩不会超过行列最大值我们知道 $r(A) = r(B) = 2$

也就是说此时 $C$ 分解为 $AB$ 为满秩分解;而我们通过满秩分解算法不难得到 $C = A_1B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

而且我们知道 $BA$ 与 $B_1A_1$ 是相似的而 $B_1A_1 = 9I_2 \Rightarrow BA = P^{-1}(9I_2)P = 9I_2$   $\square$

Exercise 3.56 设 $A_{m \times n}$  求证:  $\exists B_{n \times m}$  st.  $ABA = A$

**Proof** method1: 设 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ , 其中 $P$ 是 $m$ 阶非异阵, $Q$ 为 $n$ 阶非异阵

注意到条件和结论在 $A \mapsto PAQ$ 与 $B \mapsto Q^{-1}BQ^{-1}$ 下保持不变,故不妨一开始假设 $A$ 为相抵标准型

设 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ 为对应的分块,由 $ABA = A$ 可得 $B_1 = I_r$ ,其余分块取法任意

method2: 设 $A = CD$ 为满秩分解, $E$ 为 $C$ 的左逆, $F$ 是 $D$ 的右逆.令 $B = FE$ 则

$ABA = (CD)(FE)(CD) = C(DF)(EC)D = CD = A$   $\square$

Exercise 3.57 设 $A, B, C$ 分别为 $m \times n, p \times q, m \times q$ 的矩阵, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$  我们知道 $r(M) \geq r(A) + r(B)$

证明: 等号成立的充要条件是 $AX + YB = C$ 有解;其中 $X, Y$ 是 $n \times q; m \times p$ 的矩阵

**Proof** 先证明充分性: 设 $X = X_0; Y = Y_0$ 是矩阵方程 $AX + YB = C$ 的解

则将 $M$ 的第一分块列右乘 $-X_0$ 加到第二分块列上,再将第二分块行左乘 $-Y_0$ 加到第一分块行上

得到 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ ; 所以 $r(M) = r(A) + r(B)$

再证明必要性: 设 $P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}; P_2AQ_2 = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 其中 $P_1, Q_1, P_2, Q_2$ 为非异阵  $r(A) = r; r(B) = s$

注意到条件和结论在相抵变换 $A \rightarrow P_1AQ_1; B \rightarrow P_2BQ_2; C \rightarrow P_1CQ_2; X \rightarrow Q_1^{-1}XQ_2; Y \rightarrow P_1YP_2^{-1}$ 下保持不变

故不妨一开始设  $A = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ; 设  $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ ;  $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ ;  $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$  为对应的分块

那么  $M$  可通过初等变换变为  $\begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C_4 \\ O & O & I_s & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$  所以  $C_4 = O$

那么方程就化为了:  $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 & O \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + Y_1 & X_2 \\ Y_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & O \end{pmatrix}$  有解

方程有解如:  $Y_3 = C_3$ ;  $X_2 = C_2$ ;  $Y_1 = O$ ;  $X_1 = C_1$

□

Exercise 3.58 设  $A$  为  $n$  阶方阵且  $r(A) = r$

求证:  $A^2 = A$  的充要条件是存在  $S_{n \times r}$  列满秩矩阵和  $T_{r \times n}$  行满秩矩阵  $st. A = ST$ ;  $TS = I_r$

Proof 充分性显然, 下证必要性

设  $P, Q$  是  $n$  阶非异阵, 使得  $A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$ ; 由  $A^2 = A$  得到  $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QP \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

令  $S = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}$   $T = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$  即可

性质 设  $A$  为  $n$  阶幂等矩阵,  $tr(A) = r(A)$

□

Exercise 3.59 设  $A^{m \times n}$ ;  $B^{n \times p}$ ; 证明:  $\exists C^{p \times n} st. ABC = A \Leftrightarrow r(A) = r(AB)$

Proof 方程  $ABX = A$  有解  $\Leftrightarrow r(AB) = r(AB|A)$

必要性:  $r(A) \geq r(AB) \geq r(ABC) = r(A)$

充分性  $r(AB) \leq r(AB|A) = r(A(B|I_n)) \leq r(A)$

□

Exercise 3.60 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  ( $s > 1, \alpha_1 \neq 0$ ) 线性相关, 则有一个  $\alpha_i$  ( $i > 1$ ) 由  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$  线性表示.

Proof 利用反证法即可

□

Exercise 3.61 设  $V$  是实数域上连续函数空间,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个不同的实数, 求证:  $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$  线性无关.

Proof 设  $k_1, k_2, \dots, k_n$  为  $n$  个实数, 使得  $k_1 e^{a_1 x} + k_2 e^{a_2 x} + \dots + k_n e^{a_n x} = 0$ .

对上式求导  $i$  次并令  $x = 0$ , 可得  $a_1^i k_1 + a_2^i k_2 + \dots + a_n^i k_n = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

上述  $n$  个方程构成了关于  $k_1, k_2, \dots, k_n$  的线性方程组, 其系数行列式是关于  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的 VanderMonde 行列式.

由于  $a_1, a_2, \dots, a_n$  互不相同, 故系数行列式不等于零, 从而方程组只有零解  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ , 于是  $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}$  线性无关.

□

**Exercise 3.62** 设  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \subseteq \mathbb{K}^m$  是  $p$  个线性无关的  $m$  维向量,  $\{\beta_1, \dots, \beta_q\} \subseteq \mathbb{K}^n$  是  $q$  个线性无关的  $n$  维向量  
 求证:  $\{\alpha_i \cdot \beta_j' | 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq q\}$  是  $pq$  个线性无关的  $m \times n$  矩阵

**Proof** 设有  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} \alpha_i \beta_j' = O \Rightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i \left( \sum_{j=1}^q c_{ij} \beta_j' \right) = O$

设  $\sum_{j=1}^q c_{ij} \beta_j' = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  ( $1 \leq i \leq p$ ) 比较上行式子的两边矩阵的第  $k$  列; 有

$\sum_{i=1}^p a_{ik} \alpha_i = 0$  由  $\alpha_i$  线性无关那么  $a_{ik} = 0$  ( $1 \leq i \leq p; 1 \leq k \leq n$ ) 于是有

$\sum_{j=1}^q c_{ij} \beta_j' = 0$  ( $1 \leq i \leq p$ ) 由  $\beta_j$  线性无关那么  $c_{ij} = 0$  ( $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$ ) □

**Exercise 3.63** 已知矩阵  $B_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) 是  $n$  阶幂等矩阵, 即  $B_i^2 = B_i$ , 又  $A = B_1 \cdots B_k$ , 求证:  $r(I_n - A) \leq k(n - r(A))$ .

**Proof** 由  $A = B_1 \cdots B_k$  可得  $r(A) \leq r(B_i)$ , 因为  $B_i$  是幂等矩阵, 故可得  $r(I_n - B_i) + r(B_i) = n$

注意到  $I_n - A = (I_n - B_1) + B_1(I_n - B_2) + \dots + B_1 \cdots B_{k-1}(I_n - B_k)$ , 故

$r(I_n - A) \leq \sum_{i=1}^k r(I_n - B_i) = \sum_{i=1}^k (n - r(B_i)) \leq k(n - r(A))$ . □

**Exercise 3.64** 设  $n$  阶实方阵  $A$  满足  $AA' = a^2 I_n$ , 其中  $a$  为实数, 证明:  $r(aI_n - A) = r((aI_n - A)^2)$ .

**Proof** 若  $a = 0$ , 则  $AA' = O$ , 可知  $A = O$ , 从而结论显然成立.

若  $a \neq 0$ , 注意到  $(aI_n - A)^2 = \left( \frac{1}{a} AA' - A \right) (aI_n - A) = -\frac{1}{a} A (aI_n - A') (aI_n - A) = -\frac{1}{a} A (aI_n - A)' (aI_n - A)$ , 则  
 由  $-\frac{1}{a} A$  的非异性可得  $r((aI_n - A)^2) = r((aI_n - A)' (aI_n - A)) = r(aI_n - A)$ . □

**Exercise 3.65** 设  $n$  阶方阵  $A, B$  满足:  $(A + B)^2 = A + B, r(A + B) = r(A) + r(B)$ , 证明:  $A^2 = A, B^2 = B, AB = BA = O$ .

**Proof** 由  $A + B$  为幂等阵可得  $n = r(A + B) + r(I_n - A - B) = r(A) + r(B) + r(I_n - A - B)$ .

构造如下分块对角阵, 并对其实施分块初等变换, 可得

$$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & I_n - A - B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ A & B & I_n - A - B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & O & A \\ O & B & B \\ A & B & I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A - A^2 & -AB & O \\ -BA & B - B^2 & O \\ A & B & I_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A - A^2 & -AB & O \\ -BA & B - B^2 & O \\ O & O & I_n \end{pmatrix}.$$

注意到分块初等变换不改变矩阵的秩, 故可得  $r \begin{pmatrix} A - A^2 & -AB \\ -BA & B - B^2 \end{pmatrix} = 0$ , 从而  $A^2 = A, B^2 = B, AB = BA = O$  □

**Exercise 3.66** 设  $A$  是一个对称矩阵,  $A$  有一个  $r$  阶主子式  $|M|$  不等于零且  $A$  所有包含  $|M|$  的  $r+1$  及  $r+2$  阶加边主子式都等于零, 求证:  $A$  的秩等于  $r$

设  $A$  是一个反对称矩阵,  $A$  有一个  $r$  阶主子式  $|M|$  不等于零且  $A$  所有包含  $|M|$  的  $r+2$  阶加边主子式都等于零, 求证:  $A$  的秩等于  $r$ .

**Proof** 对一个对称矩阵进行一次行对换, 再进行一次对称的列对换后得到的矩阵仍是对称矩阵, 因此不妨设  $M$  在  $A$  的左上角.

现考虑任意一个包含  $M$  的  $r+2$  阶主子阵  $\begin{pmatrix} M & \alpha & \beta \\ \alpha' & a_{ss} & a_{st} \\ \beta' & a_{ts} & a_{tt} \end{pmatrix}$ , 注意由对称性  $a_{st} = a_{ts}$ .

因为  $|M| \neq 0$ ,  $M$  是可逆矩阵. 对上述矩阵作分块初等行变换分别消去  $\alpha'$  及  $\beta'$ , 得: 
$$\begin{pmatrix} M & \alpha & \beta \\ 0 & a_{ss} - \alpha' M^{-1} \alpha & a_{st} - \alpha' M^{-1} \beta \\ 0 & a_{ts} - \beta' M^{-1} \alpha & a_{tt} - \beta' M^{-1} \beta \end{pmatrix}$$

因为  $\begin{vmatrix} M & \alpha \\ \alpha' & a_{ss} \end{vmatrix} = 0$ , 有  $a_{ss} - \alpha' M^{-1} \alpha = 0$ . 同理  $a_{tt} - \beta' M^{-1} \beta = 0$ .

又  $a_{ts} - \beta' M^{-1} \alpha$  是一个数, 把它看成  $1 \times 1$  矩阵, 转置后有  $a_{ts} - \beta' M^{-1} \alpha = a_{st} - \alpha' M^{-1} \beta$ .

再由已知, 上述  $r+2$  阶子式等于零, 得 
$$\begin{vmatrix} M & \alpha & \beta \\ 0 & a_{ss} - \alpha' M^{-1} \alpha & a_{st} - \alpha' M^{-1} \beta \\ 0 & a_{ts} - \beta' M^{-1} \alpha & a_{tt} - \beta' M^{-1} \beta \end{vmatrix} = 0$$
, 即有  $a_{ts} - \beta' M^{-1} \alpha = a_{st} - \alpha' M^{-1} \beta = 0$ .

对任意的  $r$  维向量  $\alpha, \beta$ , 都有上式成立. 因此, 若在  $A$  中用上述方法消去  $\alpha'$  时, 后面的项全部消去.

于是可消去除前  $r$  行外的所有行. 这就证明了  $A$  的秩等于  $r$ .

注意反对称矩阵的奇数阶主子式总等于零, 其余同上题证明. □

 **Exercise 3.67** 已知非齐次线性方程组  $Ax = \beta$  有解.

求证: 每个解向量中第  $k$  个分量都等于零的充分必要条件是增广矩阵  $\tilde{A}$  的第  $k$  列划去后得到的矩阵的秩比  $\tilde{A}$  的秩小.

**Proof** 不失一般性, 令  $k = 1$ . 又假定  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  是其列向量分块. 将方程组写为  $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = \beta$ .

若解向量中第一个分量总是零, 则  $\beta = c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n$ , 其中  $(0, c_2, \dots, c_n)'$  是某个解向量.

于是  $r(\alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta)$ . 假定  $\alpha_1 = a_2 \alpha_2 + \dots + a_n \alpha_n$ , 则

$(-1) \alpha_1 + (a_2 + c_2) \alpha_2 + \dots + (a_n + c_n) \alpha_n = \beta$ , 即  $(-1, a_2 + c_2, \dots, a_n + c_n)'$  也将是解, 和解的第一个分量都是零矛盾.

因此  $\alpha_1$  不能表示为其余  $\alpha_i$  的线性组合. 注意到  $\beta$  可表示为  $\alpha_i$  的线性组合, 因此  $\tilde{A}$  第一列划去后得到的矩阵的秩比  $\tilde{A}$  的秩小.

反过来, 若某个解向量中第一分量不等于零, 不妨假定有  $c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n = \beta$ ,  $c_1 \neq 0$ , 则  $\alpha_1$  可以表示为  $\alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$  的线性组合.

因此  $\tilde{A}$  划去第一列后的秩与  $\tilde{A}$  的秩相同. □

 **Exercise 3.68**

**Proof**

 **Exercise 3.69**

**Proof**

## 第4章 线性映射习题

**问题 4.1** 设 $\varphi$ 是 $\mathbb{F}$ 上有限维线性空间 $V$ 到 $U$ 的线性映射.

求证: 必存在 $U$ 到 $V$ 的线性映射 $\psi$ , 使 $\varphi\psi\varphi = \varphi$ .

**Proof** 设 $V$ 和 $U$ 的维数分别是 $n$ 和 $m$ .

由引理5.3得知可分别选取 $V$ 和 $U$ 的基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ , 使 $\varphi$ 在这两组基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ .

这就是 $\varphi(e_i) = f_i, i = 1, \dots, r; \varphi(e_j) = 0, j = r+1, \dots, n$ .

定义 $\psi$ 是 $U$ 到 $V$ 的线性映射, 它在基上的作用为 $\psi(f_i) = e_i, i = 1, \dots, r; \psi(f_j) = 0, j = r+1, \dots, m$

则在 $V$ 的基上, 有
$$\begin{cases} \varphi\psi\varphi(e_i) = \varphi\psi(f_i) = \varphi(e_i), i = 1, \dots, r \\ \varphi\psi\varphi(e_j) = \varphi\psi(0) = 0 = \varphi(e_j), j = r+1, \dots, n \end{cases}$$

于是 $\varphi\psi\varphi = \varphi$ .

取定 $V$ 和 $U$ 的两组基, 设 $\varphi$ 在这两组基下的表示矩阵为 $m \times n$ 矩阵 $A$ , 则由矩阵知识可知, 存在 $n \times m$ 矩阵 $B$ 使得 $ABA = A$ . 由矩阵 $B$ 可定义从 $U$ 到 $V$ 的线性映射 $\psi$ , 它适合 $\varphi\psi\varphi = \varphi$ . □

### 问题 4.2

(1): 设 $V, U$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间,  $\varphi, \psi: V^n \rightarrow U^m$ 两个线性映射

那么存在 $U$ 上的线性变换 $\xi$  st.  $\psi = \xi\varphi \Leftrightarrow \text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\psi$

(2): 设 $V, U$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的有限维线性空间,  $\varphi, \psi: V^n \rightarrow U^m$ 两个线性映射

那么存在 $V$ 上的线性变换 $\xi$  st.  $\psi = \varphi\xi \Leftrightarrow \text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi$

**Proof**

法一:

必要性: 任取 $v_0 \in \text{Ker}\varphi$ ; 则 $\psi(v_0) = \xi\varphi(v_0) = 0 \Rightarrow v_0 \in \text{Ker}\psi \Rightarrow \text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\psi$

充分性: 设 $\dim V = n; \dim U = m; \dim \text{Ker}\varphi = n - r$

取 $\text{Ker}\varphi \subseteq V$ 的一组基 $\{e_{r+1} \cdots e_n\}$ 扩张为 $V$ 的一组基 $\{e_1 \cdots e_r, e_{r+1} \cdots e_n\}$

由维数公式证法三我们知 $\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_r)$ 是 $\text{Im}\varphi$ 的一组基; 扩张为 $U$ 的一组基 $\varphi(e_1) \cdots \varphi(e_r), g_{r+1} \cdots g_m$

定义 $\xi$ 为 $U$ 上的线性变换,  $\xi := \begin{cases} \xi(\varphi(e_i)) = \psi(e_i) & 1 \leq i \leq r \\ \xi(g_j) = 0 & r+1 \leq j \leq m \end{cases}$

容易验证:  $\psi(e_i) = \xi\varphi(e_i) \quad 1 \leq i \leq n$ 成立; 从而 $\psi = \xi\varphi$

法二:

取 $V^n$ 基 $\{e_1 \cdots e_n\}$ ;  $U^m$ 基 $\{f_1 \cdots f_m\}$

设 $\varphi$ 的表示矩阵为 $A$ ;  $\psi$ 的表示矩阵为 $B$ ;  $\xi$ 的表示矩阵为 $C$

即有 $\varphi(e_1 \cdots e_n) = (f_1 \cdots f_m)A \quad \psi(e_1 \cdots e_n) = (f_1 \cdots f_m)B \quad \xi(f_1 \cdots f_m) = (f_1 \cdots f_m)C$

则要证 $\psi = \xi\varphi \Leftrightarrow$ 证 $B = CA$ 对于 $C$ 有解  $\Leftrightarrow$ 证 $A^T C^T = B^T$ 有解  $\Leftrightarrow$ 证:  $r(A^T) = r(A^T | B^T)$

$\Leftrightarrow$ 证:  $r(A) = r\left(\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}\right) \Leftrightarrow$ 证 $Ax = 0$ 与 $\left(\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}\right)x = 0$ 同解  $\Leftrightarrow$ 证 $\text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\psi$  □

**Proof** 法一:

必要性: 任取 $v_0 \in V$ 那么 $\psi(v_0) = \varphi(\xi(v_0)) \in \text{Im}\varphi$  从而 $\text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi$

充分性: 取 $V$ 的一组基 $e_1 \cdots e_n$ ; 那么 $\psi(e_i) \in \text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi \Rightarrow$  存在相应的 $f_i$  st.  $\varphi(f_i) = \psi(e_i) \quad 1 \leq i \leq n$

定义 $\xi$ 为:  $\xi(e_i) = f_i \quad 1 \leq i \leq n$  容易验证成立

法二:

取 $V^n$ 基 $\{e_1 \cdots e_n\}$ ;  $U^m$ 基 $\{f_1 \cdots f_m\}$

设 $\varphi$ 的表示矩阵为 $A$ ;  $\psi$ 的表示矩阵为 $B$ ;  $\xi$ 的表示矩阵为 $C$

那么 $\psi = \varphi\xi \Leftrightarrow$  证:  $AC = B$ 关于 $C$ 有解  $\Leftrightarrow r(A) = r(A|B) \Leftrightarrow B$ 的列向量组能够被 $A$ 的列向量组表示  $\Leftrightarrow \text{Im}\psi \subseteq \text{Im}\varphi$  □

**问题 4.3** 设 $\varphi$ 是 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换,  $\alpha \in V$ . 若 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ , 而 $\varphi^m(\alpha) = 0$ .

求证:  $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关.

**Proof** 设有 $m$ 个数 $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ , 使 $a_0\alpha + a_1\varphi(\alpha) + \dots + a_{m-1}\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$ .

上式两边同时作用 $\varphi^{m-1}$ , 则有 $a_0\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$ , 由于 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ , 故 $a_0 = 0$ .

上式两边同时作用 $\varphi^{m-2}$ , 则有 $a_1\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$ , 由于 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ , 故 $a_1 = 0$ . 不断这样做下去, 最后可得 $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$  从而 $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关. □

**问题 4.4** 设 $V$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的 $n$ 维线性空间,  $\varphi$ 是 $V$ 上的幂零线性变换, 满足 $r(\varphi) = n - 1$

求证: 存在 $V$ 的一组基, 使得 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵为 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Proof** 由假设存在正整数 $m$  st.  $\varphi^m = 0, \varphi^{m-1} \neq 0$ , 从而存在 $\alpha \in V$ , 使得 $\varphi^m(\alpha) = 0; \varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$

由上题知道 $\alpha, \varphi(\alpha) \cdots \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关  $\Rightarrow m \leq \dim V = n$

显然我们知道 $\varphi$ 在 $\alpha, \varphi(\alpha) \cdots \varphi^{m-1}(\alpha)$ 下的表示矩阵恰为题干中, 但是如何去证明 $\alpha, \varphi(\alpha) \cdots \varphi^{m-1}(\alpha)$ 是基呢?

下面证明 $m = n$

由Sylvester不等式以及 $r(\varphi) = n - 1$ 知道 $r(\varphi^2) \geq 2r(\varphi) - n = n - 2$

以此类推得到 $0 = r(\varphi^m) \geq n - m$  即有 $m \geq n \Rightarrow m = n$  □

**问题 4.5** 设 $\varphi$ 是 $\mathbb{F}$ 上 $n(n > 1)$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换

若存在 $\mathbb{F}$ 中 $n$ 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 使 $\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\varphi + a_nI = 0$ , 其中 $I$ 表示恒等变换并且 $a_n \neq 0$

求证:  $\varphi$ 是 $V$ 上的自同构.

**Proof** 由条件可得 $\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \dots + a_{n-1}\varphi = -a_nI$ , 从而 $\varphi \left( -\frac{1}{a_n} (\varphi^{n-1} + \dots + a_{n-1}I) \right) = I$ ,

即 $\varphi^{-1} = -\frac{1}{a_n} (\varphi^{n-1} + \dots + a_{n-1}I)$ .

也可以用矩阵的语言来叙述更加直观 □

**问题 4.6** Lagrange插值定理:

设  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是数域  $\mathbb{F}$  中  $n+1$  个不同的数,  $b_0, b_1, \dots, b_n$  是  $\mathbb{F}$  中任意  $n+1$  个数  
 则必存在  $\mathbb{F}$  上的次数不超过  $n$  的多项式  $f(x)$ , 使  $f(a_i) = b_i (i = 0, 1, \dots, n)$ . 试将  $f(x)$  构造出来.

**Proof** 上题中已证明映射  $\varphi$  是映上的, 因此存在性已经证明. 现来构造  $f(x)$ .

设  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) (i = 1, 2, \dots, n+1)$  是  $\mathbb{F}$  上  $n+1$  维行向量空间  $V$  的标准基.

先构造  $f_i(x) (i = 0, 1, \dots, n)$ , 使  $\varphi(f_i) = e_{i+1}$ .

令  $f_i(x) = \frac{(x-a_0)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$ , 则  $f_i(a_i) = 1, f_i(a_j) = 0 (j \neq i)$ .

再令  $f(x) = b_0 f_0(x) + b_1 f_1(x) + \dots + b_n f_n(x)$

则容易验证  $f(a_i) = b_i (i = 0, 1, \dots, n)$  成立. □

**问题 4.7** 设  $\varphi$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换

证明:  $\varphi$  是可逆变换的充要条件是  $\varphi$  将  $V$  的基变为基.

**Proof** 若  $\varphi$  是可逆变换, 则显然  $\varphi$  将  $V$  的基变为基.

反之, 若  $e_1, e_2, \dots, e_n$  和  $f_1, f_2, \dots, f_n$  是  $V$  的两组基, 使得  $\varphi(e_i) = f_i (i = 1, 2, \dots, n)$

则对任意  $\alpha \in V, \alpha = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ , 有  $\varphi(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n) = \alpha$ , 即  $\varphi$  是满映射, 从而是自同构.

我们也可以这样讨论设从基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  到基  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的过渡矩阵为  $P$

则  $\varphi$  在基  $e_1, e_2, \dots, e_n$  下的表示矩阵就是  $P$ , 这是一个可逆矩阵, 从而  $\varphi$  是可逆变换. □

**问题 4.8** 设  $U_1, U_2$  是  $n$  维线性空间  $V$  的子空间, 假定它们维数相同

求证: 存在  $V$  上的可逆线性变换  $\varphi$ , 使  $U_2 = \varphi(U_1)$ .

**Proof** 取  $U_1$  的一组基  $e_1, \dots, e_m$ , 并扩张为  $V$  的一组基  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ ;

取  $U_2$  的一组基  $f_1, \dots, f_m$ , 并扩张为  $V$  的一组基  $f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$ .

定义  $\varphi$  为  $V$  上的线性变换, 它在基上的作用为:  $\varphi(e_i) = f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ,

则由上题可知,  $\varphi$  是可逆线性变换, 再由定义容易验证  $\varphi(U_1) = U_2$  成立. □

**问题 4.9** 设  $\varphi$  是  $\mathbb{F}$  上  $n$  维线性空间  $V$  的线性变换, 若对  $V$  中任一向量  $\alpha$ , 总存在正整数  $m$  ( $m$  可能和  $\alpha$  有关), 使  $\varphi^m(\alpha) = 0$ .

求证:  $Id_V - \varphi$  是  $V$  的自同构.

**Proof** 法1

首先证明线性变换  $\varphi$  是幂零的. 设  $e_1, e_2, \dots, e_n$  是线性空间  $V$  的一组基. 对每个  $e_i$ , 都有  $m_i$ , 使  $\varphi^{m_i}(e_i) = 0$

令  $m$  为诸  $m_i$  中最大者. 对  $V$  中任一向量  $v, v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$ , 有  $\varphi^m(v) = a_1 \varphi^m(e_1) + a_2 \varphi^m(e_2) + \dots + a_n \varphi^m(e_n) = 0$ .

因此  $\varphi^m = 0$ . 注意到下列等式:  $(Id - \varphi)(Id + \varphi + \varphi^2 + \dots + \varphi^{m-1}) = Id - \varphi^m = Id$ . 由此即知  $Id - \varphi$  是线性同构.

法2

只要证明  $Id - \varphi$  是单映射即可. 任取  $\alpha \in \text{Ker}(Id - \varphi)$ , 即  $(Id - \varphi)(\alpha) = 0$ , 则  $\varphi(\alpha) = \alpha$ .

设  $m$  为正整数, 使得  $\varphi^m(\alpha) = 0$ , 则  $0 = \varphi^m(\alpha) = \varphi^{m-1}(\alpha) = \dots = \varphi(\alpha) = \alpha$ , 故  $\text{Ker}(Id - \varphi) = 0$ , 即  $Id - \varphi$  是单映射.

法3

由 $\varphi$ 的幂零性可知,它在 $V$ 的任意一组基下的表示矩阵 $A$ 是幂零矩阵,即 $A^m = O$ .

可知 $I_n - A$ 是可逆矩阵,因此 $Id - \varphi$ 是自同构. □

**问题 4.10** 设 $V = M_n(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上全体 $n$ 阶矩阵组成的线性空间, $A, B$ 是两个 $n$ 阶矩阵,定义 $V$ 上的变换: $\varphi(X) = AXB$ .

求证: $\varphi$ 是 $V$ 上的线性变换, $\varphi$ 是可逆线性变换的充要条件是 $A$ 和 $B$ 都是可逆矩阵.

容易验证 $\varphi$ 是线性变换.

**Proof** 充分性:

法一:

假设已知 $A, B$ 可逆.下面来证明 $\varphi$ 是满映射

即对于 $\forall C \in M_n(\mathbb{F})$ ,是否能找到 $X$  st.  $AXB = C$  容易发现 $X = A^{-1}CB^{-1}$ 即可

那么 $\varphi$ 为满映射自动推出为双射可逆

法二:

直接找到逆映射 $\psi(X) = A^{-1}XB^{-1}$

法三:

假设已知 $A, B$ 可逆.下面来证明 $\varphi$ 是单映射

即对于 $\forall C \in \text{Ker}\varphi$ .要推出 $C = O$  由 $C \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow ACB = O \Rightarrow C = O$

必要性:

法一:

反证法;若 $A$ 是不可逆矩阵,则对任意的 $n$ 阶矩阵 $X$ , $\varphi(X) = AXB$ 总是不可逆矩阵.

因此 $\varphi$ 不可能是映上的.(这是因为任取一个可逆矩阵例如 $I_n$ .其不可能由 $AXB$ 这个不可逆的表示出来)

同理,若 $B$ 是不可逆矩阵, $\varphi$ 也不是映上的.

法二:

反证法;若 $A$ 不是可逆矩阵,我们可以证明 $\varphi$ 不是单映射,即 $\text{Ker}\varphi \neq \{0\}$

即存在 $X \neq O$ ,使 $\varphi(X) = AXB = O$ ,从而 $\varphi$ 不是可逆映射.

事实上,若 $A$ 的秩等于 $r < n$ ,则存在可逆矩阵 $P$ 和 $Q$ ,使 $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ .令 $C = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix}$ ,

则 $PAQC = O$ ,而 $P$ 是可逆矩阵,故 $AQC = O$ ,再令 $X = QC$ 即可.同理,若 $B$ 的秩小于 $n$ ,也可以证明 $\varphi$ 不是可逆变换. □

**问题 4.11** 设 $\varphi$ 是线性空间 $V$ 上的线性变换,若它在 $V$ 的任一组基下的表示矩阵都相同

求证: $\varphi$ 是纯量变换,即存在常数 $k$ ,使得 $\varphi(\alpha) = k\alpha$ 对一切 $\alpha \in V$ 都成立.

**Proof** 取定 $V$ 的一组基,设 $\varphi$ 在这组基下的表示矩阵是 $A$ .由已知条件可知,对任意一个同阶可逆矩阵 $P$ , $A = P^{-1}AP$ ,即 $PA = AP$ .

因此矩阵 $A$ 和任意一个可逆矩阵乘法可交换,于是 $A = kI_n$ ,由此即知 $\varphi$ 是纯量变换.

**问题 4.12** 若数域 $F$ 上的 $n$ 阶方阵 $A$ 和 $B$ 相似,求证:它们可以看成是某个线性空间上同一个线性变换在不同基下的表示矩阵.

**Proof** 令 $V = F^n$ 是 $n$ 维列向量空间, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是由 $n$ 维标准单位列向量构成的基, $\varphi$ 是由矩阵 $A$ 的乘法诱导的线性变换

容易验证 $\varphi$ 在基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 下的表示矩阵就是 $A$ .

而我们现在要找一组基让其表示矩阵就为  $B = P^{-1}AP$  所以我们是需要让基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵就是  $P$  所以我们就令基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}P$

注意到从基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  到基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  的过渡矩阵就是  $P$ , 因此线性变换  $\varphi$  在基  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  下的矩阵为  $P^{-1}AP = B$ .

**问题 4.13** 设  $V$  是数域  $\mathbb{R}$  上  $n$  阶矩阵全体构成的线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换:  $\varphi(A) = A'$ .

证明: 存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵是一个对角矩阵且主对角元素全是 1 或  $-1$ , 并求出 1 和  $-1$  的个数.

**Proof** 设  $V_1$  是由  $n$  阶对称矩阵组成的子空间,  $V_2$  是由反对称矩阵组成的子空间, 则可得  $V = V_1 \oplus V_2$ .

取  $V_1$  的一组基和  $V_2$  的一组基拼成  $V$  的一组基, 则  $\varphi$  在这组基下的表示矩阵是对角矩阵且主对角元素或为 1 或为  $-1$ .

因为  $\dim V_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ ,  $\dim V_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ , 故 1 的个数为  $\frac{1}{2}n(n+1)$ ,  $-1$  的个数为  $\frac{1}{2}n(n-1)$ .

**问题 4.14** 设  $V$  是数域  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维线性空间,  $\varphi, \psi$  是  $V$  上的线性变换且  $\varphi^2 = 0, \psi^2 = 0, \varphi\psi + \psi\varphi = I, I$  是  $V$  上的恒等变换.

求证:

(1)  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Ker}\psi$

(2) 若  $V$  是二维空间, 则存在  $V$  的基  $e_1, e_2$ , 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵分别为  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

(3)  $V$  必是偶数维空间且若  $V$  是  $2k$  维空间, 则存在  $V$  的一组基, 使得  $\varphi, \psi$  在这组基下的表示矩阵分别为下列分块对角矩阵:

$$\begin{pmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B & O & \cdots & O \\ O & B & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & B \end{pmatrix}, \text{其中主对角线上分别有 } k \text{ 个 } A \text{ 和 } k \text{ 个 } B.$$

**Proof** (1) 任取  $\alpha \in V$ , 则由  $I = \varphi\psi + \psi\varphi$  得到  $\alpha = \varphi\psi(\alpha) + \psi\varphi(\alpha)$ . 注意到  $\varphi\psi(\alpha) \in \text{Ker}\varphi, \psi\varphi(\alpha) \in \text{Ker}\psi$ , 因此  $V = \text{Ker}\varphi + \text{Ker}\psi$ .

又若  $\beta \in \text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}\psi$ , 则  $\beta = \varphi\psi(\beta) + \psi\varphi(\beta) = 0$ , 即  $\text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}\psi = 0$ . 于是  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Ker}\psi$ .

(2) 取  $0 \neq e_1 \in \text{Ker}\psi, e_2 = \varphi(e_1)$ , 则  $\varphi(e_2) = \varphi^2(e_1) = 0$ , 即  $e_2 \in \text{Ker}\varphi$ . 又若  $e_2 = 0$ , 则  $e_1 \in \text{Ker}\varphi \cap \text{Ker}\psi = 0$ , 和假设矛盾, 于是  $e_2 \neq 0$ . 因此  $e_1, e_2$  组成  $V$  的一组基, 不难验证在这组基下,  $\varphi, \psi$  的表示矩阵符合要求.

(3) 设  $\dim \text{Ker}\psi = k$ , 并取  $\text{Ker}\psi$  的一组基  $e_1, e_2, \dots, e_k$ .

令  $e_{k+1} = \varphi(e_1), e_{k+2} = \varphi(e_2), \dots, e_{2k} = \varphi(e_k)$ , 则由  $\varphi^2 = 0$  可得  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  都属于  $\text{Ker}\varphi$ .

我们先证明向量组  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  是线性无关的.

设有  $c_1 e_{k+1} + c_2 e_{k+2} + \cdots + c_k e_{2k} = 0$ , 两边作用  $\psi$ , 可得  $c_1 \psi(e_{k+1}) + c_2 \psi(e_{k+2}) + \cdots + c_k \psi(e_{2k}) = 0$ .

注意到  $e_1 = \varphi\psi(e_1) + \psi\varphi(e_1) = \psi(e_{k+1})$ , 同理  $e_2 = \psi(e_{k+2}), \dots, e_k = \psi(e_{2k})$ .

因此上式就是  $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_k e_k = 0$ . 而  $e_1, e_2, \dots, e_k$  线性无关, 故  $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ , 即向量组  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  线性无关.

特别地, 我们有  $\dim \text{Ker}\varphi \geq k = \dim \text{Ker}\psi$ . 由于  $\varphi, \psi$  的地位是对称的, 故同理可证  $\dim \text{Ker}\psi \geq \dim \text{Ker}\varphi$ , 从而  $\dim \text{Ker}\varphi = \dim \text{Ker}\psi = k$  并且  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_{2k}$  是  $\text{Ker}\varphi$  的一组基. 因为  $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Ker}\psi$ , 故  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{2k}$  组成  $V$  的一组基.

现将基向量排列如下:  $e_1, e_{k+1}, e_2, e_{k+2}, \dots, e_k, e_{2k}$ . 不难验证, 在这组基下  $\varphi, \psi$  的表示矩阵即为所求.

**问题 4.15** 设  $U, W$  是  $n$  维线性空间  $V$  的子空间且  $\dim U + \dim W = \dim V$ . 求证: 存在  $V$  上的线性变换  $\varphi$ , 使得  $\text{Ker}\varphi = U, \text{Im}\varphi = W$ .

**Proof** 取 $U$ 的一组基 $e_1, \dots, e_m$ , 并将其扩张为 $V$ 的一组基 $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ , 再取 $W$ 的一组基 $f_{m+1}, \dots, f_n$ . 定义 $\varphi$ 为 $V$ 上的线性变换, 它在基上的作用为:  $\varphi(e_i) = 0 (1 \leq i \leq m)$ ,  $\varphi(e_j) = f_j (m+1 \leq j \leq n)$ . 注意到 $f_{m+1}, \dots, f_n$ 是 $W$ 的一组基, 故通过简单的验证可得  $\text{Ker}\varphi = U, \text{Im}\varphi = W$ .

**问题 4.16** 设 $V$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ 是 $V$ 上的非零线性变换. 求证: 存在 $\alpha \in V$ , 使得 $\varphi_i(\alpha) \neq 0 (1 \leq i \leq k)$ .

**Proof** 因为 $\varphi_i \neq 0$ , 所以  $\text{Ker}\varphi_i$ 是 $V$ 的真子空间. 由定理可知, 有限个真子空间  $\text{Ker}\varphi_i$ 不能覆盖全空间 $V$  故必存在 $\alpha \in V$ , 使得 $\alpha$ 不属于任意一个  $\text{Ker}\varphi_i$ , 从而结论得证.

**问题 4.17**

设 $V$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ 是 $V$ 上互不相同的线性变换. 求证: 存在 $\alpha \in V$ , 使得 $\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \dots, \varphi_k(\alpha)$ 互不相同.

**Proof** 令 $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j (1 \leq i < j \leq k)$ , 则 $\varphi_{ij}$ 是 $V$ 上的非零线性变换. 由上个问题可知, 存在 $\alpha \in V$ , 使得 $\varphi_{ij}(\alpha) \neq 0$ , 即 $\varphi_i(\alpha) \neq \varphi_j(\alpha) (1 \leq i < j \leq k)$ , 从而结论得证.

**问题 4.18** 设 $V = M_n(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 阶矩阵全体构成的线性空间,  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$ 是迹函数, 即对任意的 $A = (a_{ij}) \in V$ ,  $\varphi(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ .

求证:  $\varphi$ 是 $V$ 到一维空间 $\mathbb{F}$ 上的线性映射, 并求  $\text{Ker}\varphi$ 的维数及其一组基.

**Proof** 容易验证 $\varphi$ 是线性映射且是映上的. 注意到 $V$ 是 $n^2$ 维线性空间, 由线性映射的维数公式可知,  $\dim\text{Ker}\varphi = n^2 - 1$ . 记 $E_{ij}$ 为 $n$ 阶基础矩阵, 即第 $(i, j)$ 元素为1, 其余元素为0的矩阵. 容易验证下列 $n^2 - 1$ 个矩阵迹为零且线性无关 因此它们组成了  $\text{Ker}\varphi$ 的一组基:  $E_{ij} (i \neq j), E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}, \dots, E_{n-1, n-1} - E_{nn}$

**问题 4.19** 设 $\varphi$ 是有限维线性空间 $V$ 到 $U$ 的满线性映射

求证: 必存在 $V$ 的子空间 $W$ , 使得 $V = W \oplus \text{Ker}\varphi$ , 且 $\varphi$ 在 $W$ 上的限制是 $W$ 到 $U$ 上的线性同构.

**Proof** 证法1 取  $\text{Ker}\varphi$ 的一组基 $e_1, \dots, e_k$ , 并将其扩张为 $V$ 的一组基 $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ . 令 $W = L(e_{k+1}, \dots, e_n)$ , 则显然 $V = W \oplus \text{Ker}\varphi$ . 由维数公式方法的证明可知,  $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ 是  $\text{Im}\varphi = U$ 的一组基 故 $\varphi$ 在 $W$ 上的限制将 $W$ 的一组基 $e_{k+1}, \dots, e_n$ 映射为 $U$ 的一组基 $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ , 从而必为线性同构. 证法2 取 $W$ 为  $\text{Ker}\varphi$ 在 $V$ 中的补空间. 对任意的 $u \in U$ , 由于 $\varphi$ 是映上的 故存在 $v = w + v_1$ , 其中 $w \in W, v_1 \in \text{Ker}\varphi$ , 使得 $u = \varphi(v) = \varphi(w)$ , 于是 $\varphi$ 在 $W$ 上的限制也是映上的. 另一方面, 由维数公式可知,  $\dim W = \dim V - \dim\text{Ker}\varphi = \dim U$ . 再对 $\varphi$ 在 $W$ 上的限制用线性映射的维数公式可知, 它必是单映射, 于是 $\varphi$ 在 $W$ 上的限制是 $W$ 到 $U$ 上的线性同构.

**问题 4.20** 设 $\varphi$ 是有限维线性空间 $V$ 到 $V'$ 的线性映射,  $U$ 是 $V'$ 的子空间且 $U \subseteq \text{Im}\varphi$

求证:  $\varphi^{-1}(U) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$ 是 $V$ 的子空间, 且  $\dim U + \dim\text{Ker}\varphi = \dim\varphi^{-1}(U)$ .

---

**Proof** 容易验证  $\varphi^{-1}(U)$  是  $V$  的子空间. 将  $\varphi$  限制在  $\varphi^{-1}(U)$  上, 它是到  $U$  上的线性映射.

因为  $0 \in U$ , 故  $\text{Ker}\varphi \subseteq \varphi^{-1}(U)$ . 再对  $\varphi$  在  $\varphi^{-1}(U)$  上的限制用线性映射的维数公式即得结论.

**问题 4.21** 设  $U$  是有限维线性空间  $V$  的子空间,  $\varphi$  是  $V$  上的线性变换

求证:

$$(1) \dim U - \dim \text{Ker}\varphi \leq \dim \varphi(U) \leq \dim U;$$

$$(2) \dim \varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \dim \text{Ker}\varphi.$$

**Proof** (1) 注意到当  $\varphi$  限制在  $U$  上时,  $\text{Ker}(\varphi|_U) = U \cap \text{Ker}\varphi$ , 故由线性映射的维数公式可得  $\dim U = \dim(U \cap \text{Ker}\varphi) + \dim \varphi(U)$

于是  $\dim U - \dim \text{Ker}\varphi \leq \dim \varphi(U)$ , 而  $\dim \varphi(U) \leq \dim U$  是显然的.

(2) 设  $\bar{\varphi}$  是线性变换  $\varphi$  在子空间  $\varphi^{-1}(U)$  上的限制, 则  $\text{Im}\bar{\varphi} = U \cap \text{Im}\varphi$ ,  $\text{Ker}\bar{\varphi} = \text{Ker}\varphi \cap \varphi^{-1}(U) = \text{Ker}\varphi$ .

由线性映射的维数公式可得  $\dim \varphi^{-1}(U) = \dim(U \cap \text{Im}\varphi) + \dim \text{Ker}\varphi$ .

显然, 由  $\dim(U \cap \text{Im}\varphi) \leq \dim U$  可推出  $\dim \varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \dim \text{Ker}\varphi$

**问题 4.22**

**Proof**

**问题 4.23**

**Proof**

## 第5章 二次型

### 5.1 相关的判定准则

#### 定理 5.1 (正定阵的判定充要条件)

1.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  是正定阵  $\Leftrightarrow$  合同于  $I_n$
2.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  是正定阵  $\Leftrightarrow$  正惯性指数为  $n$
3. 存在  $C$  可逆矩阵  $st. C^T C = A$
4.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  是正定阵  $\Leftrightarrow$  顺序主子式全部  $> 0$
5. 存在主对角元全等于 1 的上三角矩阵  $B$  和主对角元全为正数的对角矩阵  $D$   $st. A = B^T D B$
6. 存在主对角元全为正数的上三角矩阵  $C$   $st. A = C^T C$
7.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  是正定阵  $\Leftrightarrow A$  的前  $n-1$  个顺序主子式的代数余子式以及第  $n$  个顺序主子式  $> 0$
8.  $A$  的所有特征值全部  $> 0$



#### 定理 5.2 (半正定阵的判定充要条件)

1.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  为半正定阵  $\Leftrightarrow A$  合同于  $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$
2.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  为半正定阵  $\Leftrightarrow$  正惯性指数为矩阵秩  $r$
3.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  为半正定阵  $\Leftrightarrow \exists$  实矩阵  $C$   $st. A = C^T C$
4.  $n$  阶实对称矩阵  $A$  为半正定阵  $\Leftrightarrow A$  的所有主子式全部  $> 0$



## 5.2 定理5.1中的证明

### Proof 第四条

先证明必要性, 设  $n$  阶实对称矩阵  $A = (a_{ij})$  为正定阵, 则对应的实二次型

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

为正定型, 令  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k a_{ij} x_i x_j$  则对任意一组不全为 0 的实数  $c_1, c_2, \dots, c_k$  我们有  $f_k(c_1, c_2, \dots, c_k) = f(c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0)$

因此  $f_k$  是一个正定二次型, 从而他的相伴矩阵  $A_k$  是一个正定阵由于  $A_k$  合同于  $I_k$ , 故存在  $k$  阶非异阵  $B$  st.  $B^T A_k B = I_k$  于是  $\det(B^T A_k B) = \det(B^T A_k) \det(B) = \det(A_k) > 0$

### Proof 第七条

针对  $A$  的前面  $n-1$  个顺序主子式的代数余子式, 我们考察其仅需要通过不断调换行列总可以将其变到新顺序主子式的位置做得都是合同变换, 此时并不改变矩阵的正定性所以再根据正定阵的顺序主子式全部  $> 0$  即可

### Proof 第五条, 第六条

根据题目知道我们只需要证明存在主对角元全为 1 的上三角矩阵  $T$  st.  $T^T A T = D$  为正定对角矩阵即可。因为一旦得证,  $B = T^{-1}$  也是主

$B^T D B$ . 对阶数  $n$  进行归纳, 当  $n=1$  结论显然成立, 假设对  $n-1$  阶正定阵结论成立 现证明  $n$  阶正定阵的情形, 设  $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix}$

其中  $A_{n-1}$  是  $n-1$  阶矩阵,  $\alpha$  是  $n-1$  维向量, 因为  $A$  正定所以  $A_{n-1}$  是  $n-1$  阶正定阵, 从而是可逆矩阵, 考虑如下的分块初等变换

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & O \\ -\alpha' A_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha' & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1} \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix}$$

由于  $A$  的正定性可得  $a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha > 0$  再有归纳假设, 存在主对角元全为 1 的  $n-1$  阶上三角矩阵  $T_{n-1}$  st.  $T_{n-1}^T A_{n-1} T_{n-1} = D_{n-1}$  是  $n-1$  阶正定对角矩阵令

$$T = \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1} \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-1} & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

则  $T$  是一个主对角元全为 1 的  $n$  阶上三角矩阵 st.  $T^T A T = \begin{pmatrix} D_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha' A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix}$  是  $n$  阶正定对角矩阵

另一方面由第五条推第六条可以设  $D$  为  $\text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$  令  $s_i = \sqrt{d_i} > 0$ ;  $S = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_n]$  设  $C = SB$  则  $A = C^T C$  显然  $C = SB$  是主对角元全为正数的上三角矩阵

最后由第六条推正定阵显然甚至比前面的定理结论更加强化了

## 5.3 书课后题

问题 5.1 prob : 变换下列二次型为标准型

$$(1) \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

$$\text{solve : 设 } LHS = a_1 \left( x_1 + b_1 \sum_{j=2}^n x_j \right)^2 + a_2 \left( x_2 + b_2 \sum_{j=3}^n x_j \right)^2 + \cdots + a_i \left( x_i + b_i \sum_{j=i+1}^n x_j \right)^2 + \cdots + a_n x_n^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 b_1^2 + a_2 = 1 \\ a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + a_3 = 1 \\ \dots \\ a_1 b_1^2 + \cdots + a_{i-1} b_{i-1}^2 + a_i = 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} 2a_1 b_1 = 1 \\ 2a_1 b_1^2 + 2a_2 b_2 = 1 \\ 2a_1 b_1^2 + 2a_2 b_2^2 + 2a_3 b_3 = 1 \\ \dots \\ 2a_1 b_1^2 + \cdots + 2a_{i-1} b_{i-1}^2 + 2a_i b_i = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n-1} b_{n-1}^2 - a_{n-1} + a_n = 0 (*) \\ 2a_{n-1} b_{n-1}^2 - 2a_{n-1} b_{n-1} + 2a_n b_n = 0 \end{cases} \quad (\text{降标作差}) \Rightarrow a_{n-1} - a_n = a_{n-1} b_{n-1} - a_n b_n \Rightarrow a_{n-1} (1 - b_{n-1}) = a_n (1 - b_n)$$

$$\Rightarrow \text{不难看出 } a_1 = 1 \text{ and } b_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n (1 - b_n) = \frac{1}{2} \text{ 回代 } (*) \text{ 式子 } \Rightarrow a_n = 1 - \frac{1}{4a_{n-1}} \text{ 引入特征根方程 } x = 1 - \frac{1}{4x} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{2}} = 2 \text{ 是以 } d = 2 \text{ 的 } A.P. \Rightarrow a_n = \frac{n+1}{2n} \quad b_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow f = \left( x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n x_j \right)^2 + \frac{3}{4} \left( x_2 + \frac{1}{3} \sum_{j=3}^n x_j \right)^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n} \left( x_i + \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^n x_j \right)^2 + \cdots + \frac{n+1}{2n} x_n^2$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n x_j \\ \dots \\ y_i = x_i + \frac{1}{i+1} \sum_{j=i+1}^n x_j \\ \dots \\ y_n = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2} y_2 - \cdots - \frac{1}{n-1} y_{n-1} - \frac{1}{n} y_n \\ x_i = y_i - \frac{1}{i+1} y_{i+1} - \cdots - \frac{1}{n-1} y_{n-1} - \frac{1}{n} y_n \\ \dots \\ x_{n-1} = y_{n-1} - \frac{1}{n} y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{线性替换矩阵为 } \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\text{solve : 令 } \begin{cases} y_1 = x_1 - \bar{x} \\ y_2 = x_2 - \bar{x} \\ \dots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x} \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n x_i - (n-1)\bar{x} = \bar{x} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + \sum_{i=1}^n y_i \\ x_2 = y_2 + \sum_{i=1}^n y_i \\ \dots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + \sum_{i=1}^n y_i \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f &= \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \left(y_n - \sum_{i=1}^n y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)^2 = 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} y_i y_j \right) = 2 \left( z_1^2 + \frac{3}{4} z_2^2 + \dots + \frac{n}{2(n-1)} z_{n-1}^2 \right) \\ &= 2z_1^2 + \frac{3}{2} z_2^2 + \dots + \frac{n}{n-1} z_{n-1}^2 \end{aligned}$$

(3)  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$ 

$$\text{solve : 令 } y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2} \Rightarrow y_1^2 - y_2^2 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)$$

$$1^\circ : \text{当 } n \text{ 为奇数时, 令 } \begin{cases} y_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_{i+1} = \frac{x_i - x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, n-2) \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i + y_{i+1} = x_i + x_{i+2} \\ y_i - y_{i+1} = x_{i+1} \\ x_n = y_n \end{cases}$$

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \dots + y_{n-2}^2 - y_{n-1}^2$$

$$\text{那么当 } n = 4k + 1 \text{ 时 } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{当 } n = 4k + 3 \text{ 时 } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$2^\circ \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, 令 } \begin{cases} y_i = \frac{x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_{i+1} = \frac{x_i - x_{i+1} + x_{i+2}}{2} \\ y_{n-1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \\ y_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2} \end{cases} \quad (i = 1, 3, 5, \dots, n-3)$$

$$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \dots + y_{n-1}^2 - y_n^2$$

$$\text{当 } n = 4k \text{ 时 } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{当 } n = 4k + 2 \text{ 时 } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**问题 5.2 prob :** 设  $f = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \dots - l_{p+q}^2$  其中  $l_i (i = 1, 2, \dots, p+q)$  是  $x_1 x_2 \dots x_n$  的一次齐次式

**prove :**  $f$  的正惯性指数  $\leq p$ ; 负惯性指数  $\leq q$

*proof*: 设  $l_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n$ ; 设  $f$  的正、负惯性指数为  $s, t$ ; 有可逆线性替换  $y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n, i = \overline{1, n}$

$$st.f = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_p^2 - l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_{s+t}^2 (*)$$

下证:  $s \leq p$ ; 假设  $s > p$ ; 则线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ b_{p1}x_1 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \\ c_{s+1,1}x_1 + \cdots + c_{s+1,n}x_n = 0 \\ \cdots \\ c_{n1}x_1 + \cdots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{方程的个数为 } p+n-s = n-(s-p) < n; \text{ 那么一定有非零解一个设为 } (a_1, a_2 \cdots a_n)$$

$$\text{带入 } (*) \Rightarrow -l_{p+1}^2 - \cdots - l_{p+q}^2 = y_1^2 + \cdots + y_s^2 \Rightarrow l_{p+1} = \cdots = l_{p+q} = 0; y_1 = \cdots = y_s = 0$$

$\Rightarrow$  针对  $(a_1, a_2 \cdots a_n)$  该非零解有  $y_1 y_n = 0$ ; 这与  $y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n (i = 1, 2 \cdots n)$  的系数矩阵为非退化相矛盾

**问题 5.3** *prob*: 设  $A$  为  $n$  阶对称矩阵

*prove*: 存在一正实数  $c$ , 使得对  $\forall n$  维实向量  $X$ ,  $st. |X^T A X| \leq c X^T X$

$$\textit{proof}: \text{ 因为 } |X^T A X| = \left| \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \right| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}| |x_i| |x_j|$$

$$\text{ 令 } a = \max |a_{ij}|, \text{ 再由 } |x_i| |x_j| \leq \frac{x_i^2 + x_j^2}{2} \Rightarrow |X^T A X| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}| |x_i| |x_j| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a |x_i| |x_j| \leq a \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i^2 + x_j^2}{2}$$

$$= \frac{a}{2} \left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \sum_{j=1}^n x_j^2 \right] = an \sum_{i=1}^n x_i^2 = c X^T X$$

**问题 5.4** 主对角线上全是 1 的上三角形矩阵成为特殊上三角形矩阵

*prove*:

(1) 设  $A$  是一对称矩阵,  $T$  为特殊上三角矩阵, 而  $B = T^T A T$ , 则  $A, B$  对应的顺序主子式有相同值

(2) 若对称矩阵  $A$  的顺序主子式全不为 0; 一定存在一个特殊的上三角矩阵  $T$  使得  $T^T A T$  为对角形

(3) 证明定理:  $f = X^T A X$  为正定  $\Leftrightarrow A$  的所有顺序主子式  $> 0$

$$\textit{proof}: (1) A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ O & T_{22} \end{pmatrix} \text{ 其中 } A_{11} \text{ and } T_{11} \text{ 是 } s \text{ 阶方阵 } (s = 1, 2 \cdots n)$$

$$B = T^T A T = \begin{pmatrix} T_{11}^T A_{11} T_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \text{ 那么 } T_{11}^T A_{11} T_{11} \text{ 是 } s \text{ 阶方阵, 且 } T_{11} \text{ 为特殊上三角矩阵. 于是 } B \text{ 矩阵的第 } s \text{ 个顺序主子式为}$$

$$|T_{11}^T A_{11} T_{11}| = |T_{11}^T| |A_{11}| |T_{11}| = |A_{11}| \text{ 所以有相同的顺序主子式}$$

(2) 对  $n$  用数学归纳法证明; 当  $n = 1, 2$  显然成立; 假设当  $n - 1$  时也成立

$$\text{ 那么当 } n \text{ 时, 将 } A \text{ 分块为 } A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 知道 } A_{n-1} \text{ 为 } A \text{ 的 } n-1 \text{ 顺序主子式所以 } A_{n-1} \text{ 可逆; 令 } P_1 = \begin{pmatrix} I & -A_{n-1}^{-1} \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_1^T A P_1 = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O \\ O & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} \text{ 由归纳假设知道 } \exists P_2 \text{ st. } P_2^T A_{n-1} P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

令  $P = P_1 \begin{pmatrix} P_2 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$  那么  $P$  为特殊上三角矩阵。那么  $P^T A P = \begin{pmatrix} P_2^T A_{n-1} P_2 & O \\ O & a_{nn} - \alpha^T A_{n-1}^{-1} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

(3): 由第二问知道存在特殊上三角矩阵  $T$  st.  $T^T A_n T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = B$

由第一问知道顺序主子式都具有相同的值, 故  $\lambda_1 = a_{11} > 0$   $\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \lambda_2 > 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_i > 0$

因为  $X = TY$  为非退化的线性替换所以  $X^T A X = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  由于  $\lambda_i > 0$  所以正定

### 问题 5.5 prove

(1) 如果  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) 是正定二次型, 那么  $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$  为负定二次型

(2) 如果  $A$  是正定矩阵, 那么  $|A| \leq a_{nn} H_{n-1}$ ,  $H_{n-1}$  是  $A$  的  $n-1$  阶顺序主子式

(3) 如果  $A$  是正定矩阵, 那么  $|A| \leq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

(4) 如果  $T = (t_{ij})_{n \times n}$  是实可逆矩阵, 那么  $|T|^2 \leq \prod_{i=1}^n (t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \cdots + t_{ni}^2)$

prove:

(1) method1 设  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  则  $\begin{pmatrix} IA & Y \\ Y' & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A^{-1}Y \\ O & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ Y' & -Y'A^{-1}Y \end{pmatrix} \Rightarrow f = \begin{vmatrix} A & Y \\ Y' & O \end{vmatrix} = -|A| Y' A^{-1} Y,$

所以, 知  $f$  是一个二次型. 作非退化线性替换  $Y = AZ$ , 式中  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)'$  则  $f = -|A| Z' A' (A^{-1}) AZ = -|A| Z' AZ$   
因为  $A$  是正定的, 知  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是负定二次型.

(2)  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$   
 $= f_{n-1}(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1n}) + a_m |H_{n-1}|$

因为  $A$  是正定的, 所以  $A_{n-1}$  也是正定的. 从而由题 (1) 知,  $f$  是负定的, 即  $f_{n-1}(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1n}) \leq 0$ . 于是,  $|A| \leq a_m |H_{n-1}|$ .  
当  $a_{1n} = a_{2n} = \cdots = a_{n-1n} = 0$ ;  $|A| = a_{nn} H_{n-1}$

(3) 因为  $A$  是正定的, 所以  $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_{n-1}|$  对应的方阵是正定的

故由题 (2) 得  $|A| \leq a_{nn} |A_{n-1}| \leq a_{nn} a_{n-1n-1} |A_{n-2}| \leq \cdots \leq a_{nn} a_{n-1n-1} \cdots a_{22} a_{11}$

(4) 易知  $X^T E X$  为正定矩阵; 作变换  $x = Ty$ , 则  $x'x = y'T'Ty$  是正定二次型, 从而  $T'T$  为正定矩阵对称型

$$T'T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n t_{i1}^2 & & * \\ & \sum_{i=1}^n t_{i2}^2 & \\ * & & \ddots \\ & & & \sum_{i=1}^n t_{in}^2 \end{bmatrix}$$

由题(3)知  $|T^2| = |T'T| \leq \prod_{j=1}^n (t_{1j}^2 + t_{2j}^2 + \cdots + t_{nj}^2)$ .

**问题 5.6 prove:** 实对称矩阵  $A$  半正定  $\Leftrightarrow A$  的一切主子式  $\geq 0$

*proof:* 必要性: 设  $A$  是半正定的. 令  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ , 且  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ,  $A_k = \begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{bmatrix}$

并设矩阵为  $A$  与  $A_k$  的二次型分别为  $y'Ay$  与  $x'A_kx$ . 对任意的  $x_0 = (b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_m})' \neq 0$ , 存在  $y_0 = (c_1, c_2, \cdots, c_n)' \neq 0$

其中  $c_k = \begin{cases} b_k, & (k = i_1, i_2, \cdots, i_m), \\ 0, & (\text{其它}). \end{cases}$  则由  $A$  是半正定的  $\Rightarrow y_0'Ay_0 \geq 0 \Rightarrow x_0'A_kx_0 \geq 0$ , 知  $A_k$  是半正定

故必存在实满秩矩阵  $T_k$ , 使得  $T_k'A_kT_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix}$ ,  $\lambda_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$

$\Rightarrow |T_k'A_kT_k| = |A_k| |T_k|^2 = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k \geq 0 \Rightarrow |A_k| \geq 0$

充分性 设  $B_m = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$  ( $m = 1, 2, \cdots, m$ ), 则  $B_m$  是  $A$  的第  $m$  个顺序主子式对应的矩阵.

$|\lambda E_m + B_m| = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \lambda + a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda + a_{mm} \end{vmatrix}$  式中  $P_i$  为  $B_m$  中一切  $i$  阶主子式的和. 由题设知,  $A$  的一切主子式均不小于零

$$= \lambda^m + P_1 \lambda^{m-1} + \cdots + P_{m-1} \lambda + P_m.$$

故  $P_i \geq 0$ . 从而, 当  $\lambda > 0$  时,  $|\lambda E_m + B_m| > 0$ , 即当  $\lambda > 0$ ; 为正定

若  $A$  不是半正定的, 则有  $x_0 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)' \neq 0$ , 使  $x_0'Ax_0 = -c < 0$ . 于是, 令

$$\lambda = \frac{c}{x_0'x_0} = \frac{c}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} > 0, \Rightarrow \text{则 } x_0'(\lambda E + A)x_0 = x_0'\lambda E x_0 + x_0'Ax_0 = c - c = 0$$

这与  $\lambda > 0$  时  $\lambda E + A$  为正定矩阵矛盾. 故  $A$  必是半正定的.

## 5.4 对称矩阵与矩阵合同

## 命题 5.1

设  $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  是分块对角矩阵, 其中  $A_i$  都是对称矩阵

*prove*:  $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  合同于  $\text{diag}\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}\}$  其中  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$  是一个  $A_1, A_2, \dots, A_m$  的一个排列

**Proof** 对换分块矩阵对角矩阵的  $i, j$  分块行再对换  $i, j$  分块列这是一个合同变换, 变换的结果是将第  $(i, i)$  分块和第  $(j, j)$  分块对换了位置。又任意一个排列总可以通过若干次对换实现因此显而易见

## 命题 5.2

*prove*: 正定阵的任一主子阵也是正定阵, 半正定阵的任一主子阵也是半正定阵

**Proof** 对于正定阵  $A$  的任意一个  $r$  阶主子阵总可以通过合同变换将其调换到左上方而且合同变换不改变正定性, 因此只需要证明对于一个正定阵其任意  $r$  阶顺序主子阵是正定阵即可。这是显然的, 因为我们对于  $A_r$  我们只需要取  $n$  维向量中的后面  $n-r$  维为 0, 前面  $r$  维  $=0$  记为  $\beta$  那么有  $\beta' A \beta = \alpha' A \alpha > 0$

## 命题 5.3

设  $A$  为  $n$  阶正定实对称矩阵

*prove*:  $A$  的所有主子式全大于零, 特别的其主对角元全大于零,  $A$  中绝对值最大的元素只会落在主对角线上

**Proof** 该命题是 2.3.2 的直接推论因而易知前半部分, 反证法: 若  $A$  中绝对值最大的元素为  $a_{ij}$  ( $i \neq j$ ), 则一个主子阵为  $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 < 0$  这与命题 2.3.2 矛盾

## 命题 5.4

设  $n$  阶方阵  $A$  是对称矩阵或反对称矩阵且秩为  $r$

*prove*:  $A$  必定有一个  $r$  阶主子式不等于零

**Proof** 证明设  $A$  的行向量分别为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 列向量组为  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 。设  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$  是  $A$  的行向量组的极大无关组用行对换可以把这些换到前  $r$  行。再用对称的列变换可以将列向量  $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$  换到前  $r$  列得到的矩阵记为  $B$ , 则  $B$  仍然是对称矩阵且  $A$  的第  $i_1, i_2, \dots, i_r$  的行和列交点上的元素组成的主子式变为了  $B$  的第  $r$  个顺序主子式  $|D|$  所以只需要证明  $|D| \neq 0$  由于  $B$  的后  $n-r$  行向量都是前面  $r$  个行向量的线性组合, 故可以用第三类初等行变换将他们消去接着用对称的第三类初等列变换得到矩阵  $C$  则  $C = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$  因为  $C$  的秩等于  $A$  的秩, 故  $D$  的秩为  $r$  从而  $|D| \neq 0$

## 命题 5.5

设有分块对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$  假设  $A_1$  合同于  $B_1$ ,  $A_2$  合同于  $B_2$

*prove*:  $A$  合同于  $\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$

**Proof** 设  $C_1, C_2$  为非异阵, 那么  $C_1' A_1 C_1 = B_1$   $C_2' A_2 C_2 = B_2$  令  $C = \begin{pmatrix} C_1 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$  即可

自然地我们也有  $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$  有  $p(M) = p(A) + p(B)$   $q(M) = q(A) + q(B)$

利用类似的降阶公式我们会有: 实对称矩阵  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ C' & B \end{pmatrix}$  其中  $AB$  可逆,  $\begin{cases} p(A) + p(B - C'A^{-1}C) = p(B) + p(A - CB^{-1}C') \\ q(A) + q(B - C'A^{-1}C) = q(B) + q(A - CB^{-1}C') \end{cases}$   
这是分别利用第一分块行把第二行消去, 和第二分块行把第一行消去

**命题 5.6**

设  $\alpha$  是  $n$  维实向量且  $\alpha'\alpha = 1$

*solve*:  $I_n - 2\alpha\alpha'$  的正负惯性指数

**Proof** 构造分块矩阵  $M = \begin{pmatrix} I_n & \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{2}\alpha' & 1 \end{pmatrix}$  利用上题结论即可

**命题 5.7**

求  $n (\geq 2)$  阶实对称矩阵  $A$  的正负惯性指数

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

**Proof** 构造分块对称矩阵  $M = \begin{pmatrix} -I_n & B \\ B' & -I_2 \end{pmatrix}$  其中  $B' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

则  $A = -I_n - B(-I_2)^{-1}B$  and  $C = -I_2 - B'(-I_n)'B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 1 & \sum_{i=1}^n a_i \\ \sum_{i=1}^n a_i & n - 1 \end{pmatrix}$

经过初等变换可以化为  $\text{diag} \left\{ \frac{|C|}{n-1}, n-1 \right\} \Rightarrow \begin{cases} |C| > 0 & p(C) = 2, q(C) = 0 \\ |C| = 0 & p(C) = 1, q(C) = 1 \\ |C| < 0 & p(C) = 1, q(C) = 1 \end{cases}$  根据上题我们知道  $p(A) = p(C), q(A) = q(C) +$

$n-2$  且由前文矩阵降阶公式求行列式我们知道  $|A| = (-1)^n |C|$

因而  $\Rightarrow \begin{cases} (-1)^n |C| > 0 & p(A) = 2, q(A) = n-2 \\ (-1)^n |C| = 0 & p(A) = 1, q(A) = n-2 \\ (-1)^n |C| < 0 & p(A) = 1, q(C) = n-1 \end{cases}$